

Propuesta de criterios y alternativas para la elección de proyecciones cartográficas diferentes a la de Mercator en la elaboración de cartas de navegación electrónica

Autora: Alsira Salgado Don

Tesis doctoral UDC / Año 2015

Director: Pablo López Varela

Tutor: Pablo López Varela

Programa de doutoramento de ENXEÑARÍA DE PROPULSIÓN E NAVEGACIÓN MARÍTIMA



UNIVERSIDADE DA CORUÑA

PABLO LÓPEZ VARELA, Profesor Contratado Doctor perteneciente al Departamento de Ciencias de la Navegación y de la Tierra de la UDC, y con docencia en la ETS de Náutica y Máquinas,

ACREDITO

Que la Tesis Doctoral realizada por la doctoranda **Alsira Salgado Don**, de título: *Propuesta de criterios y alternativas para la elección de proyecciones cartográficas diferentes a la de Mercator en la elaboración de cartas de navegación electrónica*, cumple los requisitos precisos para optar al grado de Doctor.

A Coruña a 16 de septiembre de 2015

El Director,

-Pablo López Varela-

A Ezequiel y Magdalena, mis padres.

La realización de esta Tesis no ha sido sólo gracias a mi esfuerzo, sino que tengo mucho que agradecer a aquellas personas que me han ayudado, enseñado, apoyado y que hicieron que esta dura singladura llegara a buen puerto. En primer lugar me gustaría agradecer profundamente a D. Pablo López Varela, mi director de tesis, por permitirme seguir aprendiendo, por guiarme, aconsejarme y por disponer de una paciencia ilimitada en el desarrollo de esta Tesis.

Mención especial también a D. Santiago Iglesias Baniela, Dña. María José Muiños Fernández y D. Ángel Daniel Rodríguez Arós, que en todo momento atendieron a mis peticiones mostrando gran interés y resolución.

Gracias a los compañeros de profesión y compañeros de trabajo, que han colaborado de una manera u otra en la realización de esta tesis.

Gracias a mis alumnos, por alegrarme las clases aquellos días que ni una frase escribía.

Gracias a todos mis familiares y amigos que siempre estuvieron ahí, con un cariño especial a mi gente de Cerceda.

Gracias a Almudena Arias, María del Carmen Arribas, Melania Fernández, Andrea Fontoira, Ramón Freire, Noemí Gala, Cristina Ivancich y Silvia Reimúndez por sus consejos ante la desesperación de no avanzar.

No podía terminar sin agradecer, con un gran orgullo, a mis queridos padres y hermanos por todo su sacrificio, apoyo y por haberme hecho creer cada día que podía hacerlo.

RESUMEN

A bordo de un buque mercante, la carta náutica constituye una de las herramientas de trabajo fundamental con las que cuenta el marino para interactuar con su entorno.

Actualmente, los sistemas de información y visualización de carta electrónica (ECDIS) están sustituyendo las cartas impresas. En un ECDIS la metodología de trabajo cambia radicalmente frente a la tradicional. Ya no prima la sencillez de trazado de la derrota, ni la facilidad para medir posiciones, rumbos y distancias, ya que todas estas operaciones las realizará el propio sistema. Además, el ECDIS no solo es un sustituto a las cartas de papel, sino una interface gráfica para la integración y control de resto de los sistemas de navegación.

La presente Tesis Doctoral se centra en el establecimiento de criterios y la realización de propuestas para la elección de sistemas de proyección cartográfica, alternativos a la proyección de Mercator, para la elaboración de cartas de navegación electrónica. Para ello, se analizan los requisitos que debe cumplir una carta de este tipo, se realiza una propuesta de proyecciones que los cumplan y se analizan comparativamente entre ellas y respecto a los estándares tradicionales. Finalmente los resultados se contrastan con una encuesta dirigida a marinos mercantes.

RESUMO

A bordo dun buque mercante, a carta náutica constitúe unha das ferramentas de traballo fundamentais cas que conta o mariño para interactuar co seu entorno.

Actualmente, os sistemas de información e visualización de carta electrónica (ECDIS) están substituíndo as cartas impresas. Nun ECDIS a metodoloxía de traballo cambia radicalmente fronte a tradicional. Xa non prima a sinxeleza do trazado da derrota, nin a facilidade para medir posicións, rumbos e distancias, xa que todas estas operacións realizáranse o propio sistema. Ademais, o ECDIS non só é un substituto ás cartas de papel, senón unha interface gráfica para a integración e control do resto dos sistemas de navegación.

A presente Tese de doutoramento centrase no establecemento de criterios e a realización de propostas para a elección de sistemas de proxección cartográfica, alternativos á proxección de Mercator, para a elaboración de cartas de navegación electrónica. Para elo, analízanse os requisitos que debe cumprir unha carta deste tipo, realízase unha proposta de proxeccións que os cumpran e analízanse comparativamente entre elas e respecto os estándares tradicionais. Finalmente os resultados contrástanse cos dunha enquisa dirixida a mariños mercantes.

ABSTRACT

On board a merchant ship, the nautical chart is one of the key tools that a seafarer has to interact with its environment. The Electronic Chart Display and Information System (ECDIS) is currently substituting printed charts on board vessels. Work methodology using ECDIS is radically different to that of traditional methods. Simplicity in drawing the ship's track is no longer important, as it is also not important the easiness when measuring positions, courses and distances, for all this operations will be performed by the system itself. We should also keep in mind that ECDIS is not only a substitute of printed charts, but also a graphic interface to integrate and control the bridge's navigation systems.

This thesis focuses on the establishment of criteria and making proposals for the choice of map projection systems, alternative to the Mercator projection, for the production of electronic navigational charts. To this end, the requirements to be met by a chart of this type are analyzed, a proposal for projections that meet these requirements are done, and a comparative analysis between them and with respect to traditional standards is made. Finally, the results are compared with a survey of merchant seafarer.

INDICE GENERAL

INDICE GENERAL	i
INDICE DE FIGURAS	xi
INDICE DE ABREVIATURAS	xix
1. PLANTEAMIENTO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN.....	1
1.1. Marco referencial	3
1.1.1. Introducción	3
1.1.2. Estado actual del conocimiento e hipótesis de partida	4
1.2. Metodología	4
1.3. Proceso de elaboración.....	6
1.3.1. Preparación, recopilación del material y análisis individualizado	6
1.3.2. Elaboración pormenorizada.....	7
1.4. Contenido	10
2. PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS DE UTILIDAD PARA LA REPRESENTACIÓN DE CARTAS NÁUTICAS ELECTRÓNICAS	13
2.1. Introducción	15
2.2. Reseña histórica	15
2.3. Los sistemas de representación del espacio geográfico	23
2.3.1. El espacio geográfico	23
2.3.2. Las proyecciones cartográficas	24
2.3.3. El concepto de escala	24
2.3.4. Clasificación de las deformaciones en los sistemas de proyección.....	26
2.3.5. Clasificación de los sistemas de proyección en función de las deformaciones que presentan	27
2.3.5.1. Proyecciones conformes u ortomorfas.....	27
2.3.5.2. Proyecciones equivalentes o autálicas	28
2.3.5.3. Proyecciones equidistantes	28
2.3.5.4. Proyecciones afilácticas.....	29
2.3.5.5. Proyecciones acimutales	29
2.3.6. Clasificación de los sistemas de proyección en función de las particularidades de su construcción	30
2.3.6.1. Proyecciones geométricas o puras.....	30
2.3.6.1.1. Proyecciones perspectivas o planas	30
2.3.6.1.2. Proyecciones por desarrollo.....	32
2.3.6.2. Proyecciones analíticas o modificadas	33

2.4. Estudio de las deformaciones en los sistemas de proyección.....	33
2.4.1. Cálculo de los elementos diferenciales sobre la superficie de referencia.....	34
2.4.1.1. Cálculo de los elementos diferenciales sobre el elipsoide.....	34
2.4.1.1.1. Elemento lineal (ds).....	35
2.4.1.1.2. Elemento angular (α).....	35
2.4.1.1.3. Elemento superficial (dS).....	35
2.4.1.2. Cálculo de los elementos diferenciales sobre la esfera.....	36
2.4.1.2.1. Elemento lineal (ds).....	36
2.4.1.2.2. Elemento angular (α).....	37
2.4.1.2.3. Elemento superficial (dS).....	37
2.4.2. Cálculo de los elementos diferenciales en el plano.....	37
2.4.2.1. Elemento lineal (ds').....	38
2.4.2.2. Elemento angular (α').....	39
2.4.2.3. Elemento superficial (dS').....	41
2.4.3. Cálculo de los módulos de deformación de una proyección por comparación de elementos diferenciales de la superficie de referencia con sus homólogos sobre el plano.....	42
2.4.3.1. Cálculo de los módulos de deformación de una proyección por comparación de elementos diferenciales del elipsoide de referencia con sus homólogos sobre el plano.....	42
2.4.3.1.1. Módulo de deformación lineal.....	42
2.4.3.1.2. Módulo de deformación angular.....	42
2.4.3.1.3. Módulo de deformación superficial.....	42
2.4.3.2. Cálculo de los módulos de deformación de una proyección por comparación de elementos diferenciales de la esfera de referencia con sus homólogos sobre el plano.....	43
2.4.3.2.1. Módulo de deformación lineal.....	43
2.4.3.2.2. Módulo de deformación angular.....	43
2.4.3.2.3. Módulo de deformación superficial.....	43
2.4.4. Elipse indicatriz de Tissot.....	44
2.4.4.1. Alteración lineal.....	47
2.4.4.2. Alteración angular.....	48
2.4.4.3. Alteración superficial.....	49
2.4.4.4. Cálculo de los semiejes de la elipse indicatriz.....	50
2.4.5. Condiciones de conformidad de Cauchy–Riemann.....	55
2.5. Proyecciones cartográficas de utilidad en la elaboración de cartas de navegación.....	58
2.5.1. Proyección de Mercator.....	58
2.5.1.1. Orígenes de la proyección de Mercator.....	58
2.5.1.2. Características principales de la proyección de Mercator.....	59
2.5.1.3. Proyección de Mercator (Tierra esférica).....	59
2.5.1.3.1. Desarrollo de la proyección de Mercator.....	59
2.5.1.3.2. Ecuaciones de transformación de coordenadas.....	61

2.5.1.3.3. Deformaciones de la proyección de Mercator	62
2.5.1.4. Proyección Mercator (Tierra elipsoidal)	64
2.5.1.4.1. Desarrollo de la proyección de Mercator	64
2.5.1.4.2. Ecuaciones de transformación de coordenadas	66
2.5.1.4.3. Deformaciones de la proyección de Mercator	67
2.5.1.5. Usos de la proyección de Mercator	69
2.5.2. Proyección transversa de Mercator	70
2.5.2.1. Orígenes de la proyección transversa de Mercator	70
2.5.2.2. Características principales de la proyección transversa de Mercator	71
2.5.2.3. Desarrollo de la proyección transversa de Mercator	71
2.5.2.4. Deformaciones de la proyección transversa de Mercator	74
2.5.2.4.1. Deformación angular	74
2.5.2.4.2. Deformación superficial	74
2.5.2.4.3. Deformación lineal	74
2.5.2.5. Usos de la proyección transversa de Mercator	75
2.5.3. Proyección cónica conforme de Lambert	76
2.5.3.1. Orígenes de la proyección cónica conforme de Lambert	76
2.5.3.2. Características principales de la proyección cónica conforme de Lambert	77
2.5.3.3. Desarrollo de la proyección cónica conforme de Lambert	77
2.5.3.4. Deformaciones de la proyección cónica conforme de Lambert	81
2.5.3.4.1. Deformación angular	81
2.5.3.4.2. Deformación superficial	82
2.5.3.4.3. Deformación lineal	82
2.5.3.5. Usos de la proyección cónica conforme de Lambert	83
2.5.4. La proyección escenográfica horizontal como caso genérico de proyección perspectiva vertical.	85
2.5.4.1. Ecuaciones de transformación de coordenadas	87
2.5.4.1.1. Transformación de coordenadas polares en la esfera a polares en el plano	87
2.5.4.1.2. Transformación de coordenadas geográficas en la esfera a cartesianas en el plano	88
2.5.4.1.3. Transformación de coordenadas cartesianas en el plano a geográficas en la esfera	91
2.5.4.2. Deformaciones de la proyección escenográfica	93
2.5.4.2.1. Deformación angular	94
2.5.4.2.2. Deformación superficial	95
2.5.4.2.3. Deformación lineal	96
2.5.4.3. Límites geométricos de las proyecciones perspectivas	99
2.5.5. Proyección estereográfica	102
2.5.5.1. Orígenes de la proyección estereográfica	102
2.5.5.2. Características principales de la proyección estereográfica	103

2.5.5.3. Transformación de coordenadas	105
2.5.5.3.1. Transformación de coordenadas polares en la esfera a polares en el plano	105
2.5.5.3.2. Transformación de coordenadas geográficas en la esfera a cartesianas en el plano	106
2.5.5.3.3. Transformación de coordenadas cartesianas en el plano a geográficas en la esfera	109
2.5.5.4. Deformaciones de la proyección estereográfica	110
2.5.5.4.1. Deformación angular	110
2.5.5.4.2. Deformación superficial	111
2.5.5.4.3. Deformación lineal	111
2.5.5.5. Usos de la proyección estereográfica	115
2.5.6. Proyección gnomónica	117
2.5.6.1. Orígenes de la proyección gnomónica	117
2.5.6.2. Características principales de la proyección gnomónica.	118
2.5.6.3. Transformación de coordenadas	118
2.5.6.3.1. Transformación de coordenadas polares en la esfera a polares en el plano	118
2.5.6.3.2. Transformación de coordenadas geográficas en la esfera a cartesianas en el plano	119
2.5.6.3.3. Transformación de coordenadas cartesianas en el plano a geográficas en la esfera	122
2.5.6.4. Deformaciones de la proyección gnomónica	123
2.5.6.4.1. Deformación angular	123
2.5.6.4.2. Deformación superficial	124
2.5.6.4.3. Deformación lineal	125
2.5.6.5. Usos de la proyección gnomónica	129
2.5.7. Proyección ortográfica	130
2.5.7.1. Orígenes de la proyección ortográfica	130
2.5.7.2. Características principales de la proyección ortográfica	131
2.5.7.3. Transformación de coordenadas	131
2.5.7.3.1. Transformación de coordenadas polares en la esfera a polares en el plano	131
2.5.7.3.2. Transformación de coordenadas geográficas en la esfera a cartesianas en el plano	132
2.5.7.3.3. Transformación de coordenadas cartesianas en el plano a geográficas en la esfera	135
2.5.7.4. Deformaciones en la proyección ortográfica	136
2.5.7.4.1. Deformación angular	136
2.5.7.4.2. Deformación superficial	137
2.5.7.4.3. Deformación lineal	138
2.5.7.5. Usos de la proyección ortográfica	142
2.5.8. Proyección acimutal equidistante	143
2.5.8.1. Orígenes de la proyección acimutal equidistante	143

2.5.8.2. Características principales de la proyección acimutal equidistante.....	143
2.5.8.3. Transformación de coordenadas	144
2.5.8.3.1. Transformación de coordenadas polares en la esfera a polares en el plano	144
2.5.8.3.2. Transformación de coordenadas geográficas en la esfera a cartesianas en el plano	145
2.5.8.3.3. Transformación de coordenadas cartesianas en el plano a geográficas en la esfera.....	149
2.5.8.4. Deformaciones de la proyección acimutal equidistante	151
2.5.8.4.1. Deformación angular	151
2.5.8.4.2. Deformación superficial	152
2.5.8.4.3. Deformación lineal	153
2.5.8.5. Usos de la proyección acimutal equidistante.....	156
2.5.9. Proyección de Mollweide.....	157
2.5.9.1. Orígenes de la proyección de Mollweide	157
2.5.9.2. Características principales de la proyección de Mollweide.....	157
2.5.9.3. Transformación de coordenadas.....	157
2.5.9.4. Deformaciones de la proyección de Mollweide	160
2.5.9.5. Usos de la proyección de Mollweide.....	162

3. ANÁLISIS Y ESTABLECIMIENTO DE LOS REQUISITOS A CUMPLIR POR UNA CARTA DE NAVEGACIÓN 163

3.1. Análisis de los requisitos a cumplir por una carta de navegación impresa	166
3.1.1. Planificación y trazado de derrotas.	167
3.1.1.1. La derrota loxodrómica en la carta de Mercator.....	167
3.1.1.1.1. Trazado de derrotas loxodrómicas	167
3.1.1.1.2. Medición de distancias loxodrómicas.....	168
3.1.1.1.3. Medición de rumbos loxodrómicos	173
3.1.1.2. La derrota ortodrómica en la carta de Mercator	173
3.1.1.3. La derrota ortodrómica en la carta gnomónica.....	174
3.1.1.3.1. Trazado de derrotas ortodrómicas.....	174
3.1.1.3.2. Casos particulares en el trazado de derrotas ortodrómicas sobre cartas gnomónicas	176
3.1.1.3.3. Medición de distancias ortodrómicas.....	177
3.1.1.3.4. Medición de rumbos ortodrómicos	183
3.1.1.4. La derrota ortodrómica en la proyección estereográfica	185
3.1.1.5. La derrota ortodrómica en la proyección cónica conforme de Lambert.....	186
3.1.2. Seguimiento de la derrota y trazado de la posición geográfica del buque.	188
3.1.3. Estudio del espacio geográfico mostrado por la carta.	191
3.1.4. Resumen de los requisitos deseables para una carta de navegación impresa e identificación de las proyecciones que mejor los cumplen.	192

3.2. Análisis de los requisitos a cumplir por una carta de navegación electrónica.....	193
3.2.1. Requisitos generales	193
3.2.1.1. Conformidad.....	195
3.2.1.2. Deformación lineal	195
3.2.1.3. Deformación superficial mínima	196
3.2.1.4. Entramado de paralelos y meridianos.....	196
3.2.1.5. Indicación visual de la convergencia de meridianos.....	197
3.2.1.6. Diferenciación visible y proporcional entre la longitud de derrotas ortodrómicas y loxodrómicas	197
3.2.1.7. Aspecto independiente de la posición del buque	197
3.2.2. Requisitos particulares.....	197
3.2.2.1. Cartas electrónicas a gran escala	198
3.2.2.2. Cartas electrónicas a media escala.....	198
3.2.2.3. Cartas electrónicas a pequeña escala	198
4. PROPUESTA Y ANÁLISIS DE LAS PROYECCIONES ALTERNATIVAS A LA DE MERCATOR EN LA REPRESENTACIÓN DE CARTAS DE NAVEGACIÓN ELECTRÓNICA.....	199
4.1. Propuesta de proyecciones alternativas a la de Mercator	201
4.1.1. Proyección estereográfica.....	201
4.1.2. Proyección cónica conforme de Lambert	202
4.1.3. Proyección transversa de Mercator.....	202
4.1.4. Proyección ortográfica.....	202
4.1.5. Acimutal equidistante	202
4.1.6. Mollweide.....	202
4.2. Análisis comparativo de las formas de los entramados de paralelos y meridianos entre las proyecciones propuestas, mercator y gnomónica	203
4.3. Análisis comparativo de las deformaciones entre las proyecciones propuestas, Mercator y gnomónica	211
4.4. Estudio y análisis comparativo de las derrotas sobre las proyecciones propuestas, mercator y gnomónica	216
4.4.1. Derrota loxodrómica y ortodrómica sobre la proyección de Mercator.....	217
4.4.1.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección de Mercator.	217
4.4.1.1.1. Ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección de Mercator	217
4.4.1.1.2. Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la proyección de Mercator.....	219
4.4.1.1.3. Representación gráfica de la loxodrómica en la proyección de Mercator.....	219
4.4.1.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección de Mercator	220
4.4.1.2.1. Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección de Mercator.....	221
4.4.1.2.2. Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección de Mercator	222

4.4.1.2.3. Representación gráfica de la ortodrómica sobre la proyección de Mercator	222
4.4.2. Derrota loxodrómica y ortodrómica sobre la proyección gnomónica	223
4.4.2.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección gnomónica	223
4.4.2.1.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección gnomónica horizontal	224
4.4.2.1.2. Derrota loxodrómica sobre la proyección gnomónica polar	226
4.4.2.1.3. Derrota loxodrómica sobre la proyección gnomónica transversa	228
4.4.2.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección gnomónica	230
4.4.2.2.1. Derrota ortodrómica sobre la proyección gnomónica horizontal	231
4.4.2.2.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección gnomónica polar	234
4.4.2.2.3. Derrota ortodrómica sobre la proyección gnomónica transversa	236
4.4.3. Derrota loxodrómica y ortodrómica sobre la proyección estereográfica	238
4.4.3.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección estereográfica	238
4.4.3.1.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección estereográfica horizontal	238
4.4.3.1.2. Derrota loxodrómica sobre la proyección estereográfica polar	240
4.4.3.1.3. Derrota loxodrómica sobre la proyección transversa	242
4.4.3.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección estereográfica	244
4.4.3.2.1. Derrota ortodrómica sobre la proyección estereográfica horizontal	244
4.4.3.2.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección estereográfica polar	249
4.4.3.2.3. Derrota ortodrómica sobre la proyección estereográfica transversa	251
4.4.4. Derrota loxodrómica y ortodrómica sobre la proyección cónica conforme de Lambert	253
4.4.4.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección cónica conforme de Lambert	253
4.4.4.1.1. Ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección cónica conforme de Lambert	253
4.4.4.1.2. Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la proyección cónica conforme de Lambert	254
4.4.4.1.3. Representación gráfica de la loxodrómica en la proyección cónica conforme de Lambert	255
4.4.4.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección cónica conforme de Lambert	257
4.4.4.2.1. Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección cónica conforme de Lambert	257
4.4.4.2.2. Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección cónica conforme de Lambert	258
4.4.4.2.3. Representación gráfica de la ortodrómica sobre la proyección cónica conforme de Lambert	258
4.4.5. Derrota loxodrómica y ortodrómica sobre la proyección transversa de Mercator	260
4.4.5.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección transversa de Mercator	260
4.4.5.1.1. Ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección transversa de Mercator	260
4.4.5.1.2. Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la proyección transversa de Mercator	261
4.4.5.1.3. Representación gráfica de la loxodrómica en la proyección transversa de Mercator	261

4.4.5.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección transversa de Mercator.....	262
4.4.5.2.1. Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección transversa de Mercator..	262
4.4.5.2.2. Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección transversa de Mercator.....	263
4.4.5.2.3. Representación gráfica de la ortodrómica en la proyección transversa de Mercator.....	263
4.4.6. Derrota loxodrómica y ortodrómica sobre la proyección ortográfica.....	264
4.4.6.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección ortográfica.....	265
4.4.6.1.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección ortográfica horizontal.....	265
4.4.6.1.2. Derrota loxodrómica sobre la proyección ortográfica polar.....	266
4.4.6.1.3. Derrota loxodrómica sobre la proyección ortográfica transversa.....	268
4.4.6.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección ortográfica.....	270
4.4.6.2.1. Derrota ortodrómica sobre la proyección ortográfica horizontal.....	270
4.4.6.2.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección ortográfica polar.....	272
4.4.6.2.3. Derrota ortodrómica sobre la proyección ortográfica transversa.....	274
4.4.7. Derrota loxodrómica y ortodrómica sobre la proyección acimutal equidistante.....	275
4.4.7.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección acimutal equidistante.....	276
4.4.7.1.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección acimutal equidistante horizontal.....	276
4.4.7.1.2. Derrota loxodrómica sobre la proyección acimutal equidistante polar.....	279
4.4.7.1.3. Derrota loxodrómica sobre la proyección acimutal equidistante transversa.....	281
4.4.7.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección acimutal equidistante.....	283
4.4.7.2.1. Derrota ortodrómica sobre la proyección acimutal equidistante horizontal.....	283
4.4.7.2.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección acimutal equidistante polar.....	286
4.4.7.2.3. Derrota ortodrómica sobre la proyección acimutal equidistante transversa.....	288
4.4.8. Derrota loxodrómica y ortodrómica sobre la proyección de Mollweide.....	290
4.4.8.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección de Mollweide.....	290
4.4.8.1.1. Ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección de Mollweide.....	290
4.4.8.1.2. Representación gráfica de la loxodrómica en la proyección de Mollweide.....	291
4.4.8.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección de Mollweide.....	292
4.4.8.2.1. Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección de Mollweide.....	292
4.4.8.2.2. Representación gráfica de la ortodrómica en la de Mollweide.....	292
4.4.9. Análisis comparativo de las derrotas sobre las proyecciones propuestas, Mercator y gnomónica.....	293

5. CONTRASTE DE RESULTADOS TEÓRICOS MEDIANTE UN ESTUDIO DE CAMPO..... 301

5.1. Descripción de la encuesta.....	303
5.1.1 Directrices seguidas en el diseño de la página web.....	303
5.1.2 Determinación de la población y selección de la muestra.....	305
5.1.3 Diseño del cuestionario.....	307

5.1.3.1 Bloque 1	307
5.1.3.2 Bloque 2	308
5.2. Descripción de la muestra	313
5.3. Resultados	318
5.3.1. Descriptivos.....	318
5.3.1.1 Índices de tendencia central, dispersión y distribución	318
5.3.1.2 Tablas de frecuencias	319
5.3.1.2.1 Datos personales	319
5.3.1.2.2 Mapamundis.....	320
5.3.1.2.3 Atlántico Norte	325
5.3.1.2.4 Pacífico	332
5.3.1.2.5 Altas latitudes	339
5.3.1.3 Representaciones gráficas	341
5.3.1.3.1 Datos personales	341
5.3.1.3.2 Mapamundis.....	342
5.3.1.3.3 Atlántico Norte	344
5.3.1.3.4 Pacífico	348
5.3.1.3.5 Altas latitudes	351
5.3.1.4 Análisis de correlaciones.....	352
5.3.1.5 Tablas cruzadas	361
5.3.1.5.1 Recuentos y gráficos de barras asociadas en función de la edad	361
5.3.1.5.2 Recuentos y gráficos de barras asociadas en función de la titulación profesional.....	366
5.3.1.5.3 Recuentos y gráficos de barras asociadas en función de la experiencia en navegación	371
5.3.1.5.4 Recuentos y gráficos de barras asociadas en función de la experiencia en el uso de cartas electrónicas de navegación	376
5.3.2 Análisis de varianza	381
5.3.2.1 Tomando como factor la edad	382
5.3.2.2 Tomando como factor la titulación profesional.....	386
5.3.2.3 Tomando como factor la experiencia en navegación	390
5.3.2.4 Tomando como factor la experiencia en el uso de cartas electrónicas de navegación.....	397
5.3.3. Análisis factorial	397
5.3.4 Comentarios realizados por los encuestados.....	399
5.4. Discusión de los resultados obtenidos.....	401
5.4.1 Análisis de descriptivos y varianzas.....	401
5.4.1.1 Datos personales.....	401
5.4.1.2 Mapamundis.....	401
5.4.1.3. Atlántico Norte	404

5.4.1.4. Océano Pacífico	408
5.4.1.5. Altas latitudes	412
5.4.2. Análisis de correlaciones y factorial.....	412
5.4.3. Análisis de los comentarios recibidos	415
6. CONCLUSIONES Y DIRECTRICES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES	417
6.1. Conclusiones.....	419
6.1.1. Consideraciones generales.....	419
6.1.2. Conclusiones previas	419
6.1.2.1. Conclusiones previas relativas a la valoración de las proyecciones cartográficas propuestas mediante un estudio de campo.....	419
6.1.2.2. Conclusiones previas relativas a la valoración de las proyecciones cartográficas propuestas mediante un estudio de campo.....	420
6.1.2.3. Conclusiones previas relativas a la valoración de las proyecciones cartográficas propuestas mediante un estudio de campo.....	421
6.1.3. Conclusiones finales	424
6.1.3.1. Propuesta de criterios para la elección de proyecciones cartográficas alternativas a la de mercator para la elaboración de cartas de navegación electrónica	424
6.1.3.2. Propuesta de proyecciones cartográficas alternativas a la de mercator para la elaboración de cartas de navegación electrónica	425
6.1.3.3. Conclusiones derivadas	426
6.2 Directrices para futuras investigaciones	427
7. BIBLIOGRAFÍA.....	429
7.1. Bibliografía general	431
7.2. Artículos	435
7.3. Normativa	437
7.4. Internet.....	437
7.5. Enciclopedias y otros.....	437
ANEXO I. ASPECTO DE LA PÁGINA WEB EMPLEADA PARA EL ESTUDIO DE CAMPO.....	439

INDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1.2.1. Esquema secuencial y lógico de la investigación científica.....</i>	<i>5</i>
<i>Figura 1.2.2. Metodología empleada en la presente tesis doctoral.....</i>	<i>6</i>
<i>Figura 1.3.1. Pasos significativos en el proceso de elaboración de la tesis doctoral.....</i>	<i>8</i>
<i>Figura 1.3.2. Etapas en el proceso de elaboración de la tesis doctoral.....</i>	<i>9</i>
<i>Figura 2.2.1. “Carta náutica” de la Polinesia. Departamento de antropología del Instituto Smithsonian (número de catálogo 398227). Foto de P. E. Hurlber.....</i>	<i>16</i>
<i>Figura 2.2.2. Carta Pisana.....</i>	<i>18</i>
<i>Figura 2.2.3. Fragmento del Atlas de Cresques (1375).....</i>	<i>19</i>
<i>Figura 2.2.4. “Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigatium emendate accomodata” de Mercator (1569).....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 2.2.5. Carta general del Atlas Marítimo de España de Vicente Tofiño (1788).....</i>	<i>22</i>
<i>Figura 2.4.1. Triángulo infinitesimal sobre el elipsoide de referencia.....</i>	<i>34</i>
<i>Figura 2.4.2. Triángulo infinitesimal sobre la esfera de referencia.....</i>	<i>36</i>
<i>Figura 2.4.3. Cuadrilátero infinitesimal A'B'C'D' en el plano de proyección.....</i>	<i>38</i>
<i>Figura 2.4.4. Determinación del ángulo $\alpha_{A'D'}$.....</i>	<i>40</i>
<i>Figura 2.4.5. Determinación del ángulo $\alpha_{A'B'}$.....</i>	<i>41</i>
<i>Figura 2.4.6. Circunferencia infinitesimal de radio ds sobre el elipsoide.....</i>	<i>44</i>
<i>Figura 2.4.7. Elipse representativa de la transformada de un círculo del elipsoide de radio diferencial dS.....</i>	<i>44</i>
<i>Figura 2.4.8. Representación de la transformación de dos elementos perpendiculares diferenciales CE y OD sobre el elipsoide.....</i>	<i>45</i>
<i>Figura 2.4.9. Análisis de la elipse indicatriz de Tissot. Comparación de ésta con la circunferencia infinitesimal de la cual es transformada.....</i>	<i>46</i>
<i>Figura 2.4.10. Ejemplo de dos diámetros conjugados de la elipse indicatriz de Tissot para la aplicación de los teoremas de Apolonio.....</i>	<i>52</i>
<i>Figura 2.5.1. Desarrollo de la proyección de Mercator (Tierra esférica).....</i>	<i>60</i>
<i>Figura 2.5.2. Desarrollo de la proyección de Mercator (Tierra elipsoidal).....</i>	<i>64</i>
<i>Figura 2.5.3. Proyección de Mercator entre los paralelos de 80° N y 80° S.....</i>	<i>67</i>
<i>Figura 2.5.4. Proyección de Mercator entre los paralelos de 80° N y 80° S, con representación de las elipses indicatrices de Tissot en el Ecuador y en los paralelos de 20° N/S, 40° N/S, 60° N/S y 80° N/S.....</i>	<i>69</i>
<i>Figura 2.5.5. Desarrollo cilíndrico transverso de Gauss.....</i>	<i>71</i>
<i>Figura 2.5.6. Proyección transversa de Mercator con el meridiano de Greenwich como estándar.....</i>	<i>73</i>
<i>Figura 2.5.7. Proyección transversa de Mercator con el meridiano de Greenwich como estándar, con representación de las elipses indicatrices de Tissot en el Ecuador y en los paralelos de 20° N/S, 40° N/S, 60° N/S y 80° N/S.....</i>	<i>75</i>

<i>Figura 2.5.8. Construcción de una proyección cónica tangente.....</i>	<i>78</i>
<i>Figura.2.5.9. Construcción de una carta en proyección cónica tangente.....</i>	<i>78</i>
<i>Figura.2.5.10. Desarrollo de la proyección cónica conforme de Lambert.</i>	<i>79</i>
<i>Figura 2.5.11. Proyección cónica conforme de Lambert, con paralelo estándar en 60° N.</i>	<i>81</i>
<i>Figura 2.5.12. Proyección cónica conforme de Lambert, con paralelo estándar en 60° N, con representación de las elipses indicatrices de Tissot en el Ecuador y en los paralelos de 20° N/S, 40° N/S, 60° N/S y 80° N.....</i>	<i>83</i>
<i>Figura 2.5.13. Ejemplo de aplicación de una proyección cónica conforme de Lambert a una carta de navegación aérea.....</i>	<i>85</i>
<i>Figura 2.5.14. Fundamentos geométricos de una proyección escenográfica horizontal.....</i>	<i>87</i>
<i>Figura 2.5.15. Transformación de coordenadas geográficas a cartesianas en una proyección escenográfica horizontal.</i>	<i>89</i>
<i>Figura 2.5.16. Triángulo esférico PTA donde se contemplan las coordenadas geográficas y polares respecto al punto de tangencia T, de un punto A de la esfera terrestre de referencia.</i>	<i>90</i>
<i>Figura 2.5.17. Coordenadas cartesianas del punto A' sobre el plano del cuadro.</i>	<i>90</i>
<i>Figura 2.5.18. Proyección escenográfica horizontal con $D=2$ ($\phi_o = 30^\circ N$, $\lambda_o = 030^\circ W$).....</i>	<i>93</i>
<i>Figura 2.5.19. Estudio de las deformaciones en la proyección escenográfica, basado en la proyección de un triángulo de elementos diferenciales desde la esfera (a) al plano (b).....</i>	<i>94</i>
<i>Figura 2.5.20. Descripción de los elementos de la elipse indicatriz de deformaciones en las proyecciones perspectivas.</i>	<i>97</i>
<i>Figura 2.5.21. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección escenográfica horizontal para $D = 2$ ($\phi_o = 30^\circ N$, $\lambda_o = 030^\circ W$).....</i>	<i>99</i>
<i>Figura 2.5.22. Límite geométrico de una proyección perspectiva, siendo $D > R$.....</i>	<i>100</i>
<i>Figura 2.5.23. Límite geométrico de una proyección perspectiva, siendo $D < R$.....</i>	<i>101</i>
<i>Figura 2.5.24. Proyección estereográfica: proyección de un círculo de la esfera sobre un plano paralelo al de proyección que contenga al vértice del cono tangente a la esfera por dicho círculo..</i>	<i>103</i>
<i>Figura 2.5.25. Demostración geométrica de que las propiedades de la proyección estereográfica no sufren cambios al emplear planos de proyección paralelos.</i>	<i>104</i>
<i>Figura 2.5.26. Planteamiento geométrico de la proyección estereográfica horizontal.....</i>	<i>106</i>
<i>Figura 2.5.27. Proyección estereográfica horizontal con centro en: $\phi_o = 30^\circ N$, $\lambda_o = 030^\circ W$.....</i>	<i>107</i>
<i>Figura 2.5.28. Proyección estereográfica polar con centro en: $\phi_o = 90^\circ N$.....</i>	<i>108</i>
<i>Figura 2.5.29. Proyección estereográfica transversa con centro en: $\phi_o = 00^\circ$, $\lambda_o = 000^\circ$.....</i>	<i>109</i>
<i>Figura 2.5.30. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección estereográfica horizontal con centro en: $\phi_o = 30^\circ N$, $\lambda_o = 030^\circ W$.....</i>	<i>113</i>
<i>Figura 2.5.31. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección estereográfica polar con centro en: $\phi_o = 90^\circ N$.....</i>	<i>114</i>
<i>Figura 2.5.32. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección estereográfica transversa con centro en: $\phi_o = 00^\circ$, $\lambda_o = 000^\circ$.....</i>	<i>115</i>

<i>Figura 2.5.33. Planteamiento geométrico de la proyección gnomónica horizontal</i>	119
<i>Figura 2.5.34. Proyección gnomónica horizontal con centro en: $\phi_0 = 30^\circ N$, $\lambda_0 = 030^\circ W$</i>	120
<i>Figura 2.5.35. Proyección gnómica polar con centro en: $\phi_0 = 90^\circ N$</i>	121
<i>Figura 2.5.36. Proyección gnómica transversa con centro en: $\phi_0 = 00^\circ$, $\lambda_0 = 000^\circ$</i>	122
<i>Figura 2.5.37. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección gnomónica horizontal con centro en: $\phi_0 = 30^\circ N$, $\lambda_0 = 030^\circ W$</i>	127
<i>Figura 2.5.38. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección gnomónica polar con centro en: $\phi_0 = 90^\circ N$</i>	128
<i>Figura 2.5.39. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección gnomónica transversa con centro en: $\phi_0 = 00^\circ$, $\lambda_0 = 000^\circ$</i>	129
<i>Figura 2.5.40. Planteamiento geométrico de la proyección ortográfica</i>	132
<i>Figura 2.5.41. Proyección ortográfica horizontal con centro en: $\phi_0 = 30^\circ N$, $\lambda_0 = 030^\circ W$</i>	133
<i>Figura 2.5.42. Proyección ortográfica polar con centro en: $\phi_0 = 90^\circ N$</i>	134
<i>Figura 2.5.43. Proyección ortográfica transversa con centro en: $\phi_0 = 00^\circ$, $\lambda_0 = 000^\circ$</i>	135
<i>Figura 2.5.44. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección ortográfica horizontal con centro en: $\phi_0 = 30^\circ N$, $\lambda_0 = 030^\circ W$</i>	140
<i>Figura 2.5.45. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección ortográfica polar con centro en: $\phi_0 = 90^\circ N$</i>	141
<i>Figura 2.5.46. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección ortográfica transversa con centro en: $\phi_0 = 00^\circ$, $\lambda_0 = 000^\circ$</i>	142
<i>Figura 2.5.47. Proyección acimutal equidistante horizontal</i>	144
<i>Figura 2.5.48. Triángulo PTA donde se contemplan las coordenadas geográficas y polares respecto al punto de tangencia T, de un punto A de la esfera terrestre de referencia</i>	145
<i>Figura 2.5.49. Coordenadas cartesianas del punto A' sobre el plano de cuadro</i>	145
<i>Figura 2.5.50. Proyección acimutal equidistante horizontal, centrada en Norfolk</i>	147
<i>Figura 2.5.51. Proyección acimutal equidistante polar, centrada en el Polo Norte</i>	148
<i>Figura 2.5.52. Proyección acimutal equidistante transversa, centrada en $\phi_0 = 00^\circ$</i>	149
<i>Figura 2.5.53. Estudio de las deformaciones en la proyección acimutal equidistante</i>	151
<i>Figura 2.5.54. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección acimutal equidistante horizontal con centro en Norfolk</i>	154
<i>Figura 2.5.55. Representación de las elipses indicatrices de Tissot con centro en el Polo Norte</i>	155
<i>Figura 2.5.56. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección acimutal equidistante transversa con centro en $\phi_0 = 00^\circ$, $\lambda_0 = 000^\circ$</i>	156
<i>Figura 2.5.57. Proyección de Mollweide con meridiano central en $\lambda_0 = 040^\circ W$</i>	158
<i>Figura 2.5.58. Proyección de Mollweide del Atlántico Norte con meridiano central en $\lambda_0 = 035^\circ W$</i>	159

<i>Figura 2.5.59. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección de Mollweide con meridiano central en 040°W.</i>	161
<i>Figura 2.5.60. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección de Mollweide con meridiano central en 000°.</i>	161
<i>Figura 3.1.1. Trazado de un rumbo loxodrómico entre los puertos de Norfolk y Burdeos sobre una carta de Mercator.</i>	168
<i>Figura 3.1.2. Medición de la distancia cuando la derrota loxodrómica sigue la dirección del meridiano.</i>	169
<i>Figura 3.1.3. Navegación por paralelo.</i>	170
<i>Figura 3.1.4. Medición de la distancia cuando la derrota loxodrómica sigue la dirección del paralelo.</i>	171
<i>Figura 3.1.5. Medición de la distancia cuando la derrota loxodrómica sigue una dirección sensiblemente distinta a la de paralelos y meridianos.</i>	172
<i>Figura 3.1.6. Trazado de un rumbo ortodrómico entre los puertos de Norfolk y Burdeos sobre una carta de Mercator.</i>	174
<i>Figura 3.1.7. Trazado de una derrota ortodrómica sobre una carta gnomónica entre los puertos de Norfolk y Burdeos.</i>	175
<i>Figura 3.1.8. Representación de una derrota ortodrómica en proyección gnomónica transversa, cuando la latitud de uno de sus extremos no está contenida en la carta.</i>	176
<i>Figura 3.1.9. Representación de una derrota ortodrómica en proyección gnomónica horizontal, cuando la latitud de uno de sus extremos no está contenida en la carta.</i>	177
<i>Figura 3.1.10. Medición de la distancia ortodrómica por diferencia de latitudes entre los puertos de Norfolk (A: $\varphi = 37^\circ\text{N}$, $\lambda = 075,5^\circ\text{W}$) y Burdeos (B: $\varphi = 45,5^\circ\text{N}$, $\lambda = 001,5^\circ\text{W}$) en una proyección gnomónica horizontal.</i>	178
<i>Figura 3.1.12. Medición de la distancia ortodrómica por diferencia de longitudes en una proyección gnomónica horizontal.</i>	181
<i>Figura 3.1.13. Medida de la distancia ortodrómica entre Strait of Belle Isle y Inishtrahull sobre una carta gnomónica polar.</i>	182
<i>Figura 3.1.14. Medida de la distancia ortodrómica entre Strait of Belle Isle y Inishtrahull sobre una carta gnomónica polar (método del ábaco).</i>	183
<i>Figura 3.1.15. Determinación del rumbo inicial de la ortodrómica entre Norfolk y Burdeos con ayuda de un diagrama auxiliar en una proyección gnomónica.</i>	185
<i>Figura 3.1.16. Representación de una ortodrómica en una proyección estereográfica con centro en: $\varphi_0 = 20^\circ\text{N}$, $\lambda_0 = 020^\circ\text{W}$.</i>	186
<i>Figura 3.1.17. Trazado de un rumbo ortodrómico entre los puertos de Norfolk y Burdeos sobre una proyección cónica conforme de Lambert.</i>	187
<i>Figura 4.2.1. Entramado de una proyección de Mercator.</i>	204
<i>Figura 4.2.2. Entramado de una proyección transversa de Mercator y de una proyección de Mollweide.</i>	205

<i>Figura 4.2.3. Entramados de una proyección cónica conforme de Lambert con paralelos estándar 30°N y 60°N.....</i>	<i>206</i>
<i>Figura 4.2.4. Entramados de mapamundis en las proyecciones gnomónica, estereográfica, ortográfica y acimutal equidistante</i>	<i>207</i>
<i>Figura 4.2.5. Entramados del Pacífico en las proyecciones gnomónica, estereográfica, ortográfica y acimutal equidistante en su aspecto transverso</i>	<i>208</i>
<i>Figura 4.2.6. Entramados de la zona de las Islas Aleutianas y el Estrecho de Bering en las proyecciones gnomónica, estereográfica, ortográfica y acimutal equidistante en su aspecto polar...</i>	<i>209</i>
<i>Figura 4.2.7. Entramados de la zona de las Islas Aleutianas y el Estrecho de Bering en las proyecciones de Mercator, transversa de Mercator y Mollweide.....</i>	<i>210</i>
<i>Figura 4.3.1. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección de Mercator.....</i>	<i>212</i>
<i>Figura 4.3.2. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección de Estereográfica con centro en $\phi_0=00^\circ$ y $\lambda_0=000^\circ$ (a) y con centro en Burdeos (b)</i>	<i>212</i>
<i>Figura 4.3.3. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección transversa de Mercator con el meridiano de Greenwich como estándar (a) y con la longitud de Norfolk como meridiano estándar (b).....</i>	<i>213</i>
<i>Figura 4.3.4. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección cónica conforme de Lambert con paralelo estándar 20°N (a) y paralelo estándar 80°N (b).....</i>	<i>214</i>
<i>Figura 4.3.5. Comparación de las proyecciones acimutales equidistante, estereográfica, gnomónica y ortográfica, en su aspecto polar y a una misma escala.</i>	<i>215</i>
<i>Figura 4.3.6. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección de Mollweide con meridiano central el de Greenwich.</i>	<i>216</i>
<i>Figura 4.4.1. Loxodrómica sobre una proyección de Mercator entre los paralelos de 80° N y 80° S.....</i>	<i>220</i>
<i>Figura 4.4.2. Ortodrómica sobre una proyección de Mercator entre los paralelos de 80° N y 80° S.....</i>	<i>223</i>
<i>Figura 4.4.3. Representación de la loxodrómica en una proyección gnomónica horizontal con centro en: $\phi_0 = 30^\circ$ N, $\lambda_0 = 30^\circ$ W.....</i>	<i>226</i>
<i>Figura 4.4.4. Representación de la loxodrómica en una proyección gnomónica polar con centro en: $\phi_0 = 90^\circ$ N.</i>	<i>228</i>
<i>Figura 4.4.5. Representación de la loxodrómica en una proyección gnomónica transversa con centro en: $\phi_0 = 00^\circ$, $\lambda_0=000^\circ$.</i>	<i>230</i>
<i>Figura 4.4.6. Representación de la ortodrómica en una proyección gnomónica horizontal con centro en: $\phi_0 = 30^\circ$ N, $\lambda_0 = 30^\circ$ W.....</i>	<i>234</i>
<i>Figura 4.4.7. Representación de la ortodrómica en una proyección gnomónica polar con centro en: $\phi_0 = 90^\circ$ N.</i>	<i>236</i>
<i>Figura 4.4.8. Representación de la ortodrómica en una proyección gnomónica transversa con centro en: $\phi_0 = 00^\circ$ y $\lambda_0= 000^\circ$.</i>	<i>237</i>

<i>Figura 4.4.9. Representación de la loxodrómica en una proyección estereográfica horizontal con centro en: $\phi_0 = 30^\circ N$, $\lambda_0 = 030^\circ W$.</i>	240
<i>Figura 4.4.10. Representación de la loxodrómica en una proyección estereográfica polar con centro en: $\phi_0 = 90^\circ N$.</i>	242
<i>Figura 4.4.11. Representación de la loxodrómica en una proyección estereográfica transversa con centro en: $\phi_0 = 00^\circ$, $\lambda_0 = 000^\circ$.</i>	244
<i>Figura 4.4.12. Representación de la ortodrómica en una proyección estereográfica horizontal con centro en: $\phi_0 = 30^\circ N$, $\lambda_0 = 030^\circ W$.</i>	248
<i>Figura 4.4.13. Representación de la ortodrómica en una proyección estereográfica horizontal con centro en Burdeos: $\phi_0 = 45^\circ 30' N$, $\lambda_0 = 001^\circ 30' W$.</i>	249
<i>Figura 4.4.14. Representación de la loxodrómica en una proyección estereográfica polar con centro en: $\phi_0 = 90^\circ N$.</i>	251
<i>Figura 4.4.15. Representación de la ortodrómica en una proyección estereográfica transversa con centro en: $\phi_0 = 00^\circ$, $\lambda_0 = 000^\circ$.</i>	253
<i>Figura 4.4.16. Derrota loxodrómica sobre una proyección cónica conforme de Lambert, con paralelo estándar $60^\circ N$.</i>	256
<i>Figura 4.4.17. Derrota loxodrómica sobre una proyección cónica conforme de Lambert, con paralelo estándar $10^\circ N$.</i>	257
<i>Figura 4.4.18. Derrota ortodrómica sobre una proyección cónica conforme de Lambert, con paralelo estándar de $60^\circ N$.</i>	259
<i>Figura 4.4.19. Derrota ortodrómica sobre una proyección cónica conforme de Lambert, con paralelo estándar de $10^\circ N$.</i>	260
<i>Figura 4.4.20. Derrota loxodrómica sobre una proyección transversa de Mercator.</i>	262
<i>Figura 4.4.21. Derrota ortodrómica sobre una proyección transversa de Mercator.</i>	264
<i>Figura 4.4.22. Representación de la loxodrómica en una proyección ortográfica horizontal con centro en: $\phi_0 = 30^\circ N$, $\lambda_0 = 30^\circ W$.</i>	266
<i>Figura 4.4.23. Representación de la loxodrómica en una proyección ortográfica polar con centro en: $\phi_0 = 90^\circ N$.</i>	268
<i>Figura 4.4.24. Representación de la loxodrómica en una proyección ortográfica transversa con centro en: $\phi_0 = 00^\circ$, $\lambda_0 = 000^\circ$.</i>	270
<i>Figura 4.4.25. Representación de la ortodrómica en una proyección ortográfica horizontal con centro en: $\phi_0 = 30^\circ N$, $\lambda_0 = 30^\circ W$.</i>	272
<i>Figura 4.4.26. Representación de la ortodrómica en una proyección ortográfica polar con centro en: $\phi_0 = 90^\circ N$.</i>	274
<i>Figura 4.4.27. Representación de la ortodrómica en una proyección ortográfica transversa con centro en: $\phi_0 = 00^\circ$ y $\lambda_0 = 000^\circ$.</i>	275
<i>Figura 4.4.28. Representación de la loxodrómica en una proyección acimutal equidistante horizontal con centro en Norfolk.</i>	279

<i>Figura 4.4.29. Representación de la loxodrómica en una proyección acimutal equidistante polar con centro en: $\varphi_o = 90^\circ N$.</i>	281
<i>Figura 4.4.30. Representación de la loxodrómica en una proyección horizontal equidistante transversa con centro en: $\varphi_o = 00^\circ$, $\lambda_o = 000^\circ$.</i>	283
<i>Figura 4.4.31. Representación de la ortodrómica en una proyección acimutal equidistante horizontal con centro en Norfolk.</i>	285
<i>Figura 4.4.32. Representación de la ortodrómica en una proyección acimutal equidistante horizontal con centro en: $\varphi_o = 30^\circ N$, $\lambda_o = 30^\circ W$.</i>	286
<i>Figura 4.4.33. Representación de la ortodrómica en una proyección acimutal equidistante polar con centro en: $\varphi_o = 90^\circ N$.</i>	288
<i>Figura 4.4.34. Representación de la ortodrómica en una proyección acimutal equidistante transversa con centro en: $\varphi_o = 00^\circ$ y $\lambda_o = 000^\circ$.</i>	290
<i>Figura 4.4.35. Derrota loxodrómica sobre una proyección de Mollweide con meridiano central: $\lambda = 000^\circ$.</i>	292
<i>Figura 4.4.36. Derrota ortodrómica sobre una proyección de Mollweide con meridiano central: $\lambda = 000^\circ$.</i>	293
<i>Figura 4.4.37. Derrota loxodrómica (color verde) y ortodrómica (color azul) sobre una proyección de Mercator entre los paralelos de $70^\circ N$ y $70^\circ S$ y centrada en $\lambda = 150^\circ W$.</i>	294
<i>Figura 4.4.38. Derrota loxodrómica (color verde) y ortodrómica (color azul) sobre una proyección de Mollweide centrada en $\lambda = 150^\circ W$.</i>	294
<i>Figura 4.4.39. Derrota loxodrómica (color verde) y ortodrómica (color azul) sobre una proyección de gnomónica centrada en: $\varphi_o = 30^\circ N$, $\lambda_o = 150^\circ W$.</i>	295
<i>Figura 4.4.40. Derrota loxodrómica (color verde) y ortodrómica (color azul) sobre las proyecciones estereográfica, ortográfica y acimutal equidistante centrada en $\varphi_o = 10^\circ N$ y $\lambda_o = 150^\circ W$.</i>	296
<i>Figura 4.4.41. Derrota loxodrómica (color verde) y ortodrómica (color azul) sobre una proyección cónica conforme de Lambert, con paralelo estándar $45^\circ N$.</i>	297
<i>Figura 4.4.42. Derrota loxodrómica (color verde) y ortodrómica (color azul) sobre una proyección cónica conforme de Lambert, con paralelo estándar $10^\circ N$.</i>	298
<i>Figura 4.4.43. Derrota loxodrómica (color verde) y ortodrómica (color azul) sobre una proyección transversa de Mercator, con meridiano central $150^\circ W$.</i>	299

INDICE DE ABREVIATURAS

1. ACRÓNIMOS

CAD	Computer-Aided Design
ECDIS	Electronic Chart Display and Information System
ENC	Electronic Nautical Chart
GIS	Geographic Information System
GPS	Global Positioning System
IMO	International Maritime Organization
IHO	International Hydrographic Organization
MSC	Maritime Safety Committee
SOLAS	Safety of Life at Sea
SPSS	Statistical Package for the Social Sciences
UPS	Universal Polar Stereographic
USCG	United States Coast Guard
UTM	Universal Transverse Mercator

2. CASTELLANO MAYÚSCULAS

A, B, C, D, ...	Puntos sobre la esfera ¹ .
A', B', C', D'...	Puntos sobre el plano de proyección, transformados de A, B, C, D..., respectivamente ² .
A'', B'', C'', D''...	Puntos sobre el plano de proyección abatidos (abatimiento de A', B', C', D'..., respectivamente ³).
A	Apartamiento. Módulo de deformación angular.
A _{max}	Valor máximo que puede alcanzar el módulo de deformación angular.
A _o	Alteración que sufre en la carta el ángulo formado por el meridiano y el paralelo en la superficie terrestre.
C	Constante. Punto sobre la esfera, en particular centro geométrico de la misma.

¹ En general, y debido a la complejidad de algunas de las figuras que se representan a lo largo de la presente Tesis, las letras mayúsculas del alfabeto castellano sirven para designar puntos sobre la superficie de referencia (esfera), aunque algunas de ellas posean otro significado en diferentes contextos.

² En general, los puntos en el plano de proyección se designan con la misma letra que sus homólogos en la superficie de referencia, más un apóstrofe.

³ Un apóstrofe doble indica, en general, abatimiento.

D	Distancia sobre la esfera. En las proyecciones perspectivas, distancia del punto de vista al centro geométrico de la superficie de referencia.
Dn	Distancia navegada por loxodrómica.
Do	Distancia ortodrómica.
E, F, G	Coefficientes de la primera ecuación cuadrática fundamental de $d\varphi$ y $d\lambda$.
EP	Escala principal.
ER	Escala real.
FE	Factor de escala.
I	Punto intermedio de una derrota ortodrómica.
K	Constante. Módulo de deformación lineal.
K_{\max}	Valor máximo que puede alcanzar el módulo de deformación lineal.
L	En la proyección de mercator, longitud de un grado de arco de meridiano (en milímetros).
N	Gran normal o normal principal.
N, N'	Nodos de la ortodrómica.
N_C	Norte de la cuadrícula.
N_V	Norte verdadero.
O	Punto origen.
O'	Punto origen proyectado.
P, P'	Polos de la esfera terrestre.
Q, Q'	Ecuador de la esfera terrestre.
R	Rumbo. De forma genérica, radio de la esfera terrestre.
T	Punto de tangencia o centro de la proyección.
U	En la proyección de mercator, longitud de un grado de arco de ecuador (en milímetros).
U, U'	Ángulos, en la superficie de referencia y en el plano de proyección respectivamente, correspondientes a los valores de los ángulos u y u' , para la máxima alteración angular.
V, V'	Vértices (de la ortodrómica o de un sistema proyectivo).

3. CASTELLANO MINÚSCULAS

a, b	Semieje mayor y semieje menor de la elipse meridiana.
a', b'	Módulos de deformación lineal en las direcciones principales ξ y η de la elipse indicatriz de Tissot.
d	De forma general, distancia sobre el mapa o plano.

$d\mu$	Elemento de arco diferencial de la transformada de meridiano.
$d\tau$	Elemento de arco diferencial de la transformada de paralelo.
$d\phi$	Incremento diferencial de latitud.
$d\lambda$	Incremento diferencial de longitud.
dA	Incremento diferencial de apartamiento.
ddn	Incremento diferencial de distancia navegada por loxodrómica.
dn	Distancia navegada por loxodrómica.
dS	Elemento diferencial de superficie sobre la esfera de referencia.
ds'	Elemento lineal diferencial en el plano de proyección.
ds	Elemento lineal diferencial sobre la esfera de referencia.
dS'	Elemento diferencial de superficie en el plano de proyección.
ds_T	Elemento lineal diferencial sobre la superficie terrestre.
e	Escala real a lo largo de la representada del ecuador en la proyección de Mercator (escala ecuatorial).
e	Excentricidad de la elipse meridiana.
k, h	Módulos de deformación lineal a lo largo de los paralelos y meridianos respectivamente.
k, n	Números enteros.
k_a, h_v	Módulos de dilatación lineal a lo largo de los almicantarats y verticales respectivamente.
k_o	Factor de escala en el centro de la proyección.
m	Pendiente de una recta.
n	Ordenada en el origen de una recta.
r	Radio de la esfera de referencia. Sobre la esfera terrestre radio de curvatura de un paralelo.
r_e	Radio ecuatorial sobre el plano.
r_o	Radio del paralelo de referencia.
r_p	Radio de un paralelo genérico.
s, t	Lados de un triángulo esférico.
u	Ángulo entre dos elementos diferenciales en la superficie de referencia.
u'	Ángulo entre dos elementos diferenciales en proyección (transformado del ángulo u).
(x, y)	Coordenadas cartesianas ortogonales en el plano.
(x, y, z)	Coordenadas cartesianas ortogonales en el espacio.

(x_0, y_0)	Coordenadas cartesianas ortogonales en el plano de proyección del punto de corte de una derrota loxodrómica con el ecuador.
(x_A, y_A)	Coordenadas cartesianas ortogonales en el plano de un punto A.
(x_A, y_A, z_A)	Coordenadas cartesianas ortogonales en el espacio de un punto A.

4. GRIEGO MAYÚSCULAS

Δ	Plano de desvanecimiento.
$\Delta\varphi$	Diferencia de latitud entre dos puntos.
$\Delta\lambda$	Diferencia de longitud entre dos puntos.
$\Delta\lambda_{o0}$	Diferencia de longitud entre el centro de proyección y el punto de corte de la derrota loxodrómica con el ecuador ($\Delta\lambda_{o0} = \lambda_0 - \lambda_o$).
Φ	Latitud isométrica.

5. GRIEGO MINÚSCULAS

α	Longitud del nodo de la ortodrómica (también λ_N). De forma genérica, designación de ángulo. Aplanamiento de la elipse meridiana.
α'	Designación de ángulo en proyección.
β	Ángulo de inclinación del plano de una ortodrómica con el del ecuador.
δ	Ángulo auxiliar.
ε	Ángulo auxiliar.
ϕ, Z	Coordenadas polares en la esfera de referencia (distancia angular al centro de la proyección y acimut, respectivamente).
γ	Ángulo formado entre dos círculos máximos de la esfera.
φ	Latitud geodésica.
φ_a	Latitud aumentada.
φ_A, φ_B	Latitudes de los puntos A y B.
$\varphi_{aA}, \varphi_{aB}$	Latitudes aumentadas de los puntos A y B.
φ_m	Latitud media.
φ_o, λ_o	Coordenadas del punto de intersección de la perpendicular al plano del cuadro por el centro de la esfera con la superficie de ésta más próxima a dicho plano. En el caso de ser el plano tangente a la esfera, dicho punto coincidirá con el de tangencia.
λ	Longitud geodésica.
λ_0	Longitud del punto de corte de una derrota loxodrómica con el ecuador.
λ_A, λ_B	Longitudes de los puntos A y B.

π	Plano del cuadro.
θ	Ángulo. Convergencia de meridianos en proyecciones cónicas. Ángulo entre un paralelo y un meridiano en el plano de proyección en proyecciones no cónicas.
ρ	Radio de curvatura. En particular, cuando se hace referencia al elipsoide de revolución, designaría el radio de curvatura de la elipse meridiana.
ρ, Z'	Coordenadas polares en el plano de proyección (transformadas de ϕ, Z).
σ	Ángulo auxiliar. Módulo de deformación superficial.
ξ, η	Direcciones ortogonales en la superficie de referencia.
ξ', η'	Direcciones principales de la elipse indicatriz de Tissot, ortogonales en el plano de proyección (transformadas de ξ, η).
∞	Infinito.

CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

1. PLANTEAMIENTO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. MARCO REFERENCIAL

1.1.1. Introducción

Un tema de investigación debe colmar totalmente las necesidades, exigencias y deseos del investigador, por ello él es el más indicado para realizar la elección de mismo, que debe recaer en aspectos específicos y problemáticas concretas. Los principales factores subjetivos que intervienen en el proceso de elección son la afición personal y la preparación o aptitud. En cuanto a los factores objetivos, cuentan sobre todo los medios bibliográficos y en especial las posibilidades de la documentación o las fuentes en general.

Actualmente, los Sistemas de Información y Visualización de Carta Electrónica (ECDIS¹) están desplazando a las cartas impresas a bordo de los buques. En un ECDIS la metodología de trabajo cambia radicalmente frente a la tradicional. Ya no prima la sencillez de trazado de la derrota, ni la facilidad para medir posiciones, rumbos y distancias, ya que todas estas operaciones las realiza el propio sistema. Teniendo en cuenta además que el ECDIS no solo es un sustituto a las cartas de papel, sino una interface gráfica para la integración y control de todos los sistemas de navegación del puente, debería replantearse por qué sigue empleándose en la representación de cartas de navegación la proyección de Mercator.

Ante la inminente desaparición de la cartografía impresa a bordo de los buques, es necesario realizar un análisis crítico sobre la supremacía de la proyección de Mercator en la representación de cartas de navegación electrónica, estableciendo nuevos criterios para la elección de proyecciones cartográficas diferentes en función de la finalidad, tanto particular como general, perseguida y proponiendo proyecciones alternativas que puedan resultar de mayor utilidad práctica.

Queda acotado pues el objeto de estudio e investigación de esta tesis en una doble vertiente. Por un lado se busca establecer las características deseables para toda proyección cartográfica cuyo propósito sea crear una representación de carta náutica electrónica, particularizándolas en función de la finalidad buscada. Por otra parte se propone y estudia la viabilidad del uso de las proyecciones cartográficas que mejor se ajusten a los requisitos establecidos.

Dada la trascendencia del tema, se ha adoptado como foco central de la Tesis: “PROPUESTA DE CRITERIOS Y ALTERNATIVAS PARA LA ELECCIÓN DE PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS DIFERENTES A LA DE MERCATOR EN LA ELABORACIÓN DE CARTAS ELECTRÓNICAS DE NAVEGACIÓN”.

El análisis de la problemática en profundidad, abarcando todos los fenómenos que intervienen en las operaciones básicas que realiza el marino sobre la carta electrónica, deja palpable la controversia sobre la posible elección de una o varias proyecciones cartográficas óptimas en la producción de cartografía náutica electrónica.

¹ Realmente el acrónimo español de Sistema de Información y Visualización de Carta Electrónica es SIVCE, pero su escaso uso hace recomendable referirse a estos sistemas por su acrónimo anglosajón ECDIS (Electronic Chart Display and Information System), internacionalmente reconocido.

1.1.2. Estado actual del conocimiento e hipótesis de partida

En la actualidad, se encuentran analizados, desde el punto de vista de la cartografía, un gran número de sistemas proyectivos, tanto geométricos como analíticos, aunque la particularización de estos para la problemática náutica se ve reducido de forma casi exclusiva a la proyección de Mercator, y a ciertos aspectos de la proyección gnomónica relacionados con la navegación por ortodrómica.

El predominio de la proyección de Mercator en la producción y representación de cartas náuticas, tanto impresas como electrónicas, ha hecho que el estado actual de las investigaciones y desarrollo de la técnica referente al problema cartográfico, en el contexto de la cartografía electrónica, se encuentre prácticamente reducido a nuevos sistemas de representación visual, aplicaciones y tratamiento de datos, encontrándose estancado el estudio de la problemática relacionada con la elección de sistemas de proyección alternativos.

Partiendo de las bases establecidas, la presente investigación se orienta en el sentido de buscar proyecciones cartográficas, alternativas a la de Mercator, que permitan al marino asimilar e interactuar con facilidad con los datos presentados sobre la pantalla de un ECDIS.

Para ello es necesario planificar una actuación generalizada en el marco del estado del conocimiento en un doble sentido:

- Describir y analizar las proyecciones cartográficas seleccionadas y sus características fundamentales, para identificar aquellas que puedan resultar de utilidad, permitiendo el contraste en su valoración final.
- Analizar de forma comparativa la metodología clásica de trabajo sobre las cartas de navegación impresas y la correspondiente a las cartas de navegación electrónica, con el fin de identificar y ordenar las características que debiera cumplir toda representación cartográfica en cada uno de estos medios.

Es necesario, por lo tanto, el establecimiento de una base conceptual adecuada para impulsar la nueva orientación. Para ello es preciso caracterizar totalmente el comportamiento de los diferentes factores que intervienen analizando su influencia y sometiendo el conjunto a un contraste real que comprenda casos representativos.

Como hipótesis de partida se propone el estudio de toda la casuística considerando una superficie terrestre de referencia esférica, ya que esto no influirá en los resultados globales que se obtengan, salvo en la proyección Mercator, en la cual resulta también de interés el estudio sobre una superficie de referencia elipsoidal.

1.2. METODOLOGÍA

La investigación científica, desde Galileo y Newton, ha seguido el siguiente esquema secuencial y lógico:

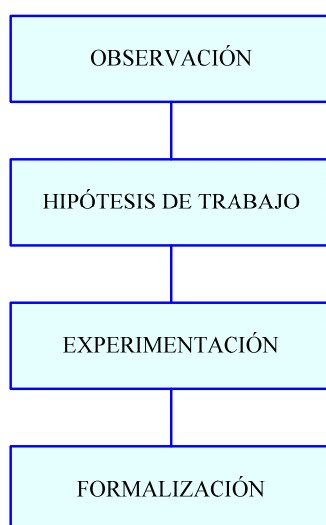


Figura 1.2.1. Esquema secuencial y lógico de la investigación científica.

La interacción entre sujeto (investigador) y objeto (fenómeno investigado), necesita la presencia de los mecanismos de transmisión adecuados que, en parte, hipotecan el valor global del conocimiento.

La implantación de una correcta metodología, como elemento guía en el trabajo científico, es la primera labor del investigador, configurando de esta forma el marco soporte durante todo el proceso.

El contenido de la presente investigación precisaba de un soporte metodológico operativo, capaz de orientar el proceso por los cauces necesarios para constituir y establecer las conclusiones finales.

La metodología utilizada en la presente Tesis Doctoral, y que en forma esquemática se reproduce en el gráfico de la figura 1.2.2, responde a las exigencias de las investigaciones de contenido tecnológico de índole evolutivo, que en este caso presupone el establecimiento compacto de cuatro bloques cerrados pero interactivos entre sí. El primero es teórico y referencial y en él se vuelca todo el conocimiento necesario para el enganche posterior. En la base referencial así configurada se estructuran las proyecciones cartográficas siguiendo la clasificación según la superficie proyectiva sea un cilindro, un cono o un plano, considerando como hipótesis de partida un modelo de Tierra esférico, salvo la proyección de Mercator que se considera también un modelo de Tierra elipsoidal.

El segundo bloque se centra en aunar el análisis y establecimiento de los requisitos a cumplir por toda carta de navegación, tanto desde el punto de vista tradicional de la cartografía impresa como de la electrónica.

En el tercer bloque se centra el campo de estudio en la investigación de la búsqueda de proyecciones alternativas a la de Mercator en la representación de cartas de navegación electrónica, tanto para fines generales como particulares. En este bloque, a medida que se van proponiendo y analizando alternativas, se realiza la revisión del primero, introduciendo en él el necesario estudio teórico de las proyecciones propuestas.

En el cuarto bloque se realiza el contraste de los resultados teóricos obtenidos en el tercero, mediante un estudio de campo.

A partir de los resultados obtenidos se establecen las conclusiones y se orienta hacia futuras líneas en la investigación.

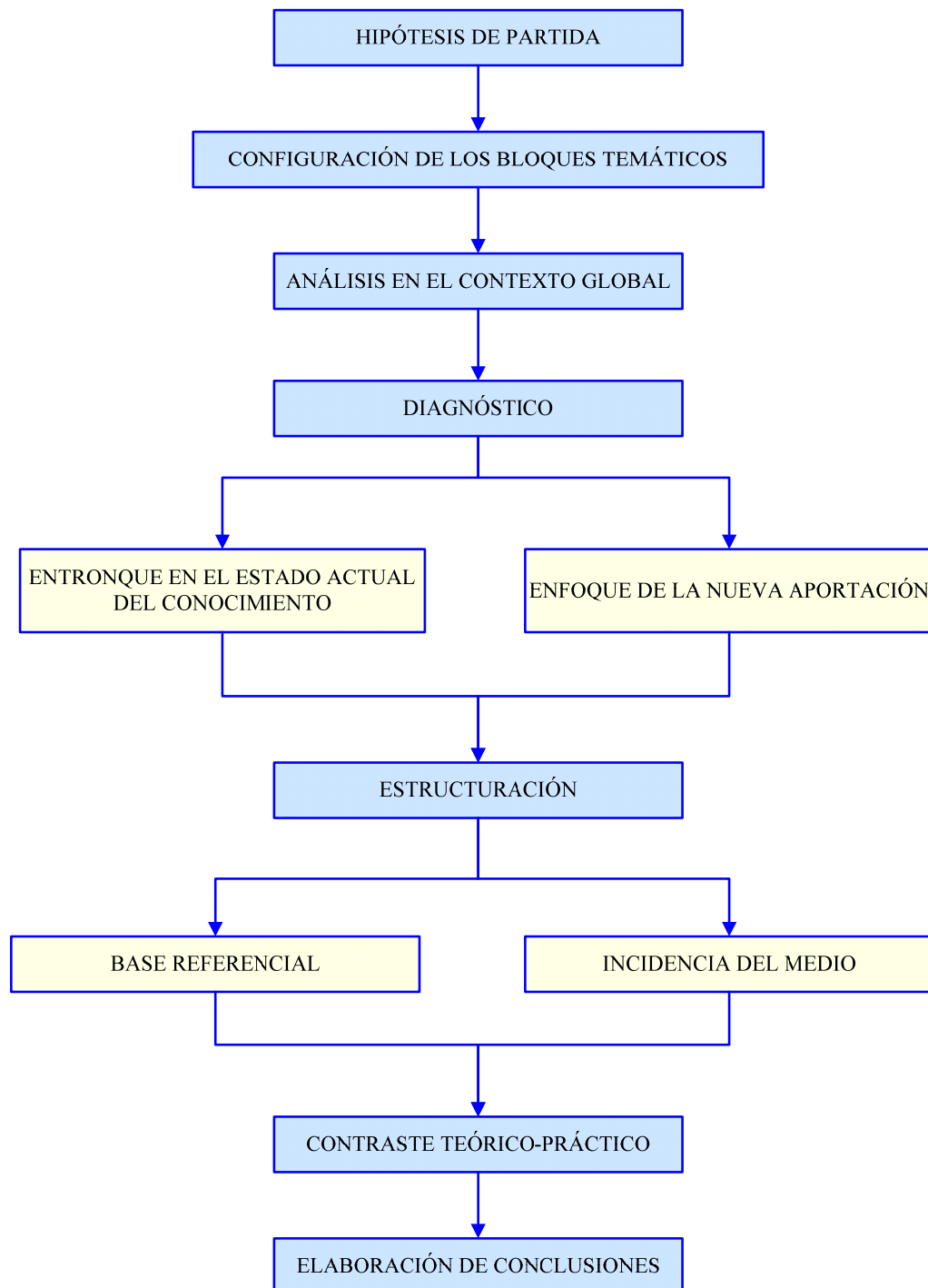


Figura 1.2.2. Metodología empleada en la presente Tesis Doctoral.

1.3. PROCESO DE ELABORACIÓN

1.3.1. Preparación, recopilación del material y análisis individualizado

Elegido el tema libremente, se optó por realizar una intensificación programada de la lectura de monografías y bibliografía especializada que existen en diversas bibliotecas, así como consultas a través de la red de artículos científicos sobre el tema. Tras su lectura y análisis se iban confeccionando fichas

referenciales bibliográficas y preparando aquellos artículos de interés que se encontraban adscritos al texto.

Todas las fases de la investigación han quedado anotadas en un diario, ya que desde que fue analizado el primer texto hasta que se concluyó el último, se han ordenado de forma cronológica y temática, en carpetas independientes, con lo cual se ha configurado un bloque compacto fácilmente reproducible.

La llegada de la documentación fue dispar y fue preciso realizar una primera criba para seleccionar entre el material, aquella información que no guardaba una relación afín, o bien no presentaba un contenido de interés específico y calidad contrastada.

Una vez realizada la totalidad de la “marcha bibliográfica”, se procedió a estudiar detenidamente los textos, transcribiendo lo esencial de los mismos, traduciendo los extranjeros, completando las fichas bibliográficas y caracterizando las fuentes, configurando de cada autor las fuentes directas, para disponer así de dos tipos de referencias: directas e indirectas.

Tras elaborar los bloques temáticos y caracterizar los enlaces básicos entre ellos, se procedió a elaborar el bloque central individualizado de la investigación.

1.3.2. Elaboración pormenorizada

La elaboración de la Tesis, se realizó en dos etapas claramente diferenciadas.

En la primera etapa se confeccionaron los guiones y se procedió al encaje de los primeros artículos de los diferentes capítulos. Para el diseño de los guiones, se procedió del siguiente modo:

- Tras un repaso pormenorizado de todo el material analizado, se ha buscado el detalle más significativo del bloque individualizado.
- Posteriormente se establecieron los cuadros sinópticos, en los que aparecían resumidas las partes esenciales de los textos.

Tras la asignación correspondiente guión/contenido, se procedió a ejecutar la última parte del trabajo.

Simultáneamente se realizó un doble estudio:

- Analizar los diferentes elementos que enlazaban de forma directa con la información que fue apareciendo en la documentación consultada, transcribiendo su intervalo de validez y comprobando el rango de variabilidad.
- Para poder valorar la total incidencia de los parámetros que intervienen y contrastar la información existente, se realizó un estudio de campo a través de una encuesta alojada en una página web.

Tras los resultados obtenidos, se pudieron obtener las primeras conclusiones y se comenzó a redactar el texto definitivo. En los gráficos adjuntos se indican esquemáticamente los pasos más significativos y las etapas del proceso de elaboración de la Tesis Doctoral.

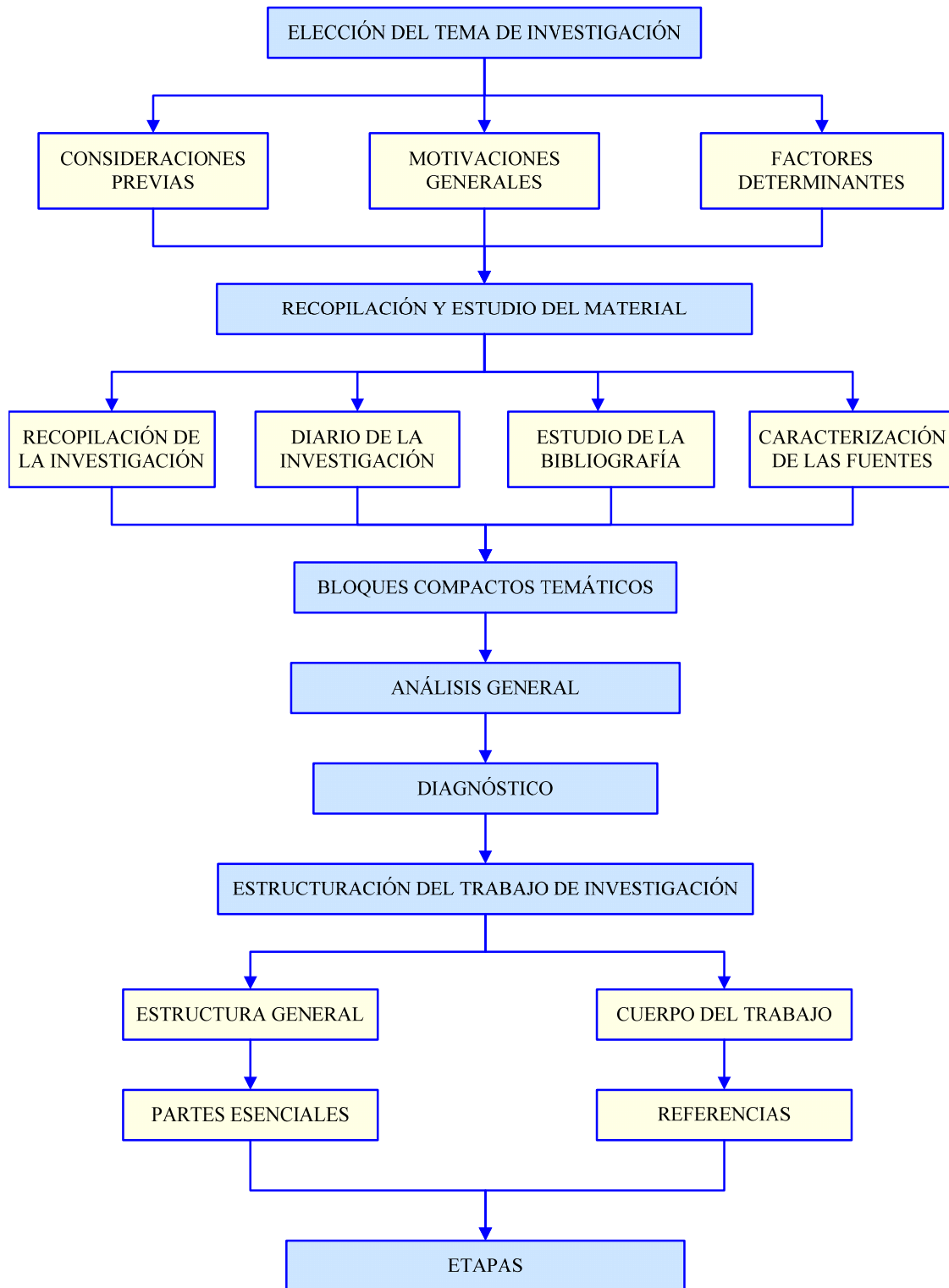


Figura 1.3.1. Pasos significativos en el proceso de elaboración de la Tesis Doctoral.

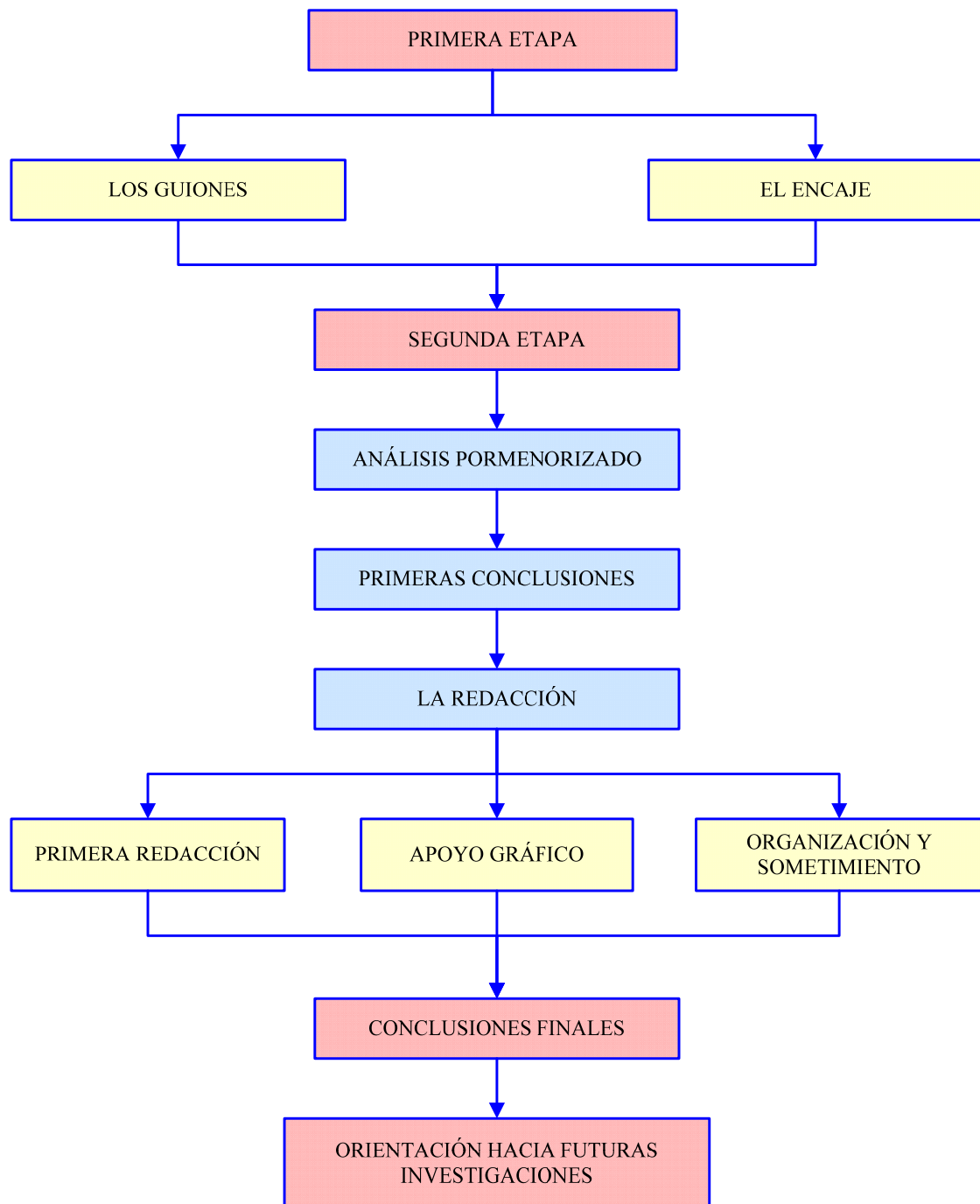


Figura 1.3.2. Etapas en el proceso de elaboración de la Tesis Doctoral.

1.4. CONTENIDO

Atendiendo al esquema metodológico establecido, la presente Tesis Doctoral se articula en seis capítulos:

- I. PLANTEAMIENTO GENERAL DE LA INVESTIGACION.
- II. PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS DE UTILIDAD PARA LA REPRESENTACIÓN DE CARTAS NÁUTICAS ELECTRÓNICAS.
- III. ANÁLISIS Y ESTABLECIMIENTO DE LOS REQUISITOS A CUMPLIR POR UNA CARTA DE NAVEGACIÓN.
- IV. PROPUESTA Y ANÁLISIS DE PROYECCIONES ALTERNATIVAS A LA DE MERCATOR PARA LA REPRESENTACIÓN DE CARTAS DE NAVEGACIÓN ELECTRÓNICA.
- V. CONTRASTE DE RESULTADOS TEÓRICOS MEDIANTE UN ESTUDIO DE CAMPO.
- VI. CONCLUSIONES Y DIRECTRICES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES.

El primer Capítulo recoge una introducción general, estableciendo los aspectos adicionales, pero necesarios, como las características básicas de la investigación, la génesis del tema elegido, los límites referenciales de la problemática, así como la metodología a seguir.

El Capítulo segundo está dedicado al estudio teórico de las proyecciones cartográficas que a priori resultan de interés por ser las actualmente conocidas en cartografía impresa tanto en navegación marítima como aérea. Estas se amplían con las proyecciones propuestas en el Capítulo cuarto, estableciéndose de este modo una retroalimentación entre ambos.

En el Capítulo tercero se establecen las características generales y específicas que debe cumplir toda representación de carta de navegación, tanto impresa como electrónica.

En el Capítulo cuarto se parte de las características establecidas en el tercero, y se identifican aquellas proyecciones cartográficas que mejor las representan. Con ellas se realiza la proposición de proyecciones que puedan servir de alternativa a la de Mercator en la representación de las cartas de navegación electrónica. Para el establecimiento de un orden jerárquico entre las proyecciones propuestas, y con el fin de evaluar de forma teórica la viabilidad de su aplicación práctica, se realiza un estudio comparativo de estas, entre sí y respecto a los estándares de Mercator y gnomónica. Este estudio se centra en el análisis de deformaciones, configuración de entramado y representación de derrotas.

En el Capítulo quinto se contrastan los resultados teóricos obtenidos hasta ese momento, mediante un estudio de campo, consistente en una encuesta dirigida a la población de usuarios de cartografía náutica. Los datos obtenidos son analizados estadísticamente y discutidos desde el enfoque de la investigación previa.

Finalmente, en el Capítulo sexto se presentan las conclusiones de la investigación realizada, proponiendo nuevas líneas de investigación que continúen el camino emprendido.

A lo largo del texto aparecen las referencias bibliográficas más significativas y se intercalan figuras en su momento o, en algunos casos, en la página inmediatamente siguiente, con el fin de dotar de una mayor claridad al conjunto, incluyendo también la correspondiente referencia, en caso de no ser de autoría propia. Debido a la materia objeto de esta tesis, las figuras adquieren un valor relevante y por ello se utilizan con gran profusión allí donde se considera conveniente. Prácticamente todas ellas han

sido elaboradas con los programas informáticos “ArcGIS for Desktop Advanced”, versión 10.3 y con “Autocad 2010”. En ocasiones, fue necesario recurrir adicionalmente al uso del programa “MicroCAM for Windows” para realizar construcciones en “Autocad” con mapas, ya que las salidas de datos geográficos en formato vectorial que proporcionaba “ArGIS” eran demasiado grandes, haciendo que el mencionado programa de diseño asistido por computadora no se ejecutara de forma fluida.

En el estudio de campo, para todo el trabajo de análisis estadístico, se ha empleado el programa “IBM SPSS Statistics”, en su versión 22.0.

En el establecimiento de expresiones numéricas o paramétricas se ha preferido indicar la clarificación de la simbología utilizada, con el fin de hacer más comprensible el texto, para lo cual se introduce un índice general de las expresiones simbólicas empleadas en el presente trabajo de investigación.

De igual modo, se introduce un índice general de los apoyos gráficos ilustrativos, que facilite al lector una visión general de los mismos; así como un índice de palabras que le permita ubicar con rapidez las páginas del trabajo realizado donde se trate un determinado tema.

Por último, y como es de rigor, se incluye la relación alfabética de autores de la Bibliografía consultada para llevar a buen término este trabajo.

CAPÍTULO II. PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS DE UTILIDAD PARA LA REPRESENTACIÓN DE CARTAS NÁUTICAS ELECTRÓNICAS

2. PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS DE UTILIDAD PARA LA REPRESENTACIÓN DE CARTAS NÁUTICAS ELECTRÓNICAS

2.1. INTRODUCCIÓN

La cartografía surge de la necesidad que tiene el hombre de representar de forma gráfica la configuración de la superficie terrestre sobre una superficie plana². Este tipo de representaciones reciben la denominación genérica de cartas geográficas o mapas³.

Centrándose en la navegación marítima, campo de estudio, una carta de navegación marítima se puede definir como un mapa específicamente destinado a satisfacer requerimientos de navegación marítima, indicando las profundidades del agua, naturaleza del fondo, detalles de la costa, peligros y ayudas a la navegación. A bordo de los buques las cartas náuticas constituyen una herramienta imprescindible para poder realizar una navegación segura.

2.2 RESEÑA HISTÓRICA

Las primeras representaciones cartográficas, que se emplearon en navegación y de las que se tiene noticia, aparecen en civilizaciones muy primitivas. Cuando los navegantes del siglo XVIII llegaron a las islas del Pacífico, descubrieron que sus habitantes se encontraban en un estado cultural muy primitivo, análogo al que pudieron haber tenido cientos e incluso miles de años antes, pero mostraban, sin embargo, técnicas de navegación muy avanzadas, que les permitían realizar viajes a distancias enormes⁴. En concreto, los indígenas de las islas Marshall empleaban representaciones esquemáticas de su entorno para orientarse en las navegaciones interinsulares. Éstas, a falta de papel o cualquier otro medio sobre el que dibujar, estaban confeccionadas por un armazón de cañas atadas con fibras de palma, sobre las cuales se disponían una serie de pequeñas conchas representando las islas y los arrecifes⁵. A su vez, el enrejado de fibras se componía de una retícula ortogonal, que representaba el mar libre, y que servía de soporte a las conchas y a una serie de cañas curvadas, que indicaban las corrientes y los frentes de olas predominantes cerca de las islas⁶.

² En sentido estricto, pueden realizarse representaciones cartográficas sobre superficies distintas a un plano, como pueden ser globos o modelos del terreno tridimensionales. Sin embargo, los mapas así realizados representan un porcentaje muy inferior al uno por ciento de la producción cartográfica mundial, ya que para la gran mayoría de los trabajos es más conveniente la representación plana, bien sobre un soporte de papel o sobre la pantalla de un monitor (Robinson, Arthur H.; Sale, Randall D.; Morrison, Joel L.; Muehrcke, Phillip C.: *Elementos de cartografía*, Ediciones Omega S.A., Barcelona, 1987. P. 37).

³ En principio, los términos mapa y carta son sinónimos, sin embargo, en la práctica el término carta suele ir asociado a un uso técnico o científico, y más concretamente al significado de carta de navegación (Robinson, Arthur H.; Sale, Randall D.; Morrison, Joel L.; Muehrcke, Phillip C.: *Elementos de cartografía*, Ediciones Omega S.A., Barcelona, 1987. P. 9), mientras que el término mapa se reserva a aquellas representaciones sin carácter técnico o científico, con una finalidad ilustrativa o cultural Pires Miguens, Altineu: *Navegação: A Ciência e a Arte. Volume I, Navegação costeira, estimada e em águas restritas*, Ministério da Marinha do Brasil, Diretoria de Hidrografia e Navegação, Rio de Janeiro 1996. P.15.

⁴ Martín López, José: *Historia de la cartografía y de la topografía*, Centro Nacional de Información Geográfica, Madrid, 2002.

⁵ Fisher, Dennis: *Latitude Hooks and Azimuth Rings. How to Build and Use 18 Traditional Navigational Tools*, International Marine-McGraw-Hill, Camden, Maine 1995. Pp. 8 y 9.

⁶ Raisz, Edwin: *Cartografía General*, Ediciones Omega, Barcelona, 7ª edición 1985. Pp. 11 y 12.

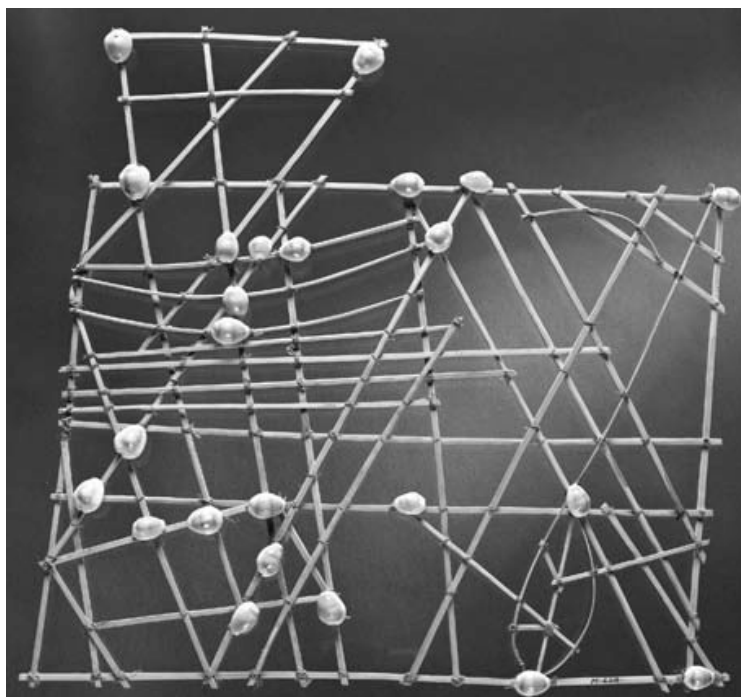


Figura 2.2.1. “Carta náutica” de la Polinesia. Departamento de antropología del Instituto Smithsonian (número de catálogo 398227). Foto de P. E. Hurlber⁷.

Pese a su rústico aspecto, los polinesios han sido capaces de cubrir grandes distancias sobre el Pacífico usando estos curiosos mapas para ayudarse con la orientación.

Los esquimales son otro pueblo primitivo del que se tiene constancia de que empleaban representaciones cartográficas en sus navegaciones. Éstas consistían en planchas de madera o de piel de foca sobre las que dibujaban, y aún lo hacen, los mapas que utilizaban para poder desplazarse entre sus enclaves costeros. Se valían de diferentes colores para diferenciar las islas, las corrientes de agua, los lagos, etc., dando como resultado unas cartas de sorprendente policromía. Otra característica interesante de sus trabajos son las grandes deformaciones que presentan y que se deben a que, en lugar de utilizar el concepto de distancia como lo conocemos, se utilizaba el de tiempo, es decir, cada punto estaba situado en base al tiempo que se tardaba en llegar a él desde otro punto diferente⁸.

Buscando una cronología, que permita situar los primeros usos de cartas de navegación, se puede suponer, que los fenicios, pioneros en el arte de la navegación, han debido ser los responsables de emplear por primera vez cartas náuticas. No se conservan restos, que puedan justificar su existencia, pero sus épicas navegaciones difícilmente se podrían explicar, si no contaran con algún sistema gráfico para referenciar sus travesías. Los fenicios mantuvieron una actividad comercial importante por vía marítima, que se extendía desde las islas británicas al mar rojo. En todo caso, aunque no fueran ellos los primeros en utilizar la cartografía náutica, sí que les debemos la ampliación de la concepción geográfica existente hasta entonces. El concepto moderno de cartografía, originado por los griegos, no hubiera podido ocurrir de no ser por los conocimientos que tomaron de los fenicios. Las primeras directrices que permitieron la representación científica de la superficie terrestre fueron establecidas por los sabios cosmógrafos, astrónomos y matemáticos, que no hubieran podido hacerlo de no ser por el importante

⁷ Harvey, Francis: *A primer on GIS*, The Guilford Press, New York, 2008.

⁸ Webnavy, Cervera Centre: *Historia de la Cartografía*, <http://www.Cerveracentre.com>.

impulso que se dio a las ciencias, el pensamiento y las artes en la Grecia Antigua, Alejandría y, posteriormente, en el Imperio Romano. A pesar del paso atrás, que la historia dio posteriormente, los griegos fueron los primeros en admitir que la Tierra es redonda y a ellos se debe un primer sistema de latitudes y longitudes, la construcción de las primeras proyecciones y la realización de los primeros cálculos sobre las dimensiones terrestres.

Claudio Tolomeo⁹, en el siglo II d.C., usó meridianos y paralelos para ubicar cada población gracias a sus coordenadas en el primer Atlas Universal, en el que empleó proyecciones cónicas para sus representaciones. Mientras que, en Occidente éste Atlas no fue conocido hasta 1477, fue reproducido muchas veces en el mundo musulmán durante la Edad Media. Otra obra importante de Tolomeo es su “Geografía”, en la que recoge una extensa relación de aproximadamente 8.000 nombres de lugares con sus latitudes y longitudes. Se trata de 8 volúmenes en los que, concretamente en dos de ellos, proporciona una serie de principios teóricos de cartografía, geografía, matemática y proyecciones.

No se sabe con certeza si los antiguos griegos emplearon cartas de navegación porque, de haber existido, no llegaron a nuestros días. Sin embargo, sí es cierto, que hay una referencia a ellas en la “Geografía” de Tolomeo¹⁰, donde se mencionan las cartas de Marino de Tiro¹¹ y también existen referencias al uso de cartas de navegación en textos clásicos. Como ejemplo puede citarse las “Argonáuticas” de Apolonio de Rodas, quien, en su revisión del mito de Jasón y el vellocino de oro realizado en el siglo III d.C. menciona que los Colcos, pueblo descendiente de colonos egipcios asentado en las costas del Mar Negro, en la actual Georgia, conservaban planchas de sus padres en las que se mostraban y se daban indicaciones de las rutas navegables.

De lo que sí se tiene constancia es que los griegos empleaban descripciones escritas de las costas por las que navegaban, denominadas periplos, las cuales permitían a los marinos conocer los peligros, profundidades y abrigos, así como identificarlos gracias a la información que recogían. El más antiguo del que se tiene constancia es el “Periplo de Scylax”, realizado hacia el año 500 a.C. En concreto, éste describía la costa mediterránea y proporcionaba el número de días de navegación que separaba sus puntos más significativos. El siguiente conocido se sitúa en el siglo III y es similar al anterior, aunque tiene la novedad de que las distancias ya se dan en estadios¹².

Las descripciones escritas de la costa continuaron empleándose durante siglos, alcanzando su punto álgido con los denominados portulanos. La aparición de estos derroteros se debe a la implantación de la aguja magnética a bordo de los buques. En ellos se recogen las distancias en millas entre puntos importantes y puertos y, además, los rumbos magnéticos que los conectan. Esta innovación se da de forma paralela a las “cartas portulano” surgidas durante la segunda mitad del siglo XIII en la Europa occidental. Las cartas portulano son los primeros mapas de los que se conservan ejemplares, donde se representa el litoral costero a fin de servir de ayuda a la navegación. La información de los portulanos, que se representaba gráficamente sin una proyección intencional, se utilizaba para el trazado de las cartas portulano que, aunque no presentaban grandes errores por la reducida diferencia de latitudes que

⁹ Astrónomo y matemático griego, (100-170), cuyas teorías y explicaciones astronómicas dominaron el pensamiento científico hasta el siglo XVI. Su obra más conocida fue una recopilación, en 13 volúmenes, de los conocimientos científicos de su época, en especial de sus propias observaciones y las de Hiparco de Nicea. Esta obra llegó a Europa a través de su versión árabe, conocida como “Almagesto” o “Geografía”.

¹⁰ Laguarda Trias, Rolando A.: *La aportación científica de mallorquines y portugueses a la cartografía náutica en los siglos XIV al XVI*, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Instituto Histórico de Marina, Imprenta del Ministerio de Marina, Madrid, 1964. P. 5.

¹¹ (finales del s. I), geógrafo griego, considerado como uno de los creadores de la geografía matemática.

¹² Sellés, Manuel: *Instrumentos de navegación. Del Mediterráneo al Pacífico*, Lunwerg Editores, Madrid 1994. P. 18.

abarcaban, no tenían en cuenta la curvatura de la Tierra¹³. La carta portulano más antigua que se conserva es la denominada “Carta Pisana”, anónima aunque se le atribuye un origen genovés, y dotada en la última mitad del siglo XIII.



Figura 2.2.2. Carta Pisana¹⁴.

No se dispone de un gran número de cartas de aquel momento, y ninguna de ellas parece haber sido empleada a bordo de un buque, por lo que no prueban por sí mismas su uso náutico. Sin embargo, se supone que sólo hayan sobrevivido las que eran consultadas en bibliotecas o servían como decoración¹⁵. La evidencia más fiable del uso de estas cartas en navegación se encuentra en una ordenanza de 1354 del reino de Aragón, que decretaba la obligatoriedad de que cada galera llevara a bordo dos cartas marítimas en todas sus navegaciones¹⁶.

Las zonas abarcadas por las cartas portulano suelen ser el Mediterráneo y Mar Negro, a veces, el Atlántico, Marruecos y hasta Irlanda, conteniendo España, Francia, Países Bajos e Inglaterra. Aunque el perfil de la costa es bastante fiable. Los ríos, ciudades y montañas, que se representan algunas veces son bastante imprecisos. Son todas muy similares, construidas siempre sobre una piel de oveja, y en ellas, los nombres de los puntos más significativos aparecen de forma perpendicular, utilizando tinta roja para ellos y tinta negra para el perfil de la costa, los nombres de los puertos y accidentes costeros. El uso de este tipo de cartas entra en declive en el siglo XVI.

Una curiosidad de estas cartas era que se basaban en la dirección de la aguja náutica, lo cual suponía, que el eje del mediterráneo estuviera desplazado unos 9° en sentido horario, ya que la

¹³ Crone, G. R.: *Historia de los Mapas*, Fondo de Cultura Económica, México, 1ª edición 1956. P. 35.

¹⁴ Carta Pisana, 1050x500 mm. Paris, Bibliothèque Nationale de France, publicado en *Les Portulans: cartes marines du XIII e siècle* / par Monique La Roncière et Michel Mollat du Jourdin, Fribourg, Office du Livre, 1984. El libro, acompañado de reproducciones de mapas antiguos y cartas, se guarda en la Biblioteca Nacional de Francia y está acompañado de descripciones analíticas. <http://www.fglorente.org/maritime.html>

¹⁵ VV.AA.: *Introducció general a la història de la Cartografia*, Cicle de conferències sobre història de la cartografia, 1er curs: 30, 31 de gener i 1 de febrer de 1990, Institut Cartogràfic de Catalunya, Barcelona, 1990. Pp. 98 y 99.

¹⁶ Martín Meras, Luisa et al.: *La imagen del mundo. 500 años de cartografía*, Instituto Geográfico Nacional-Centro Nacional de Información Geográfica-MOPT, Madrid, 1992. P. 16.

declinación en esa época y en esa zona era de unos 9° o 10° E¹⁷. Pero quizás su característica más notable es el entramado de líneas¹⁸ que presentaban y que permitían al navegante desplazarse en un rumbo siempre paralelo a alguna de ellas¹⁹.

A pesar de la similitud que presentan todas las cartas portulano, que hoy en día se conservan, pueden distinguirse dos escuelas: la catalano-mallorquina²⁰ y la italiana. La primera, destaca por su riqueza ornamental, y la segunda por su sobriedad y carácter funcional.



Figura 2.2.3. Fragmento del Atlas de Cresques (1375)²¹.

Los españoles y los portugueses comienzan, a finales del siglo XV, a alargar sus navegaciones tanto en el Atlántico como por la costa africana, por lo que este tipo de cartas pierde utilidad. En este momento se traduce al latín la “Geografía” de Tolomeo, en el 1405, a cuya divulgación ayudará la invención de la imprenta, pero que quedará pronto en la sombra debido a la publicación de la teoría del heliocentrismo a mediados del siglo XVI por Copérnico, que va a chocar con el principio del geocentrismo de Tolomeo, y por la vuelta al mundo de Magallanes, que también propicia que se descarten sus creencias²². El método de navegación, que habían empleado los marinos hasta entonces,

¹⁷ García Franco, Salvador: Historia del Arte y Ciencia de Navegar. Desenvolvimiento histórico de «los cuatro términos» de la navegación. Tomo segundo, Instituto Histórico de Marina, Madrid, 1947. Tomo 2º. Pp. 32 a 36.

¹⁸ Sobre la carta se trazaban una o dos circunferencias tangentes que se dividían en dieciséis o treinta y dos puntos nodales, cada uno de los cuales se unía con todos los demás mediante segmentos que constituían líneas de rumbo constante. El navegante se servía de estas líneas para encontrar una que fuera paralela al rumbo que quería llevar. Por lo general se dibujaba una rosa de los vientos en alguno de los puntos nodales. Además, para facilitar su uso, estas líneas se trazaban en varios colores: los rumbos correspondientes a los ocho vientos principales se trazaban en negro, los rumbos intermedios entre ellos en verde y en rojo los situados entre estos últimos. Para la medición de los rumbos se empleaban las rosas de los vientos y para la de distancias se recurría a unas escalas gráficas denominadas “troncos de leguas”, que se incluían en los márgenes de las cartas.

¹⁹ Sellés, Manuel: *Instrumentos de navegación. Del Mediterráneo al Pacífico*, Lunverg Editores, Madrid 1994. P. 22.

²⁰ Un ejemplo de la escuela catalano-mallorquina es el “Atlas Catalán”, realizado por Abraham y Jafuda Cresques en 1375. Esta obra abarca una extensión mucho mayor que las cartas portulano tradicionales e incluye por primera vez una rosa de los vientos.

²¹ Patronat Call de Girona: *El atlas de Cresques*. web: http://www.girona.cat/call/img/foto_atlas_cresques.jpg.

²² Martín Meras, Luisa et aliter: *La imagen del mundo. 500 años de cartografía*, Instituto Geográfico Nacional-Centro Nacional de Información Geográfica-MOPT, Madrid, 1992. P. 24.

se basaba en ir reconociendo la costa y sin alejarse de ella visualmente. Gracias a la determinación de la latitud por observaciones astronómicas, primero con el cuadrante y después con el astrolabio, que tuvieron que ser adaptados para su uso en la mar, se solucionó el problema. Pero este nuevo sistema sigue requiriendo una carta náutica, por lo que nacen las cartas cuadradas, denominadas así porque en ellas los paralelos y los meridianos forman una cuadrícula regular²³.

En las cartas cuadradas los paralelos y los meridianos estaban medidos en grados que valían lo mismo y tenían la misma longitud, dando esto lugar a error, al que se añadía el hecho de que no había una proyección definida ya que se intentaba conservar las características de las cartas planas. Se usaban las cartas portulano para trazarlas y en ellas se situaban los puntos más significativos por longitud y latitud, dejándose la trama de líneas de rumbo (que cortaban con el mismo ángulo los meridianos) y las rosas de los vientos. Al no considerarse la convergencia de los meridianos, principal razón por la que los grados de longitud disminuyen del Ecuador a los polos, los meridianos estaban separados por distancias iguales y un grado de longitud era igual a un grado de latitud, independientemente de si se medía en el Ecuador o en los polos. Por ello, no cuadraban las medidas reales con las de la carta, así que tenían que usarse procedimientos gráficos o correcciones.

Seguía sin tenerse en cuenta la declinación magnética, es decir, la desviación de la aguja respecto al meridiano geográfico. La torsión del eje del mediterráneo se hizo evidente, por lo que se solucionó creando dos escalas de latitudes, que diferían en el valor de la declinación. El problema era que, una vez fuera del Mediterráneo, en lugares donde la declinación no era constante, era difícil crear una carta exacta²⁴. Aun así, su uso se prolongó hasta la mitad del siglo XVI, ya que a principios de este siglo es cuando comienzan a hacerse los grandes descubrimientos y el concepto del mundo cambia. En 1503, la Corona española fundó la Casa de la Contratación de las Indias, que actualizaba el Mapa Universal o “Padrón real”, encargado de recoger toda la información sobre los descubrimientos que los marinos españoles ponían en conocimiento a su regreso del Nuevo Mundo. Mientras, utilizando estos datos, los holandeses comenzaron a utilizar la imprenta para crear cartas, motivo que propició la decadencia de la Casa de Contratación, que desapareció en el siglo XVII, porque no podían competir las cartas manuscritas con la rapidez y economía de las impresas.

El siguiente descubrimiento que ha de ser mencionado es el de Pedro Nunes, quien, en la primera mitad del siglo XVI, elaboró la teoría de que las líneas de rumbo son espirales esféricas que cortan a todos los meridianos con el mismo ángulo, dando un número infinito de vueltas alrededor de los polos, siendo las únicas líneas de rumbo circulares los meridianos y paralelos²⁵. Hasta entonces se pensaba que un buque que siguiera el mismo rumbo de forma continua seguiría un círculo máximo de la esfera terrestre, aunque los árabes ya habían estudiado este tema hacía varios siglos, lo resolvieron de forma diferente a como lo conocemos hoy en día. Este descubrimiento hizo que se estudiara la necesidad de modificar las cartas de forma que las loxodrómicas, paralelos y meridianos se representaran como líneas rectas, dibujando estos últimos un entramado ortogonal de manera que las primeras corten a los meridianos con el mismo ángulo siempre, ángulo que ha de coincidir con el valor del rumbo²⁶.

²³ Al tener el mismo valor los grados de paralelo que los de meridiano y la misma distancia entre sí, se daba un error bastante grande.

²⁴ Sellés, Manuel: *Instrumentos de navegación. Del Mediterráneo al Pacífico*, Lunwerg Editores, Madrid 1994. P 74.

²⁵ Gomez Teixeira, Francisco: *História das matemáticas em Portugal*, Biblioteca de Altos Estudos, Academia das Ciencias de Lisboa, Lisboa, 1934. Pp. 38 y 39.

²⁶ García Franco, Salvador: *Historia del Arte y Ciencia de Navegar. Desenvolvimiento histórico de «los cuatro términos» de la navegación*, Tomo segundo, Instituto Histórico de Marina, Madrid, 1947. Pp. 43, 63 y 64.

La solución a este problema la planteó Gerhard Kramer, más conocido por su nombre latinizado Gerardus Mercator, quien en 1569, presentó un sistema de proyección en el que la longitud de los grados de paralelo era igual para toda la carta mientras que la de los grados de latitud aumentaba de forma progresiva del Ecuador a los polos. Esta proporción es difícil que fuera calculada con los conocimientos matemáticos de la época y es improbable que fuera hecha de forma geométrica, aunque sigue siendo un misterio, cómo llegó a establecer el sistema para situar los paralelos, es posible que fuese producto de aproximaciones empíricas, lo que explicaría que los resultados fueran aproximados.

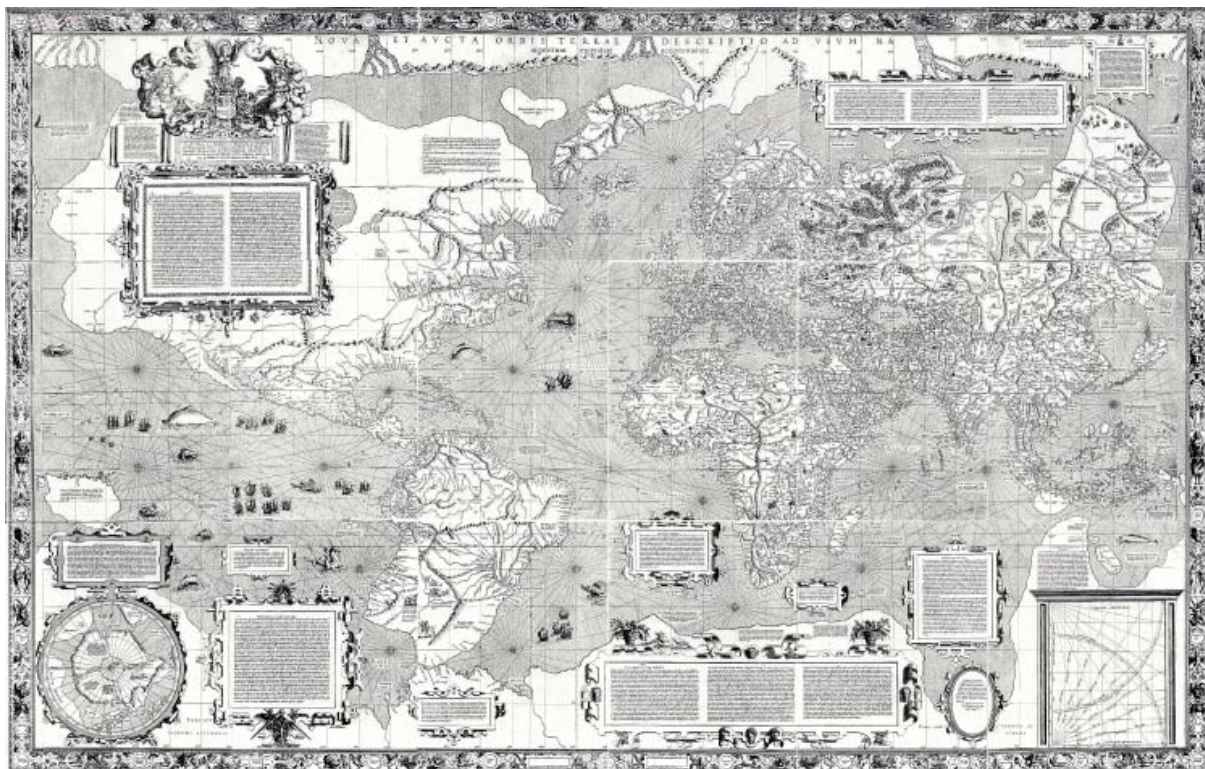


Figura 2.2.4. “Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigativum emendate accomodata” de Mercator (1569)²⁷

El uso de la proyección de Mercator no se generalizó hasta entrado el siglo XVIII, ya que tan sólo los marinos más instruidos podían hacerlo. Paralelamente, en el siglo XVII, los avances en los instrumentos de navegación astronómica dan nacimiento al cuadrante de reflexión y los cronómetros marinos, que permitirán el cálculo de la longitud.

Mientras, en tierra, se perfeccionaba el sistema de triangulación, que consistía en medir una línea base de uno o dos kilómetros y unir sus extremos a un punto significativo de manera que dibujase un triángulo. Con la medición de los ángulos se podía determinar la longitud de los lados. Esto ya había sido ideado por Gemma Frisius en 1533, pero fue Guillermo Blaeu quien lo utilizó posteriormente para triangular parte de la costa de los Países Bajos²⁸. En 1793, una empresa francesa hizo el primer levantamiento topográfico a escala nacional utilizando este método. Aunque Europa ya contaba con

²⁷ Mapamundi: *Carta del Mundo de Mercator 1569*, web: http://mapas.owje.com/10553_carta-del-mundo-de-mercator-1569.html

²⁸ Sellés, Manuel: *Instrumentos de navegación. Del Mediterráneo al Pacífico*, Lunwerg Editores, Madrid 1994. P. 137.

cartografía, que reflejaba casi por completo su extensión, la representación de sus aguas no evolucionó hasta que, a finales del siglo XVIII, los estados decidieron realizar prospecciones hidrográficas sistemáticas de sus costas, para así elaborar nuevas cartas adaptadas a los nuevos tiempos²⁹. Con este fin se crearon departamentos hidrográficos, responsables de confeccionar cartas de mayor precisión, mapas batimétricos y mapas oceánicos de distinta índole³⁰.

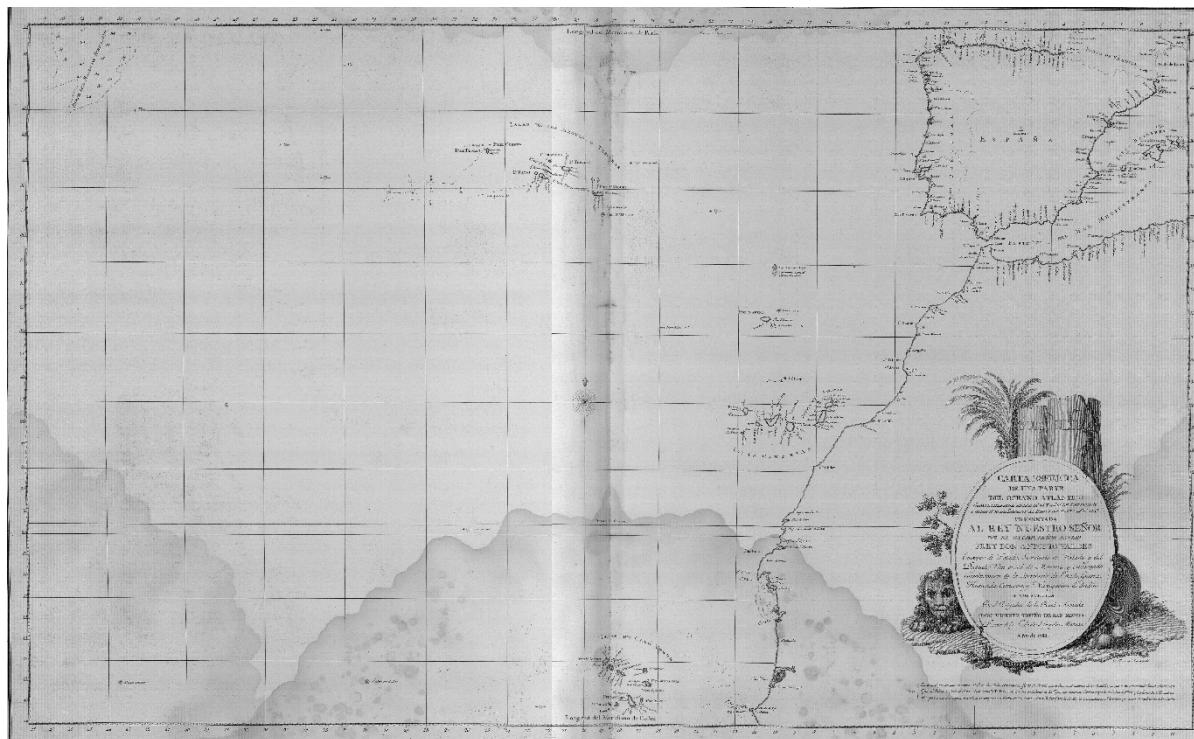


Figura 2.2.5. Carta general del Atlas Marítimo de España de Vicente Tofiño (1788)³¹.

En los dos siglos siguientes, XIX y XX, los avances se multiplican tanto en la cartografía como en la navegación, comenzando por el desarrollo de la litografía y sistemas de impresión en colores, nuevas proyecciones resultado de los avances en geodesia, métodos de representación del relieve, la invención del barómetro³², la fotogrametría³³ y hasta el uso de radares y escáneres multiespectrales, primero desde aeronaves y en la década de los ochenta desde satélites artificiales. Poder usar aparatos electrónicos para medir, almacenando los datos en soportes magnéticos o tarjetas y poder procesar los datos con la informática ha facilitado enormemente la tarea a los cartógrafos en las últimas décadas.

La mayor revolución en este sentido fue precisamente poder contar con ordenadores en la década de los ochenta para el proceso cartográfico, que permitían almacenar información y utilizarla para hacer las cartas, pudiendo elegir la cantidad y calidad de los datos según el fin para los que se necesiten. Esto

²⁹ Shalowitz, Aaron L.: *Shore and sea boundaries, Volume II*, U.S. Department of Commerce, Coast and Geodetic Survey, U.S. Government Printing Office, Washington, 1964. Pp. 275 y 276.

³⁰ Martín Meras, Luisa *et al*: *La imagen del mundo. 500 años de cartografía*, Instituto Geográfico Nacional-Centro Nacional de Información Geográfica-MOPT, Madrid, 1992. P. 195.

³¹ Universidad de Sevilla, Fondo Antiguo: Carta Esférica de una parte del océano Atlántico comprendida entre 14°.00' y 44°.10' de latitud N. y desde 11°.00' de Longitud al E. de Cádiz hasta 48°.10' al O. Atlas Marítimo de España de Vicente Tofiño, 1788, http://fondosdigitales.us.es/media/books/3563/grabado_None_page658859_A062040_002-00015.jpeg

³² Martín Meras, Luisa *et al*: *La imagen del mundo. 500 años de cartografía*, Instituto Geográfico Nacional-Centro Nacional de Información Geográfica-MOPT, Madrid, 1992. P. 200.

³³ Uso de la fotografía para levantamientos cartográficos.

derivó en las cartas electrónicas que hoy en día se utilizan a bordo y que permiten, no sólo el trazado de la derrota, sino también la situación en las mismas.

2.3. LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN DEL ESPACIO GEOGRÁFICO

2.3.1. El espacio geográfico

Todo mapa busca representar el espacio geográfico, que desde un punto de vista tradicional, estará constituido por todo o parte de la superficie terrestre³⁴. Antes de ver como se representará la superficie, convendrá hacer una aproximación a la misma. Para esta tarea, la cartografía se sirve de la geodesia para estudiar la forma y dimensiones de la Tierra, procediendo para ello a la determinación de las coordenadas de puntos distribuidos por el terreno³⁵. En esta determinación la geodesia dispone de cuatro tipos de datos: datos astronómicos, a través de la astronomía de posición; datos geométricos, obtenidos con mediciones realizadas directamente sobre el terreno por triangulación y nivelación; datos dinámicos o geofísicos, derivados esencialmente de procedimientos gravimétricos, y datos de geodesia espacial, procedentes de observaciones realizadas con satélites agrimensores.

Para realizar una breve aproximación a la forma de la Tierra, puede partirse del siguiente enunciado de Isaac Newton: *“la forma de equilibrio de una masa fluida homogénea sometida a las leyes de la gravitación universal y girando alrededor de un eje, es un elipsoide de revolución aplastado en los polos”*³⁶. La hipótesis de Newton se cumpliría de forma exacta en el caso de la Tierra si se verificaran los requisitos de homogeneidad enunciados, pero no es así. La verdadera forma de la Tierra es sumamente compleja y resulta imposible definirla exactamente mediante alguna expresión matemática, por tanto, para su tratamiento matemático habrá que recurrir a superficies de aproximación. La primera de estas superficies es el geoide, que se define como la forma que adoptaría la superficie terrestre suponiendo la superficie de mares y océanos en equilibrio, sin que ninguna causa perturbadora ejerza efecto sobre ella y prolongada bajo las masas continentales, de modo que abarcara todo el planeta. Esta superficie cumple que la gravedad en todos sus puntos es perpendicular a ella, es decir, es equipotencial respecto del campo gravitatorio terrestre³⁷. Aunque actualmente es posible definir un geoide de forma muy precisa, su geometría sigue siendo muy compleja y no existe una fórmula matemática sencilla para él. Es por ello que se puede recurrir a otra superficie aproximada, un elipsoide de revolución, obtenido al rotar una elipse en torno a su eje menor³⁸. Un elipsoide de revolución si se puede definir matemáticamente de forma sencilla refiriéndose a su elipse meridiana, bien mediante sus semiejes (a y b), o bien mediante su semieje mayor y su excentricidad (a y e), o también mediante su semieje mayor y su aplanamiento (a y α)³⁹.

$$\alpha = \frac{a - b}{a} \quad (2.3.1)$$

³⁴ Dollfus, Olivier: *El Espacio Geográfico*, Ediciones oikos-tau, Barcelona, 3ª edición 1990. Pp. 7 a 9.

³⁵ Sanjosé Blasco, J.J.; García León, J.; López González, M.: *Introducción a las ciencias que estudian la geometría de la superficie terrestre: geodesia, cartografía, fotogrametría, topografía*, Bellisco Ediciones Técnicas y Científicas, Madrid, 2000. P. 7.

³⁶ Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1990. P. 15.

³⁷ Martín Asín, Fernando: *Astronomía*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1979. P. 33.

³⁸ Joly, Fernand: *La cartografía*, Ariel S.A., Barcelona, 1982. P. 123.

³⁹ Franco Rey, Jorge: *Nociones de topografía, geodesia y cartografía*, Universidad de Extremadura, Servicio de Publicaciones, Cáceres, 1999. P. 87.

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \quad (2.3.2)$$

Para trasladar los puntos del geoide al elipsoide no solo es necesario definir la geometría de éste último, sino que también hay que situarlo en el espacio respecto al primero. Para ello se elige un punto fundamental, llamado datum, en el que se cumple que la normal al geoide y la normal al elipsoide coinciden, siendo las superficies de ambos tangentes. Así, para definir un elipsoide tipo se emplea el datum correspondiente a éste. Para cualquier punto distinto del datum, el ángulo entre las normales a ambas superficies se denomina desviación relativa de la vertical.

2.3.2. Las proyecciones cartográficas

Una vez establecidos los criterios de la forma geométrica de la Tierra y simplificando el hecho de su representación plana, recurriendo a su consideración como un elipsoide de revolución o una esfera, surge de forma inmediata, el hecho de que es imposible desarrollar ninguna de las anteriores figuras sobre un plano. De este modo, no es factible representar la superficie terrestre en un plano sin que ésta sufra deformaciones.

Para poder obtener una representación plana de la superficie terrestre se emplean las proyecciones cartográficas. Desde este punto de vista puede definirse una proyección como una correspondencia matemática biunívoca entre los puntos de un elipsoide de revolución o una esfera, y sus transformados en un plano⁴⁰. Esta correspondencia puede expresarse matemáticamente mediante funciones de transformación de las coordenadas geográficas de cada punto del elipsoide o esfera, a coordenadas cartesianas en el plano:

$$x = f(\varphi, \lambda); y = g(\varphi, \lambda) \quad (2.3.3)$$

$$\varphi = F(x, y); \lambda = G(x, y) \quad (2.3.4)$$

Donde f , g , F y G serán las funciones que definan las propiedades de la proyección elegida, estableciendo una correspondencia biunívoca entre puntos homólogos del elipsoide de revolución o la esfera y del plano. De este modo, ordenar todos los puntos de un espacio geográfico en función de este sistema de referencia trasladado sobre un plano (mediante el correspondiente sistema de proyección) es construir el mapa o carta de dicho espacio⁴¹.

2.3.3. El concepto de escala

Todo mapa o carta será necesariamente menor que la superficie a representar, de modo que las magnitudes reales deberían modificarse para adaptarlas al tamaño del plano de representación, en función de una determinada proporción que recibe el nombre de escala. De forma genérica se puede definir la escala de un mapa como la razón entre una distancia considerada en la carta y la distancia correspondiente sobre la Tierra⁴², sin embargo, aparece la complicación adicional de que toda proyección cartográfica introducirá una cierta deformación en la zona representada, debido al

⁴⁰ Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1990. P. 236.

⁴¹ Joly, Fernand: *La cartografía*, Ariel S.A., Barcelona, 1982. P. 39.

⁴² Robinson, Arthur H.; Sale, Randall D.; Morrison, Joel L.; Muehrcke, Phillip C.: *Elementos de cartografía*, Ediciones Omega S.A., Barcelona, 1987. P. 60.

mencionado hecho, de que es imposible desarrollar un elipsoide o esfera sobre un plano de forma directa. De este modo, la escala que pueda indicarse sobre un determinado mapa sólo se ajustará a un punto o puntos concretos, y a lo largo de determinadas direcciones⁴³.

Para entender mejor el proceso de representación a escala se debe asumir: en primer lugar, que la superficie terrestre ha sido mapeada sobre una superficie esférica o elipsoidal, con el tamaño reducido a una determinada escala, llamada escala real o principal. Esta esfera o elipsoide será la denominada esfera o elipsoide de referencia. En segundo lugar, se supone que la superficie de referencia se transforma matemáticamente sobre un plano a través de una proyección cartográfica, que introducirá una cierta deformación en la superficie representada. De esta manera se introduce otro tipo de escala, la denominada escala real o verdadera, que se definirá como la razón entre la distancia en el plano y su correspondiente sobre la Tierra, que evidentemente variará de un lugar a otro. Para un punto determinado de una carta, la relación entre ambos tipos de escala vendrá dado por el factor de escala, que se define como la razón entre la escala real en el punto considerado y la escala principal del mapa⁴⁴.

De forma esquemática, el razonamiento anterior puede resumirse de la siguiente forma:

- Escala principal o nominal en el Globo (EP):

$$EP = \frac{r}{R} \quad (2.3.6)$$

Donde:

R = radio de la Tierra.

r = radio del globo de referencia.

- Escala real en cualquier punto sobre la carta plana (ER)

$$ER = \frac{d}{D} \quad (2.3.6)$$

Donde:

D = distancia sobre la superficie de la Tierra.

d = distancia sobre la carta plana.

- Factor de Escala (FE):

$$FE = \frac{ER}{EP} \quad (2.3.7)$$

Donde:

ER = escala real.

EP = escala principal.

⁴³ Snyder, John P.; Bugayevskiy, Lev M.: *Map Projections: A Reference Manual*, Taylor and Francis Inc., Bristol, London, 1995. P. 17.

⁴⁴ López Varela, Pablo: *Análisis de Idoneidad de las Derrotas empleadas en Navegación Marítima sobre las Proyecciones de Mercator, Gnomónica y Estereográfica*. Tesis doctoral, Departamento de Energía y Propulsión Marina, Universidad de A Coruña, 2005. P. 97.

2.3.4. Clasificación de las deformaciones en los sistemas de proyección

Observando las expresiones (2.3.3) y (2.3.4) se deduce que siendo f , g , F y G funciones continuas relativamente arbitrarias, existirán infinitud de soluciones al problema de las proyecciones cartográficas⁴⁵. En la práctica no sucede así, ya que estas funciones deberán cumplir dos requisitos:

- Que sea biunívoca, es decir, que para un punto en la superficie de referencia se corresponda un único punto en el plano, y viceversa⁴⁶.
- Que resulte de utilidad, es decir, que el mapa resultante posea propiedades particulares que satisfagan algún fin⁴⁷.

Para cumplir con este último requisito, a la hora de plantear una proyección cartográfica, deberá buscarse controlar hasta cierto punto las deformaciones que introducirá en la representación, y conseguir cumplir determinadas condiciones que resulten útiles para el fin perseguido. Para ello las deformaciones que aparecen al realizar una representación cartográfica se estudian clasificándolas en tres tipos básicos: angular, superficial y lineal, siendo su eliminación simultánea en estos tres campos incompatible⁴⁸. Sin embargo, en función del sistema de proyección elegido, es posible conservar alguna de las tres propiedades (ángulos, superficies o distancias), pero siempre en detrimento de las demás, lo que permite a su vez realizar una primera clasificación de las proyecciones en función de las deformaciones sufridas.

En esta clasificación se emplea el concepto de módulo de deformación o anamorfosis, según el cual, se analiza la deformación sufrida por un elemento diferencial al transformarse de la superficie de referencia al plano.

Tomando dos elementos lineales diferenciales que formen un ángulo α en la superficie de referencia, y cuyas transformadas en el plano formen un ángulo α' , se denomina módulo de deformación angular o anamorfosis angular, y se representa por A , a la diferencia de ambos ángulos⁴⁹:

$$A = \alpha' - \alpha \quad (2.3.8)$$

Tomando un elemento de superficie diferencial dS en la superficie de referencia y su correspondiente en el plano dS' , al cociente entre ellos se denomina módulo de deformación superficial σ :

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} \quad (2.3.9)$$

Considerando un elemento lineal diferencial en la superficie de referencia ds , y su transformado en el plano ds' , su cociente será el módulo de deformación lineal K :

⁴⁵ Joly, Fernand: *La cartografía*, Ariel S.A., Barcelona, 1982. P. 48.

⁴⁶ Pueden emplearse funciones que a priori no cumplan este requisito, siempre y cuando se establezca un criterio para resolver ambigüedades.

⁴⁷ Cualquiera podría establecer un par de ecuaciones al azar que permitan transformar los puntos de la esfera sobre el plano, otra cosa distinta es que el resultado sea inteligible y útil para algo.

⁴⁸ Martín López, José: *Cartografía*, Colegio Oficial de Ingenieros Técnicos en Topografía, Madrid, 1999. P. 113.

⁴⁹ Los ángulos se refieren a los formados por los vectores tangentes a los elementos diferenciales considerados en su punto de intersección (Milnor, John: "A Problem in Cartography", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 76, Nº 10, pp. 1101 a 1112, diciembre 1969. P. 1109).

$$K = \frac{ds'}{ds} \quad (2.3.10)$$

Como puede observarse, el estudio de las deformaciones de una proyección implica estudiar cómo se transforman sus elementos diferenciales. Esto es así, para que el factor de escala no influya. Para llevar a cabo el estudio de la transformación de estos elementos diferenciales se puede optar por dos técnicas diferentes. Una de ellas, consiste en considerar un triángulo esférico rectángulo diferencial sobre la superficie de referencia, delimitado por tres arcos de círculo máximo, y observar cómo se transforman en el plano sus lados (obteniendo el módulo de deformación lineal), su superficie (obteniendo el módulo de deformación superficial), y uno de sus ángulos distinto al recto (obteniendo el módulo de deformación angular)⁵⁰.

Otra de las técnicas, consiste en recurrir a la llamada elipse indicatriz de Tissot. Para ello se considera un elemento lineal diferencial sobre la superficie de referencia y se le hace rotar alrededor de uno de sus extremos, obteniendo una circunferencia sobre la superficie esférica o elipsoidal. La proyección de ésta circunferencia diferencial sobre el plano dará lugar a una elipse, la llamada elipse indicatriz de Tissot, cuyas dimensiones y orientación reflejan perfectamente las distorsiones que introduce la proyección⁵¹. En este caso las elipses de Tissot se aumentan de tamaño en el mapa para que resulten visibles. Este hecho debe tenerse en cuenta, ya que posteriormente se emplearán en este trabajo. Así, cuando se representen elipses de Tissot en un mapa, se entenderá que se trata de la representación a escala aumentada de las elipses diferenciales situadas en su centro. Por último mencionar que en las proyecciones conformes la elipse degenera en una circunferencia. La explicación de este fenómeno se verá al realizar el estudio de las proyecciones analizadas⁵².

2.3.5. Clasificación de los sistemas de proyección en función de las deformaciones que presentan

A continuación se recoge la clasificación que puede realizarse de las proyecciones cartográficas según las deformaciones que presentan:

2.3.5.1 Proyecciones conformes u ortomorfas

Una proyección conforme u ortomorfa es aquella en la cual se conserva la igualdad de ángulos entre la superficie a representar y la proyectada. De este hecho se deriva la particularidad adicional de que, cualquier zona de pequeña extensión mantiene en esencia la misma forma en el plano que en la superficie de referencia⁵³.

⁵⁰ Sobre el desarrollo de este planteamiento puede consultarse: Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1990, Pp. 237 y ss. Snyder, John P.; Bugayevskiy, Lev M.: *Map Projections: A Reference Manual*, Taylor and Francis Inc., Bristol, London, 1995, Pp. 15 y ss. VV.AA: *Apuntes de cartografía. Fascículo primero, Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales*, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970. Pp. 23 y ss.

⁵¹ Baselga Moreno, S.: *Fundamentos de Cartografía Matemática*, Editorial Universidad Politécnica de Valencia, 2006, P.71.

⁵² Sobre el desarrollo matemático de la elipse indicatriz de Tissot puede consultarse: Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P.; A. Trejo, C.: *Análisis Matemático. Volumen II*, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 7ª edición 1968. Pp. 335 y ss.

⁵³ En sentido estricto, tan solo en el caso de figuras infinitamente pequeñas ésta y su representada en proyección serían semejantes (Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P.; A. Trejo, C.: *Análisis Matemático. Volumen II*, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 7ª edición 1968. P. 321).

En las proyecciones conformes se cumple que el valor del módulo de deformación angular (2.3.8) es cero ($A = 0$) en todos sus puntos y en cualquier dirección que se considere⁵⁴.

En estas proyecciones la relación entre las longitudes de meridianos y paralelos en el plano es igual a la relación que existe entre ellos en el elipsoide o la esfera, intersecándose en 90° . De igual modo, todas las direcciones alrededor de un punto serán representadas correctamente, aunque ello no implica, que las direcciones entre puntos distantes en la proyección se conserven.

En general, las proyecciones conformes encuentran su uso fundamental en las representaciones cuya finalidad sea la de análisis, guía o registro de movimiento y relaciones angulares. En esta categoría entrarían: las cartas de navegación, tanto náuticas como aéreas, las cartas meteorológicas y los mapas topográficos generales⁵⁵. Ejemplos de proyecciones conformes son la de Mercator, Cónica Conforme de Lambert, Estereográfica y Transversa de Mercator.

2.3.5.2. Proyecciones equivalentes o autálicas

Una proyección es equivalente, autálica o equiárea, cuando una zona o extensión cualquiera tiene la misma superficie en el plano de proyección que en la superficie de referencia, es decir, considerando la escala empleada. Fenómeno que va acompañado por una notable deformación de la forma de la zona⁵⁶.

El valor del módulo de deformación superficial (2.3.9) en las proyecciones equivalentes es la unidad ($\sigma = 1$)⁵⁷.

Las condiciones de conformidad y equivalencia son excluyentes. Así, todas las transformaciones conformes mostrarán regiones con formas similares a las reales pero con tamaños diferentes y, de igual modo, todas las transformaciones equivalentes mostrarán zonas con tamaños similares pero con sus ángulos deformados⁵⁸.

Las proyecciones equivalentes suelen emplearse casi exclusivamente para mapas de referencia general de pequeñas zonas y para la enseñanza de la geografía del mundo. Son ejemplos de proyecciones equivalentes la proyección de Bonne, la cónica de Albers, Goode, Hammer, Mollweide y la proyección sinusoidal.

2.3.5.3. Proyecciones equidistantes

Son proyecciones equidistantes aquellas en las cuales ciertas distancias se conservan al pasar de la superficie de referencia (afectada por la escala principal) al plano⁵⁹.

En las proyecciones equidistantes el módulo de deformación lineal (2.3.10) tiene por valor la unidad, pero solo en determinadas direcciones ($K = 1$).

⁵⁴ Rossignoli, J.L.; Dalda, A.: La Proyección Universal Transversa Mercator (UTM) y su Correspondiente Cuadrícula (CUTM) en la Cartografía Militar. Servicio Geográfico del Ejército. Sección de Geodesia, Madrid, 1975. P. 16.

⁵⁵ Raisz, Edwin: *Cartografía General*, Ediciones Omega, Barcelona, 7ª edición 1985. P. 74.

⁵⁶ Raisz, Edwin: *Cartografía General*, Ediciones Omega, Barcelona, 7ª edición 1985. P. 73.

⁵⁷ Rossignoli, J.L.; Dalda, A.; Boyero, F.: Proyección Universal Transversa de Mercator. Volumen I. Sistemas Conformes. Proyección UTM, Cuadrículas y Sistemas de Referencia, Talleres del Servicio Geográfico del Ejército, Madrid, 1976. P. 23.

⁵⁸ Robinson, Arthur H.; Sale, Randall D.; Morrison, Joel L.; Muehrcke, Phillip C.: *Elementos de cartografía*, Ediciones Omega S.A., Barcelona, 1987. P. 83.

⁵⁹ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 4.

El módulo de deformación lineal pueden permite definir a su vez dos líneas particulares sobre un mapa. Se denominan líneas automecoicas⁶⁰: aquellas a lo largo de la cuales, el módulo de deformación lineal es igual a la unidad ($K = 1$), y son líneas isométricas, aquellas que mantienen un módulo de deformación lineal constante en toda su longitud ($K = \text{cte.}$)⁶¹.

Ya que ni el elipsoide de revolución ni la esfera son superficies no desarrollables sobre un plano, resulta imposible obtener una proyección en la cual todas las distancias entre los diferentes puntos de la misma se conserven. Así, existen dos opciones a la hora de aplicar la condición de equidistancia a una proyección: una opción consiste en mantener el módulo de deformación lineal igual a la unidad a lo largo de una o varias líneas (líneas automecoicas), y la otra: en mantener esta característica ($K = 1$) para todas las direcciones desde uno o dos puntos⁶². Dentro de la primera opción se encontrarían las denominadas proyecciones equidistantes meridianas, donde los requisitos de equidistancia se cumplen a lo largo de las representadas de los meridianos o verticales, y las equidistantes transversas, donde la equidistancia se cumple a lo largo de los paralelos o almicantarats; mientras que en la segunda opción se encontrarían las denominadas proyecciones equidistantes acimutales.

2.3.5.4. Proyecciones afilácticas

Las proyecciones afilácticas no cumplen ninguna de las características enunciadas, pero se caracterizan, porque en ellas se busca que las deformaciones sean mínimas en los tres aspectos, o bien, que posean alguna otra propiedad particular que justifique su construcción. Este término también es empleado por algunos autores para designar en general todas aquellas proyecciones que no son ni conformes ni equivalentes⁶³.

Un ejemplo de proyecciones afilácticas son las denominadas eumórficas, cuya única propiedad destacable es la búsqueda de la conservación aproximada de la forma de los continentes. Aunque ya se comentó, la propiedad de las proyecciones conformes de preservar las formas de regiones de pequeña extensión, es imposible obtener una representación de la forma real de las masas continentales en mapas de extensión mundial, pudiendo recurrirse en todo caso a aproximaciones⁶⁴.

Son ejemplos de proyecciones afilácticas la proyección Gnomónica, Ortográfica, Robinson y Van der Writen I.

2.3.5.5. Proyecciones acimutales

Las proyecciones acimutales⁶⁵ son aquellas en las que se cumple que todas las direcciones o acimuts desde un punto o dos de la carta se muestran en verdadera magnitud. De igual modo, los círculos

⁶⁰ También reciben el nombre de líneas estándar, de referencia o de base.

⁶¹ Rossignoli, J.L.; Dalda, A.; Boyero, F.: *Proyección Universal Transversa de Mercator. Volumen I. Sistemas Conformes. Proyección UTM, Cuadrículas y Sistemas de Referencia*, Talleres del Servicio Geográfico del Ejército, Madrid, 1976. P. 22.

⁶² Robinson, Arthur H.; Sale, Randall D.; Morrison, Joel L.; Muehrcke, Phillip C.: *Elementos de cartografía*, Ediciones Omega S.A., Barcelona, 1987. Pp. 83 y 84.

⁶³ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 4.

⁶⁴ Delmelle, Eric M.: *Map Projection Properties: considerations for small-scale GIS applications*, thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Arts, Department of Geography, State University of New York, Buffalo, septiembre 2001. P. 23.

⁶⁵ También llamadas cenitales, aunque ésta denominación sea en sentido estricto de aplicación a los mapas de la esfera celeste (Lee, L.P.: "The Nomenclature and Classification of Map projections", *Empire Survey Review*, Vol. VII, Nº 51, pp. 190 a 200, enero 1944. P. 194).

máximos de la esfera terrestre, que pasen por los homólogos de los puntos anteriores, se representarán como líneas rectas convergentes en dicho punto o puntos⁶⁶.

Debe mencionarse que hay autores, que no consideran las proyecciones acimutales como una tipología independiente, dentro de la clasificación en función de la deformación que presentan, sino que, optan por considerarlas como un subgrupo dentro de los tres primeros tipos citados. Otros autores las incluyen dentro de la clasificación de las proyecciones en función de su construcción.

2.3.6. Clasificación de los sistemas de proyección en función de las particularidades de su construcción

Realizar una clasificación práctica de las proyecciones cartográficas no es sencillo. En los diferentes manuales de cartografía pueden encontrarse múltiples criterios para clasificar las proyecciones cartográficas en grupos pero, aparte de la ya vista clasificación en función de las deformaciones sufridas, tal vez, el criterio más útil sea el clasificarlas en función de las particularidades de su construcción. En este caso existen dos grandes grupos⁶⁷: geométricas o puras y analíticas o modificadas.

- Geométricas o puras, donde la superficie de referencia se proyecta de forma geométrica directamente sobre un plano o una superficie desarrollable.
- Analíticas o modificadas, que resultan de la aplicación de funciones matemáticas complejas.

2.3.6.1. Proyecciones geométricas o puras

En las proyecciones geométricas, también llamadas puras, la superficie de referencia se proyecta geométricamente (es decir, según un haz de trayectorias que parten desde un punto común) sobre un plano o una superficie desarrollable sobre un plano.

Este grupo de proyecciones permite una subclasificación en base a criterios puramente geométricos. De este modo, dentro de las proyecciones de origen geométrico pueden establecerse dos grupos fundamentales: las proyecciones perspectivas y las proyecciones por desarrollo, según la superficie sobre la que se realiza la proyección sea un plano o una superficie desarrollable sobre un plano.

2.3.6.1.1. Proyecciones perspectivas o planas

Las proyecciones perspectivas se obtienen proyectando los diversos puntos de la superficie de referencia sobre un plano tangente o secante a ella, denominado plano del cuadro, según la dirección definida por un haz de rectas, llamadas visuales, que parten de un punto, denominado punto de vista o vértice de proyección. La intersección de la perpendicular al plano de proyección, que pasa por el centro geométrico de la superficie de referencia con dicho plano, recibe el nombre de centro o polo de la proyección.

La primera clasificación que puede hacerse de las proyecciones perspectivas es en función de si el plano del cuadro es tangente o secante a la superficie de referencia, obteniéndose respectivamente una

⁶⁶ Robinson, Arthur H.; Sale, Randall D.; Morrison, Joel L.; Muehrcke, Phillip C.: *Elementos de cartografía*, Ediciones Omega S.A., Barcelona, 1987. P. 84.

⁶⁷ Figueroa, Fernando: *Apuntes de cartografía aplicados a la navegación aérea*, Editorial Aeronáutica SUMAAS, Madrid, 1977. P. 25.

proyección perspectiva tangente o secante. Podría añadirse un tercer grupo, en el cual el plano fuera externo a la superficie, y denominar la proyección resultante como externa, pero no tendría demasiado sentido, ya que, como se verá, no aportaría ninguna diferencia excepto en la escala de la representación obtenida.

Otra clasificación que puede realizarse de las proyecciones perspectivas es la siguiente⁶⁸:

- De transformaciones positivas: cuando el punto de vista de la proyección se sitúa en el lado convexo de la superficie a representar.
- De transformaciones negativas: cuando el punto de vista de la proyección se sitúa en el lado cóncavo de la superficie a representar.

Si el vértice se encuentra en el interior de la superficie de referencia y se proyecta desde él una parte de la misma, el vértice se encontrará en su concavidad, y la imagen resultante sobre el plano será la invertida de la que se observaría desde el exterior (es decir, desde el lado cóncavo). Es como si se recurriera a un globo terráqueo transparente, en el que se haya dibujado la silueta de los continentes, y se encendiera una luz dentro. La imagen, que este proyectaría sobre una pared, sería la inversa de la que se vería desde fuera. Por este motivo se llaman transformaciones negativas. Lo mismo sucedería si el punto de vista fuese exterior a la esfera pero si se decidiera proyectar el hemisferio opuesto a la situación de éste.

Normalmente en las proyecciones perspectivas el punto de vista se sitúa sobre esta perpendicular, en este caso, reciben el nombre de perspectivas verticales. En las proyecciones perspectivas verticales tangentes el punto de tangencia entre la superficie de referencia y plano coincidirá con el centro de la proyección. Para aplicaciones particulares, puede situarse el punto de vista fuera de esta perpendicular, caso en el que se denominan proyecciones perspectivas inclinadas⁶⁹. El uso de las perspectivas inclinadas es tan escaso que, cuando se nombra una proyección perspectiva sin hacer referencia a si es vertical o inclinada, debe considerarse que se trata de la primera.

Continuando con las proyecciones perspectivas verticales, se puede realizar una clasificación de ellas en función de la posición del vértice respecto de la superficie de referencia⁷⁰:

- Gnomónicas: en las que el vértice de proyección coincide con el centro de la superficie.
- Estereográficas: en las que el vértice de proyección es un punto perteneciente a la superficie.
- Escenográficas: en las cuales el vértice de proyección se encuentra en un punto cualquiera distinto de los dos anteriores, y a una distancia finita del plano del cuadro.
- Ortográficas: en las cuales el vértice de proyección se encuentra en el infinito.

A su vez, puede realizarse una subclasificación de éstas según la posición del plano de proyección respecto a la superficie de referencia⁷¹:

⁶⁸ Snyder, John P.; Bugayevskiy, Lev M.: *Map Projections: A Reference Manual*, Taylor and Francis Inc., Bristol, London, 1995. P. 109.

⁶⁹ Snyder, John P.; Voxland, Philip M.: *An Album of Map Projections*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, United States Government Printing Office, Washington, 1989. Pp. 172 y 173.

⁷⁰ Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1990. P. 266.

⁷¹ VV.AA.: *Apuntes de cartografía. Fascículo primero. Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales*, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970. P. 4.

- Ecuatoriales⁷² o Polares: donde el plano del cuadro coincide con el del Ecuador (es decir, pasa por el centro de la superficie y es perpendicular a la línea de los polos) o es tangente a la superficie en uno de los polos, respectivamente. Las polares en ocasiones reciben el nombre de directas.
- Meridianas o Transversas: donde el plano del cuadro coincide con el de un meridiano o bien es tangente a la superficie en un punto del Ecuador, respectivamente.
- oblicuas u Horizontales: donde el plano del cuadro coincide con el de un círculo máximo distinto de Ecuador y meridianos o bien es tangente a la superficie en una latitud cualquiera distinta de las anteriores (latitud distinta a 0° o 90°), respectivamente.

Como puede apreciarse, la denominación para cada una de las categorías anteriores varía según el plano del cuadro sea tangente o secante a la superficie de referencia, sin embargo, en muchos textos esta paridad de nombres desaparece al contar ambos casos de cada grupo con características análogas.

2.3.6.1.2. Proyecciones por desarrollo

Las proyecciones por desarrollo son proyecciones geométricas en las cuales los puntos de la superficie de referencia se proyectan sobre una superficie desarrollable en un plano.

Al igual que las perspectivas, las proyecciones por desarrollo pueden ser de dos tipos:

- Tangentes: cuando la superficie desarrollable sobre la que se proyecta la superficie de referencia es tangente a ésta.
- Secantes: cuando la superficie desarrollable sobre la que se proyecta la superficie de referencia es secante a ésta.

En función del tipo de superficie sobre la que se realiza, las proyecciones por desarrollo se clasifican en⁷³:

- Cilíndricas: donde la superficie de proyección es un cilindro cuyo eje pasa por el centro geométrico de la superficie de referencia.
- Policilíndricas: donde la proyección se realiza sobre una serie de cilindros secantes a la superficie de referencia, normalmente a lo largo de varios paralelos, y cuyos ejes coinciden y pasan por el centro geométrico de la superficie de referencia. En ocasiones se consideran como un caso particular de proyección cilíndrica.
- Cónicas: donde la superficie de proyección es un cono de revolución cuyo eje pasa por el centro geométrico de la superficie de referencia.
- Policónicas: donde la proyección se realiza sobre una serie de conos tangentes o secantes a la superficie de referencia, normalmente a lo largo de varios paralelos, y cuyos ejes son

⁷² En algunos textos (por ejemplo: Raisz, Edwin: *Cartografía General*, Ediciones Omega, Barcelona, 7ª edición 1985. P. 96. Sanjosé Blasco, J.J.; García León, J.; López González, M.: *Introducción a las ciencias que estudian la geometría de la superficie terrestre: geodesia, cartografía, fotogrametría, topografía*, Bellisco Ediciones Técnicas y Científicas, Madrid, 2000. P. 106.) la calificación de ecuatoriales se les da a las proyecciones que en el presente trabajo se denominan transversas. Esto se debe a la consideración de que en las transversas el plano del cuadro es tangente a la esfera en un punto del Ecuador.

⁷³ VV.AA.: *Apuntes de cartografía. Fascículo primero. Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales*, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970. Pp. 4 a 6.

coincidentes entre si y pasan por el centro geométrico de la superficie de referencia. En ocasiones se consideran como un caso particular de proyección cónica.

- Poliédricas: donde la superficie de proyección es un poliedro cuyo centro geométrico coincide con el centro geométrico de la superficie de referencia, y cuyas caras son tangentes o secantes a la superficie de referencia.

Las proyecciones policónicas y policilíndricas suelen plantearse con un número infinito de conos o cilindros. Por ejemplo, para una policilíndrica, considerando que cada paralelo de la superficie de referencia se proyecta sobre un cilindro secante según ese mismo paralelo. En este caso existirían infinitos cilindros, ya que se partiría de un paralelo y se irían tomando incrementos diferenciales de latitud hacia el norte y hacia el sur. Este tipo de proyecciones realmente tendrían más cabida como analíticas que como geométricas, ya que en la práctica su construcción geométrica sería inviable.

Las proyecciones cónicas, policónicas, cilíndricas y policilíndricas admiten una subclasificación en función de la posición del cono o conos, o cilindro o cilindros, respecto de la superficie de referencia:

- Directas: si el eje del cono/s o cilindro/s coincide con el eje de rotación de la Tierra.
- Transversas: si dicho eje se encuentra sobre el plano del Ecuador.
- Horizontales u oblicuas: si el eje ocupa cualquier otra posición distinta de las anteriores.

En esta clasificación no se incluyen las proyecciones poliédricas, por no tener un eje de referencia, si bien es cierto que, en ocasiones (dentro de las proyecciones por desarrollo en las que se emplea un cubo como superficie de proyección) se consideran directas aquellas donde el centro de dos caras opuestas son atravesados por el eje de rotación de la superficie terrestre de referencia (o dicho de otro modo, el plano de dos caras opuestas es paralelo al del Ecuador).

2.3.6.2. Proyecciones analíticas o modificadas

Las proyecciones analíticas o modificadas, también llamadas puras, son aquellas que resultan de la aplicación de funciones matemáticas complejas, o si se prefiere, aquellas que no pueden obtenerse geoméricamente. El término modificadas se emplea, ya que en muchas ocasiones, las proyecciones analíticas son modificaciones de las geométricas.

Al contrario que las geométricas, las proyecciones analíticas no presentan ningún tipo de clasificación intuitiva. De hecho, el único principio claro que podría emplearse, es el de clasificarlas en función de la forma de sus funciones de paso (del tipo de (2.3.3) y (2.3.4)), pero sin demasiada utilidad⁷⁴.

2.4. ESTUDIO DE LAS DEFORMACIONES EN LOS SISTEMAS DE PROYECCIÓN

La construcción de una carta requerirá la selección de un sistema de proyección determinado.

Partiendo de la base de que es imposible desarrollar la superficie terrestre sobre un plano sin que sufra deformaciones, éstas siempre podrán controlarse hasta cierto punto en beneficio de la finalidad perseguida. Así, en un momento dado puede interesar mantener sobre la carta el paralelismo de los

⁷⁴ Un ejemplo de este tipo de clasificación puede encontrarse en: Tobler, Waldo Rudolph: *Map Transformations of Geographic Space*, thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, University of Washington, 1961. Pp. 18 a 21.

paralelos, la convergencia de los meridianos, la intersección perpendicular de paralelos y meridianos, etc. Entre las deformaciones que aparecen al realizar una representación cartográfica, denominadas anamorfosis, se pueden distinguir tres tipos básicos: de tipo angular, superficial y lineal, siendo su eliminación simultánea en estos tres campos incompatible.

En la clasificación de las deformaciones dentro de los sistemas de proyección cartográfica se ha hecho referencia a varios tipos de elementos, cuyo estudio diferencial permitirá conocer cómo se transforman las distancias, ángulos y superficies, al realizar su proyección desde la superficie de referencia al plano. Para realizar este estudio se deberá determinar el valor de estos elementos, tanto sobre la esfera o elipsoide de referencia, como sobre el plano de proyección, para poder así calcular los correspondientes módulos de deformación, lo que permitirá estudiar las deformaciones en una proyección concreta.

2.4.1. Cálculo de los elementos diferenciales sobre la superficie de referencia.

El estudio de estos elementos diferenciales está orientado a analizar cómo se transforman las longitudes, ángulos y superficies entre la superficie de referencia y sus transformados en el plano⁷⁵.

2.4.1.1. Cálculo de los elementos diferenciales sobre el elipsoide.

Se ha considerado un triángulo infinitesimal ADC sobre el elipsoide formado por dos pares de meridianos y paralelos infinitamente próximos.

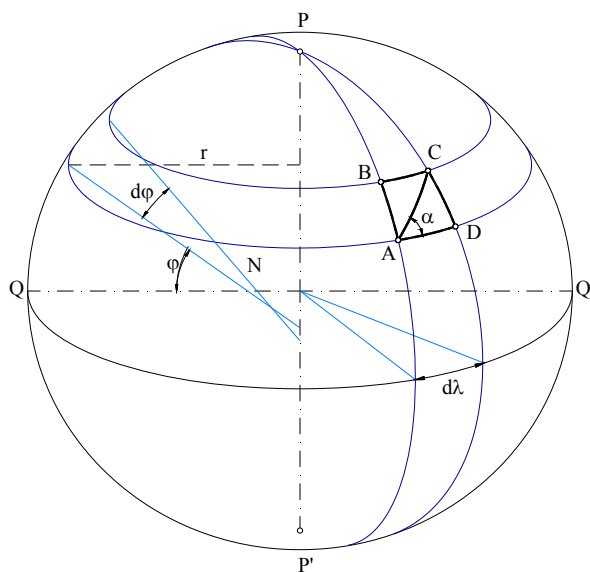


Figura 2.4.1. Triángulo infinitesimal sobre el elipsoide de referencia.

Considerando el vértice A, de coordenadas φ y λ , como origen de los elementos a estudiar, los elementos diferenciales de arco de meridiano CD y paralelo AD que forman dicho cuadrilátero serán:

$$CD = \rho d\varphi \quad (2.4.1)$$

$$AD = r d\lambda \quad (2.4.2)$$

⁷⁵ Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo Madrid, 1990. P.237.

Siendo:

$$r = N \cos \varphi$$

La expresión (2.4.2) queda en la forma:

$$AD = N \cos \varphi d\lambda \quad (2.4.3)$$

N y ρ son los radios de curvatura principales del elipsoide en el punto A.

Partiendo de esta base, los diferentes elementos buscados se podrán expresar de la siguiente forma:

2.4.1.1.1. Elemento lineal (ds)

Tomando como elemento lineal diferencial genérico la diagonal AC, y considerando el triángulo ADC como rectángulo plano, por su condición de infinitesimal:

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{CD^2 + AD^2} \\ ds &= \sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

2.4.1.1.2. Elemento angular (α)

Considerando el ángulo formado por CD y AD:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CD}{AD}$$

Sustituyendo los valores de (2.4.1) y (2.4.3):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi d\lambda} \\ \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi d\lambda} \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

2.4.1.1.3. Elemento superficial (dS)

Considerando el cuadrilátero infinitesimal como plano:

$$dS = \frac{1}{2} CD \cdot AD$$

Donde, con (2.4.1) y (2.4.3):

$$dS = \frac{1}{2} \rho N \cos \varphi d\varphi d\lambda \quad (2.4.6)$$

2.4.1.2. Cálculo de los elementos diferenciales sobre la esfera

Se ha considerado un triángulo infinitesimal ADC sobre la esfera, formado por dos pares de meridianos y paralelos infinitamente próximos⁷⁶.

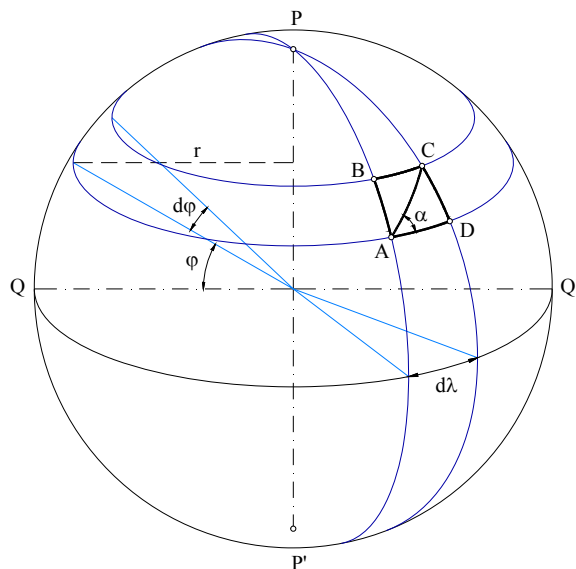


Figura 2.4.2. Triángulo infinitesimal sobre la esfera de referencia.

Considerando el vértice A, de coordenadas φ y λ , como origen de los elementos a estudiar, el radio r de curvatura de meridiano de latitud φ , y el radio R de la esfera de referencia (es decir, el radio de curvatura de los meridianos), los elementos diferenciales de arco de meridiano CD y paralelo AD que forman dicho triángulo serán:

$$CD = R d\varphi \quad (2.4.7)$$

$$AD = r d\lambda \quad (2.4.8)$$

Siendo:

$$r = R \cos \varphi$$

Las expresiones (2.4.7) y (2.4.8) quedan en la forma:

$$CD = R d\varphi \quad (2.4.9)$$

$$AD = R \cos \varphi d\lambda \quad (2.4.10)$$

Partiendo de esta base, los diferentes elementos buscados se podrán expresar de la siguiente forma:

2.4.1.2.1. Elemento lineal (ds)

Tomando como elemento lineal diferencial genérico la diagonal AC , y considerando el triángulo ADC como rectángulo plano, por su condición de infinitesimal:

⁷⁶Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo Madrid, 1990. P.238.

$$AC = \sqrt{CD^2 + AD^2}$$

$$ds = R \sqrt{d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2} \quad (2.4.11)$$

2.4.1.2.2. Elemento angular (α)

Considerando el ángulo formado por AC y AD:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CD}{AD}$$

Sustituyendo los valores de (2.4.9) y (2.4.10):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\varphi}{\cos \varphi d\lambda}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{d\varphi}{\cos \varphi d\lambda} \quad (2.4.12)$$

2.4.1.2.3. Elemento superficial (dS)

Considerando el cuadrilátero infinitesimal como plano:

$$dS = \frac{1}{2} CD \cdot AD$$

Donde, con (2.4.9) y (2.4.10):

$$dS = \frac{1}{2} R^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda \quad (2.4.13)$$

2.4.2. Cálculo de los elementos diferenciales en el plano

Supóngase que el triángulo anteriormente definido se proyecta sobre un plano en virtud de una correspondencia matemática del tipo:

$$\left. \begin{array}{l} x = f(\varphi, \lambda) \\ y = g(\varphi, \lambda) \end{array} \right\} \quad (2.4.14)$$

Donde f y g serán las funciones de paso del sistema de proyección adoptado, y siendo los puntos A', D' y C' los homólogos sobre el plano de los puntos A, D y C de la superficie de referencia, pueden expresarse las coordenadas cartesianas del punto A' en la forma⁷⁷:

$$\left. \begin{array}{l} x_{A'} = f(\varphi_A, \lambda_A) \\ y_{A'} = g(\varphi_A, \lambda_A) \end{array} \right\} \quad (2.4.15)$$

Siguiendo este razonamiento, la transformada del triángulo ADC sufrirá una serie de deformaciones que pueden estudiarse refiriéndolas a un sistema de coordenadas ortogonales en el plano

⁷⁷ Nótese que a partir de este momento la denominación del homólogo de un punto de la superficie de referencia sobre el plano se denotará por un apóstrofe. Así, el punto A' sobre el plano se corresponde con la proyección del punto A de la superficie.

de proyección. Para ello se toman dos ejes rectangulares OX y OY, correspondientes a la dirección del paralelo y del meridiano, de modo que el triángulo transformado A'D'C' puede adoptar un aspecto tal como el mostrado.

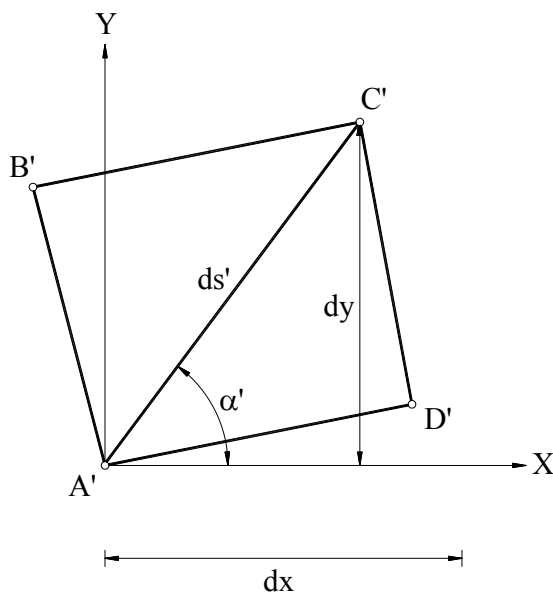


Figura 2.4.3. Cuadrilátero infinitesimal A'B'C'D' en el plano de proyección.

Partiendo del sistema definido puede determinarse el valor de los elementos diferenciales del modo que a continuación se expone:

2.4.2.1. Elemento lineal (ds')

Según lo expuesto de forma esquemática en la figura 2.4.3, las coordenadas cartesianas del punto C' ($x_{C'}$, $y_{C'}$) respecto de A' ($x_{A'}$, $y_{A'}$) serán:

$$\left. \begin{aligned} x_{C'} &= x_{A'} + dx \\ y_{C'} &= y_{A'} + dy \end{aligned} \right\} \quad (2.4.16)$$

De modo que:

$$ds' = A'C' = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (2.4.17)$$

Diferenciando las correspondencias de paso definidas en (2.4.14), se obtienen dx y dy en función de dφ y dλ:

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi \end{aligned} \right\} \quad (2.4.18)$$

Sustituyendo éstas en (2.4.17):

$$ds' = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi\right)^2}$$

$$ds' = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2\right] d\phi^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2\right] d\lambda^2 + 2\left[\frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}\right] d\phi d\lambda}$$

Expresión que puede simplificarse empleando coeficientes auxiliares de la forma:

$$\left. \begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.19)$$

De modo que:

$$ds' = \sqrt{E d\phi^2 + G d\lambda^2 + 2F d\phi d\lambda} \quad (2.4.20)$$

Aplicando la ecuación anterior y teniendo en cuenta que para los puntos de un mismo paralelo $d\phi = 0$ y que para los de un mismo meridiano $d\lambda = 0$, los lados A'D' y C'D' del triángulo tendrán los valores:

$$\left. \begin{aligned} A'D' &= \sqrt{G d\lambda^2} \\ C'D' &= \sqrt{E d\phi^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.21)$$

2.4.2.2. Elemento angular (α')

Considerando el ángulo α' formado por la diagonal A'C' con el eje x (figura 2.4.3):

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{dy}{dx} \quad (2.4.22)$$

Y conociendo la magnitud de dicha diagonal, definida en (2.4.17) ($A'C' = ds'$), puede obtenerse el valor del mismo ángulo en función de su seno o coseno:

$$\operatorname{sen} \alpha' = \frac{dx}{ds'} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \quad (2.4.23)$$

$$\operatorname{cos} \alpha' = \frac{dy}{ds'} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \quad (2.4.24)$$

Debe tenerse en cuenta que, en función de la proyección escogida, los lados del triángulo sobre el plano no tienen por qué coincidir con los ejes de coordenadas adoptado, tal y como se representa en el supuesto de la figura 2.4.3. Así, puede suponerse que el lado A'D' no coincidirá con el eje X, sino que formará con él cierto ángulo $\alpha_{A'D'}$, que se puede calcular recurriendo a la proyección del punto D' sobre el eje, tal y como se muestra en la figura 2.4.4.

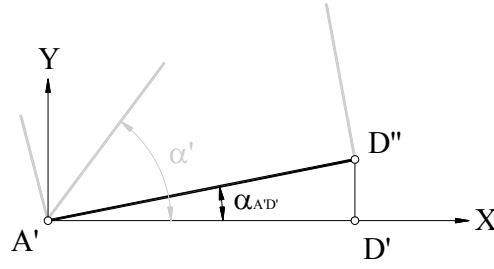


Figura 2.4.4. Determinación del ángulo $\alpha_{A'D'}$.

De donde se obtiene:

$$\operatorname{tg} \alpha_{A'D'} = \frac{D'D''}{A'D''} \quad (2.4.25)$$

Resulta evidente que teniendo los puntos A' y D' la misma latitud ϕ en la esfera, el segmento D'D'' corresponderá a la variación de la ordenada (sobre el eje y) del punto A', al variar su longitud hasta D', por tanto:

$$D'D'' = \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \quad (2.4.26)$$

Y análogamente:

$$A'D'' = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \quad (2.4.27)$$

De esta forma, sustituyendo (2.4.26) y (2.4.27) en la expresión (2.4.25), el ángulo buscado se obtendrá por:

$$\operatorname{tg} \alpha_{A'D'} = \frac{D'D''}{A'D''} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda} = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2.4.28)$$

O bien en función del seno, al conocer el lado A'D' (1.4.21):

$$\operatorname{sen} \alpha_{A'D'} = \frac{D'D''}{A'D'} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\sqrt{G} d\lambda^2} = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{1}{\sqrt{G}} \quad (2.4.29)$$

O en función del coseno:

$$\operatorname{cos} \alpha_{A'D'} = \frac{A'D''}{A'D'} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda}{\sqrt{G} d\lambda^2} = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{1}{\sqrt{G}} \quad (2.4.30)$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en la obtención del ángulo $\alpha_{A'D'}$ podría determinarse el valor del ángulo $\alpha_{A'B'}$ ⁷⁸, formado por el lado A'B' con el eje X (figura 2.4.5):

⁷⁸ En este caso se considerará el triángulo A'B'C' de la figura 2.4.3.

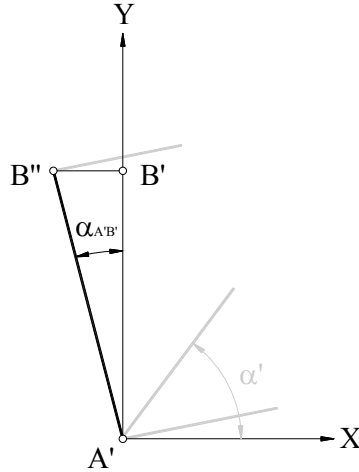


Figura 2.4.5. Determinación del ángulo $\alpha_{A'B'}$.

Las expresiones para el ángulo buscado en este caso serán análogas a las (2.4.28), (2.4.29), (2.4.30), pero referidas en esta ocasión al triángulo rectángulo formado por los puntos A'B'B'':

$$\operatorname{tg} \alpha_{A'B'} = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi}{\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}} \quad (2.4.31)$$

$$\operatorname{sen} \alpha_{A'B'} = \frac{B'B''}{A'B'} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi}{\sqrt{E} d\varphi^2} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{1}{\sqrt{E}} \quad (2.4.32)$$

$$\operatorname{cos} \alpha_{A'B'} = \frac{A'B''}{A'B'} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi}{\sqrt{E} d\varphi^2} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{1}{\sqrt{E}} \quad (2.4.33)$$

2.4.2.3. Elemento superficial (dS')

De la figura 2.4.3 se obtiene que la superficie del triángulo infinitesimal A'B'C' responderá a la expresión:

$$dS' = \frac{1}{2} A'B' \cdot A'D' \operatorname{sen}(\alpha_{A'B'} - \alpha_{A'D'}) \quad (2.4.34)$$

Operando y sustituyendo los valores de A'D' y A'B', dados por (2.4.21), así como los del seno y coseno de los ángulos $\alpha_{A'B'}$ y $\alpha_{A'D'}$, dados por (2.4.29), (2.4.30), (2.4.32) y (2.4.33):

$$dS' = A'B' \cdot A'D' \operatorname{sen}(\alpha_{A'B'} - \alpha_{A'D'}) = A'B' \cdot A'D' (\operatorname{sen} \alpha_{A'B'} \operatorname{cos} \alpha_{A'D'} - \operatorname{cos} \alpha_{A'B'} \operatorname{sen} \alpha_{A'D'})$$

$$dS' = \frac{1}{2} \sqrt{E} \sqrt{G} d\varphi d\lambda \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{1}{\sqrt{G}} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{1}{\sqrt{G}} \right)$$

$$dS' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) d\varphi d\lambda \quad (2.4.35)$$

2.4.3. Cálculo de los módulos de deformación de una proyección por comparación de elementos diferenciales de la superficie de referencia con sus homólogos sobre el plano

Una vez obtenidos los diferentes elementos necesarios para el estudio de las anamorfosis lineales, angulares y superficiales, en base a un triángulo infinitesimal sobre la superficie de referencia y sobre su proyectado en el plano, no habrá más que sustituir dichos elementos en las expresiones que determinan los diferentes módulos de deformación de la proyección, para calcular sus respectivos valores⁷⁹.

2.4.3.1. Cálculo de los módulos de deformación de una proyección por comparación de elementos diferenciales del elipsoide de referencia con sus homólogos sobre el plano

2.5.3.1.1. Módulo de deformación lineal

El cálculo del módulo de deformación lineal de un sistema de proyección cualquiera se partirá de la expresión genérica (2.3.10), en la que se sustituyen los valores de los elementos diferenciales ds y ds' por sus expresiones previamente calculadas (2.4.4) y (2.4.20):

$$K = \frac{ds'}{ds}$$

$$K = \frac{\sqrt{E d\varphi^2 + G d\lambda^2 + 2F d\varphi d\lambda}}{\sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2}} \quad (2.4.36)$$

2.4.3.1.2. Módulo de deformación angular

Sustituyendo en la expresión (2.3.8) los valores del ángulo α entre dos elementos diferenciales en el elipsoide (AD y AC en este caso), dado por la expresión (2.4.5), y del ángulo α' correspondiente a su transformado sobre el plano (ángulo entre A'D' y A'C'), dado por (2.4.22), se obtiene:

$$A = \alpha' - \alpha$$

$$A = \arctg \frac{dy}{dx} - \arctg \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi d\lambda} \quad (2.4.37)$$

Debe hacerse notar que en la expresión anterior se supone que el valor de ángulo α' , transformado de α , proviene de la expresión (2.4.22), que como puede comprobarse en la figura 2.4.3 será cierto para el supuesto en que la dirección del lado A'D' coincidiera con el del eje OX. De no ser así, la transformada del ángulo α corresponderá a la suma de α' (2.4.22) y $\alpha_{A'D'}$ (2.4.28).

2.4.3.1.3. Módulo de deformación superficial

Para el cálculo del módulo de deformación superficial bastará con sustituir en la expresión (2.3.9) los valores de los elementos dS y dS' , obtenidos por (2.4.6) y (2.4.35) respectivamente.

⁷⁹ Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo Madrid, 1990. P.242.

$$\sigma = \frac{dS'}{dS}$$

$$\sigma = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{2 \rho N \cos \varphi} \quad (2.4.38)$$

2.4.3.2. Cálculo de los módulos de deformación de una proyección por comparación de elementos diferenciales de la esfera de referencia con sus homólogos sobre el plano

2.4.3.2.1. Módulo de deformación lineal

En cálculo del módulo de deformación lineal de un sistema de proyección cualquiera se partirá de la expresión genérica (2.3.10), en la que se sustituyen los valores de los elementos diferenciales ds y ds' por sus expresiones previamente calculadas (2.4.11) y (2.4.20):

$$K = \frac{ds'}{ds}$$

$$K = \frac{\sqrt{E d\varphi^2 + G d\lambda^2 + 2F d\varphi d\lambda}}{R \sqrt{d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2}} \quad (2.4.39)$$

2.4.3.2.2. Módulo de deformación angular

Sustituyendo en la expresión (2.3.8) los valores del ángulo α entre dos elementos diferenciales en la esfera (AD y AC en este caso), dado por la expresión (2.4.12), y del ángulo α' correspondiente a su transformado sobre el plano (ángulo entre A'D' y A'C'), dado por (2.4.22), se obtiene:

$$A = \alpha' - \alpha$$

$$A = \arctg \frac{dy}{dx} - \arctg \frac{d\varphi}{\cos \varphi d\lambda} \quad (2.4.40)$$

2.4.3.2.3. Módulo de deformación superficial

Para el cálculo del módulo de deformación superficial bastará con sustituir en la expresión (2.3.9) los valores de los elementos dS y dS' , obtenidos por (2.4.13) y (2.4.35) respectivamente.

$$\sigma = \frac{dS'}{dS}$$

$$\sigma = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{2 R^2 \cos \varphi} \quad (2.4.41)$$

2.4.4. Elipse indicatriz de Tissot

Si se considera sobre el elipsoide una circunferencia infinitesimal, de radio ds , centrada en el punto $A (\varphi, \lambda)$, tal y como se muestra en la figura 2.4.6⁸⁰; la proyección de dicha circunferencia diferencial en el plano vendrá dada por la expresión (2.4.20), que se corresponde con la de una elipse. Así, un círculo diferencial sobre el elipsoide se transforma, por aplicación de las funciones de paso (2.4.14), en una elipse en el plano, como se puede ver en la figura 2.4.7.

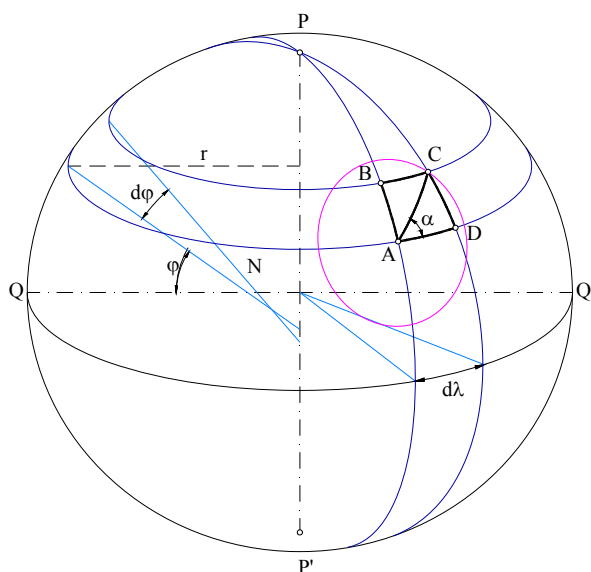


Figura 2.4.6. Circunferencia infinitesimal de radio ds sobre el elipsoide.

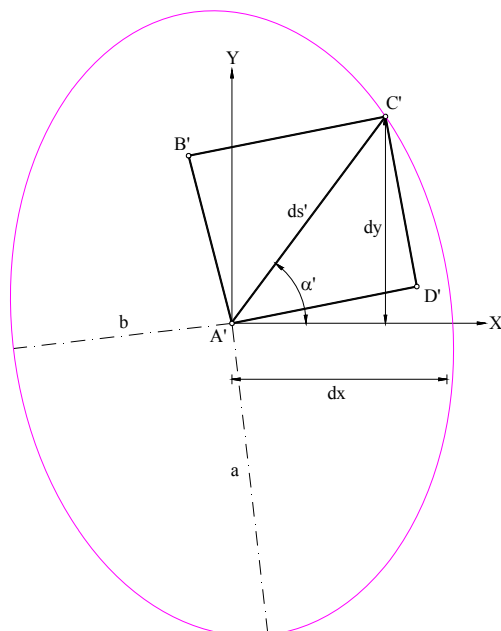


Figura 2.4.7. Elipse representativa de la transformada de un círculo del elipsoide de radio diferencial ds .

⁸⁰ Figura en la que se muestra la circunferencia infinitesimal de radio ds sin una proporción real, exagerada para cumplir fines explicativos.

Para realizar el estudio general de las deformaciones que una proyección cartográfica introduce en los elementos transformados, se utilizara el planteamiento anterior, llevando a cabo la ley de variación del módulo de deformación lineal para todas las direcciones alrededor de un punto en cuestión⁸¹.

Considerando un círculo infinitesimal de radio unidad y centro en un punto O sobre la superficie de referencia; para determinar su transformada en el plano basta con ir considerando los valores proporcionados por la expresión (2.4.20) para todas las direcciones obtenidas al ir girando el radio del círculo ds los 360° alrededor del punto O, y unir los extremos de los segmentos transformados. En general, la curva obtenida de este modo será una elipse, cuya ecuación vendrá dada implícitamente por dicha expresión (2.4.20) y que se conoce como elipse indicatriz de Tissot⁸².

El desarrollo y aplicación de la elipse indicatriz se basa en el teorema formulado por Tissot que postula que "En cada punto regular de la superficie origen hay dos curvas con tangentes perpendiculares entre sí, y sólo dos, si los ángulos no se conservan, tales que sus representaciones sobre la carta son también ortogonales, de manera que, tanto sobre la superficie como sobre el plano existe un sistema de trayectorias ortogonales y si la representación no conserva los ángulos, existe uno solo cuyas proyecciones sobre la otra superficie son también ortogonales"⁸³.

Este teorema puede demostrarse de forma gráfica, considerando las tangentes CE y OD a dos geodésicas que pasen por el centro del círculo infinitesimal en el elipsoide, de forma que resulten ortogonales entre sí. En general, sus correspondientes transformada sobre el plano C'E' y O'D' no serán perpendiculares, tal y como se muestra en la figura 2.4.8.

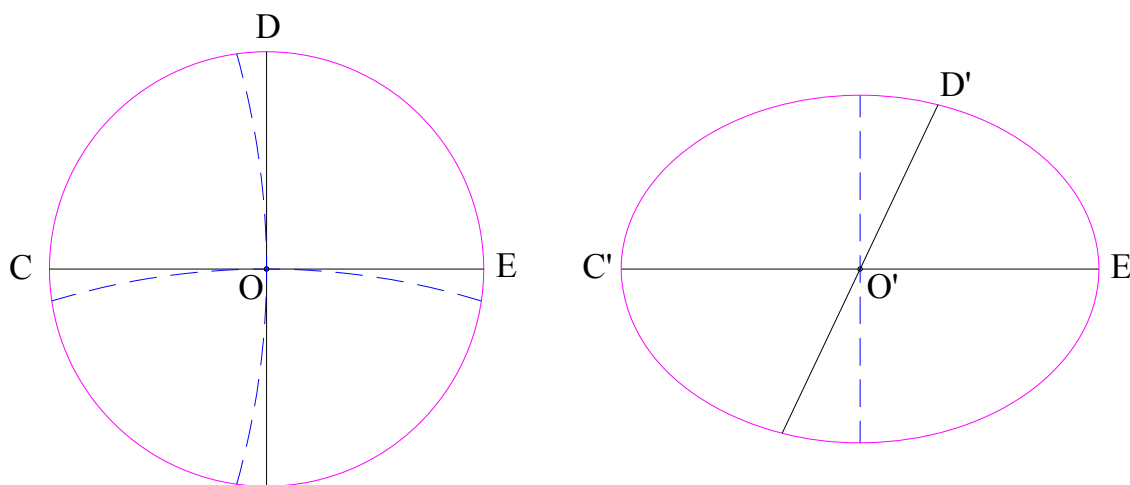


Figura 2.4.8. Representación de la transformación de dos elementos perpendiculares diferenciales CE y OD sobre el elipsoide.

En la figura anterior puede verse que siendo el ángulo COD recto, su transformado, el ángulo C'O'D', es obtuso, mientras que el D'O'E' será agudo. Supongamos que el ángulo recto COD se hace girar en sentido retrógrado hasta coincidir con el DOE. Por la continuidad de la representación su homólogo en el plano variará con continuidad desde C'O'D' a D'O'E', es decir, variará desde un ángulo obtuso a uno agudo, por tanto, existirá al menos una posición intermedia en la cual las dos transformadas de las rectangulares en el elipsoide han sido rectangulares en el plano. Es decir, existirá al menos una

⁸¹ Millán Gamboa, José Manuel: *Cartografía náutica*, JM Ediciones Cádiz, 2006. P.73.

⁸² Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo Madrid, 1990. P.245.

⁸³ Sevilla, M.J: *Cartografía Matemática*, Madrid, 1986. P.5.

posición formada por dos direcciones ortogonales ξ' , η' , correspondientes a otras dos direcciones ξ , η de la superficie de referencia, también ortogonales, y a las que se les denomina direcciones principales de la elipse⁸⁴. Siendo a' y b' las dilataciones lineales referentes a las direcciones principales, el valor de los semiejes de la elipse responderá a las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} d\xi' &= a' d\xi \\ d\eta' &= b' d\eta \end{aligned} \right\} \quad (2.4.42)$$

Comparando la elipse indicatriz con la circunferencia infinitesimal de la cual es transformada, pueden analizarse las deformaciones sufridas. Para ello se recurre a situar la carta (donde se halla representada la elipse indicatriz) sobre un plano tangente a la superficie de referencia en el punto O (centro de la circunferencia infinitesimal), de modo que los centros de elipse O' y circunferencia O coincidan, y que la dirección O' ξ' coincida con O ξ , y O' η' con O η , de modo que a un elemento lineal infinitesimal OP = ds, le corresponda en la carta OP' = ds' (siendo P un punto cualquiera del círculo infinitesimal considerado sobre el elipsoide, y P' su homólogo en el plano), tal y como puede verse en la figura 2.4.9⁸⁵.

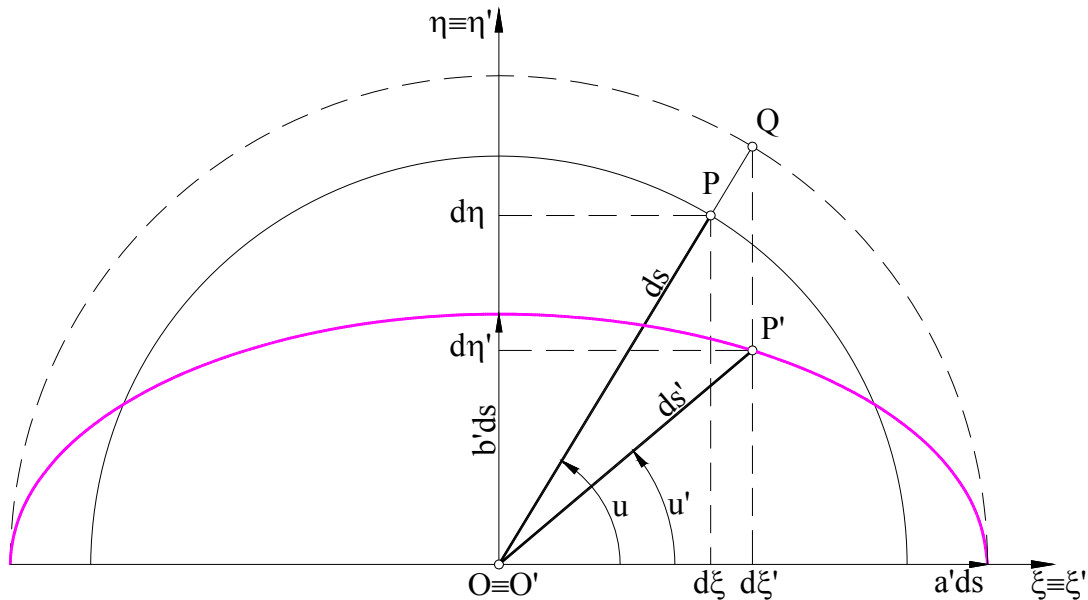


Figura 2.4.9. Análisis de la elipse indicatriz de Tissot. Comparación de ésta con la circunferencia infinitesimal de la cual es transformada.

Considérese en la figura anterior un punto Q en la dirección OP, tal que:

$$OQ = a' ds \quad (2.4.43)$$

Con la primera de las expresiones de (2.4.42), y en función del planteamiento anterior, se obtiene que la abscisa del punto Q será $d\xi'$, es decir, la misma que la de P'

Si u es el ángulo que OP forma con la dirección O ξ , y u' su homólogo P'O' ξ' :

⁸⁴ Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo Madrid, 1990. P.246.

⁸⁵ Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P.; A. Trejo, C.: *Análisis Matemático. Volumen II*, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 7ª edición 1968. P.336.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} u &= \frac{d\eta}{d\xi} \\ \operatorname{tg} u' &= \frac{d\eta'}{d\xi'} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.44)$$

Cuya razón, teniendo en cuenta (2.4.42), será⁸⁶:

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{d\eta' d\xi}{d\eta d\xi'} = \frac{b'}{a'} \quad (2.4.45)$$

Expresión que resulta independiente de la posición particular del punto P considerado, y de la cual se deduce que las coordenadas de Q, que verificarán la ecuación de la circunferencia de centro O y radio a'ds, son (dξ', (a'/b') dη').

Supóngase ahora que el plano tangente a la superficie se levanta sobre el de la carta, girando alrededor del eje Oξ un ángulo igual al arco coseno del ángulo b'/a', todos los puntos P' que se consideren podrán admitirse como proyecciones ortogonales de los correspondientes puntos Q girados de este modo, y por tanto, la circunferencia del plano tangente de radio a'ds, se proyectará ortogonalmente en una elipse de semiejes a'ds y b'ds. Es decir, se cumple:

$$\frac{1}{a'^2} \left(\frac{d\xi'}{ds} \right)^2 + \frac{1}{b'^2} \left(\frac{d\eta'}{ds} \right)^2 = 1$$

Lo que prueba que P' está en la elipse de semiejes a'ds y b'ds. Por tanto, a una circunferencia infinitesimal de centro O en la superficie de referencia y radio ds constante, y tomado como unidad (ds = 1), le corresponde sobre la carta la denominada elipse indicatriz de Tissot, de centro O' y semiejes a' y b'. Dicha elipse proporciona la ley de variación de la dilatación lineal K, desde un máximo a', hasta un mínimo en b', valores límite que corresponden a las direcciones principales⁸⁷.

2.4.4.1. Alteración lineal

En la figura 2.4.9 se ha admitido la existencia de dos direcciones ξ y η ortogonales sobre el círculo infinitesimal de la superficie de referencia, las cuales se corresponderían con otras dos ξ' y η', igualmente ortogonales en el plano, y definitorias de las direcciones de los ejes de la elipse indicatriz. De esta forma, y, siendo ambas direcciones coincidentes y concurrentes en el punto O (O ≡ O'), pueden emplearse como si de un sistema de ejes cartesianos se tratara y referir las posiciones de los puntos pertenecientes tanto al círculo como a la elipse indicatriz sobre él. Así, el punto P tendrá de coordenadas (dξ, dη), y su homólogo P' (dξ', dη'), tal y como puede verse en la figura 2.4.9.

Siendo los triángulos OPdξ y OQdξ' semejantes, se obtendrá que:

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{d\xi'}{a' ds}$$

⁸⁶ VV.AA.: *Apuntes de cartografía. Fascículo primero, Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales*, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970. P.32.

⁸⁷ Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P.; A. Trejo, C.: *Análisis Matemático. Volumen II*, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 7ª edición 1968. P.337.

Donde siendo $ds = 1$:

$$d\xi' = a' d\xi \quad (2.4.46)$$

De forma análoga, y siendo los triángulos $OPd\eta$ y $OCd\eta'$ igualmente semejantes:

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{d\eta'}{b' ds}$$

De donde:

$$d\eta' = a' d\eta \quad (2.4.47)$$

Continuando con el mismo planteamiento y considerando el segmento OP (de magnitud $ds = 1$), pueden expresarse las coordenadas del punto P en la forma:

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= \cos u \\ d\eta &= \sin u \end{aligned} \right\}$$

De las cuales, considerando (2.4.46) y (2.4.47), se obtienen las coordenadas de P' :

$$\left. \begin{aligned} d\xi' &= a' \cos u \\ d\eta' &= b' \sin u \end{aligned} \right\} \quad (2.4.48)$$

Obteniendo finalmente la magnitud ds' :

$$ds' = \sqrt{d\xi'^2 + d\eta'^2} = \sqrt{a'^2 \cos^2 u + b'^2 \sin^2 u} \quad (2.4.49)$$

Luego el módulo de deformación lineal (2.3.10), para una dirección definida por un ángulo u , y siendo $ds = 1$, será⁸⁸:

$$K = \frac{ds'}{ds}$$

$$K = \sqrt{a'^2 \cos^2 u + b'^2 \sin^2 u} \quad (2.4.50)$$

2.4.4.2. Alteración angular

Volviendo a la figura 2.4.9, puede verse que la anamorfosis angular del ángulo u , vendrá dada por $A = u' - u$ (2.3.8), y desarrollando la expresión (2.4.45), se obtiene:

$$\operatorname{tg} u' = \frac{b'}{a'} \operatorname{tg} u \quad (2.4.51)$$

Expresión que puede referirse al seno de la diferencia de ángulos en la forma⁸⁹:

$$\frac{\operatorname{sen}(u'+u)}{\operatorname{sen}(u'-u)} = \frac{\operatorname{tg} u' + \operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} u' - \operatorname{tg} u} = \frac{b' + a'}{b' - a'}$$

⁸⁸ Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo Madrid, 1990. P.249.

⁸⁹ VV.AA.: *Apuntes de cartografía*. Fascículo primero, Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970. P.33.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(u'-u) &= \frac{b'-a'}{b'+a'} \operatorname{sen}(u'+u) \\ \operatorname{sen} A &= \frac{b'-a'}{b'+a'} \operatorname{sen}(u'+u)\end{aligned}\quad (2.4.52)$$

O bien, en función de la tangente del ángulo u , considerando la relación trigonométrica:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(u'-u) &= \frac{\operatorname{tg} u' - \operatorname{tg} u}{1 + \operatorname{tg} u' \operatorname{tg} u} \\ \operatorname{tg} A &= \frac{(b'-a') \operatorname{tg} u}{a' + b' \operatorname{tg}^2 u}\end{aligned}\quad (2.4.53)$$

Las expresiones (2.4.52) y (2.4.53) proporcionarán el módulo de deformación angular para un cierto ángulo u ⁹⁰.

La máxima alteración se producirá cuando el valor del seno de $(u'+u)$ sea máximo, en decir, cuando dicha suma sea de 90° :

$$\operatorname{sen} A_{\max} = \frac{b'-a'}{b'+a'} \quad (2.4.54)$$

Denominando U y U' a los valores de los ángulos u y u' correspondientes a la máxima alteración angular⁹¹:

$$A_{\max} = U' - U \quad (2.4.55)$$

Siendo:

$$U' = 90^\circ - U$$

De la expresión (2.4.51) se obtiene:

$$\left. \begin{aligned}\operatorname{tg} U &= \sqrt{\frac{a'}{b'}} \\ \operatorname{tg} U' &= \sqrt{\frac{b'}{a'}}\end{aligned}\right\} \quad (2.4.56)$$

2.4.4.3. Alteración superficial

El círculo infinitesimal sobre la superficie de centro O y radio ds tendrá un área de πds^2 , y la correspondiente elipse indicatriz sobre la carta de centro O' y semiejes $a'ds$ y $b'ds$ tendrá un área de $\pi a'b'ds^2$. Por tanto, la dilatación areolar (2.3.9) vendrá dada por⁹²:

⁹⁰ Análogamente a (2.4.53), la anamorfosis angular se podría expresar en función del ángulo u' :

$$\operatorname{tg} A = \frac{(b'+a') \operatorname{tg} u'}{b'+a' \operatorname{tg}^2 u'}$$

⁹¹ Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo Madrid, 1990. P.252.

⁹² Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P.; A. Trejo, C.: *Análisis Matemático. Volumen II*, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 7ª edición 1968. P.338.

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = \frac{\text{Sup. elipse indicatriz}}{\text{Sup. círculo infinitesimal}} = a' b' \quad (2.4.57)$$

Donde para el caso particular de una proyección equivalente:

$$\sigma = 1$$

Por tanto, una condición de equivalencia será:

$$a' = \frac{1}{b'} \quad (2.4.58)$$

2.4.4.4. Cálculo de los semiejes de la elipse indicatriz

A la hora de determinar los diferentes módulos de deformación, se pudo ver que es necesario conocer el valor de los semiejes de la elipse de indicatriz a' y b' , para ello debe partirse del cálculo de los módulos de deformación lineal a lo largo de los paralelos y meridianos, que se denominarán k y h respectivamente.

Considerando la superficie de referencia elipsoidal, y designando en ésta al radio de curvatura del paralelo como r y al del meridiano como ρ , el elemento de arco infinitesimal $OP = ds$ (figura 2.4.9) responderá a la ecuación (2.4.4):

$$ds = \sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2}$$

Donde $r d\lambda$ es el elemento de arco de paralelo, y $\rho d\varphi$ el elemento de arco de meridiano.

Siendo $d\tau$ el elemento diferencial de arco de la transformada del paralelo y $d\mu$ el elemento diferencial de arco de la transformada del meridiano para una proyección cartográfica genérica definida por expresiones del tipo de (2.4.4). De este modo, las proyecciones del elemento de paralelo $d\tau$ sobre el sistema de coordenadas cartesianas ortogonales en la carta (sobre los ejes x e y) serán⁹³:

$$\left. \begin{aligned} x_{\lambda} d\lambda &= \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \\ y_{\lambda} d\lambda &= \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (2.4.59)$$

Del mismo modo, las proyecciones del elemento de meridiano $d\mu$ serán:

$$\left. \begin{aligned} x_{\varphi} d\varphi &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \\ y_{\varphi} d\varphi &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.4.60)$$

Así, siendo:

⁹³ Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P.; A. Trejo, C.: *Análisis Matemático. Volumen II*, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 7ª edición 1968. P.338.

$$\left. \begin{aligned} d\tau &= \sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2} \\ d\mu &= \sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2} \end{aligned} \right\}$$

Se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} d\tau &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2} d\lambda \\ d\mu &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.4.61)$$

Por otra parte, las dilataciones lineales a lo largo del paralelo y meridiano de un punto P (figura 2.4.9), k y h respectivamente, responderán a la forma:

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{d\tau}{r d\lambda} \\ h &= \frac{d\mu}{\rho d\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.62)$$

Y considerando (2.4.61):

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2} \\ h &= \frac{1}{\rho} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.63)$$

Expresiones que pueden simplificarse con ayuda de los coeficientes auxiliares G y E, vistos en (2.4.19):

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{1}{r} \sqrt{G} \\ h &= \frac{1}{\rho} \sqrt{E} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.64)$$

Tomando ahora dos direcciones perpendiculares cualquiera u_1 y u_2 , en la superficie de referencia a partir del punto O, cuyas representadas serán dos diámetros de la elipse indicatriz de longitudes ds_1' y ds_2' , y formen entre sí un ángulo α' . Si sus respectivos módulos de deformación lineal son K_1 y K_2 , en virtud de ser $ds = 1$ y de (3.10):

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= ds_1' \\ K_2 &= ds_2' \end{aligned} \right\}$$

De este modo, aplicando (2.4.50) a ambos diámetros:

$$\left. \begin{aligned} K_1^2 &= a'^2 \cos^2 u_1 + b'^2 \sin^2 u_1 \\ K_2^2 &= a'^2 \cos^2 u_2 + b'^2 \sin^2 u_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.65)$$

Teniendo en cuenta que los ángulos u_1 y u_2 son perpendiculares:

$$\text{sen}^2 u_1 = \cos^2 u_2$$

Con lo cual, sustituyendo en (2.4.65):

$$\left. \begin{aligned} K_1^2 &= a'^2 \cos^2 u_1 + b'^2 \text{sen}^2 u_1 \\ K_2^2 &= a'^2 \text{sen}^2 u_1 \cos^2 u_2 + b'^2 \cos^2 u_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.66)$$

Expresiones que sumadas miembro a miembro:

$$K_1^2 + K_2^2 = a'^2 + b'^2 \quad (2.4.67)$$

Ecuación esta última que responde al primer teorema de Apolonio⁹⁴, demostrándose así que las direcciones correspondientes a u_1 y u_2 en la carta, a partir del punto O' , u_1' y u_2' , vendrán dadas por dos diámetros conjugados de la elipse indicatriz de Tissot⁹⁵, cuyas longitudes serán los respectivos módulos de deformación lineal K_1 y K_2 y formarán entre sí un ángulo $\alpha' = A_1 + 90^\circ$ (en virtud de (2.3.8) y al ser $\alpha = 90^\circ$), tal como puede verse de forma gráfica en la figura 2.4.10⁹⁶.

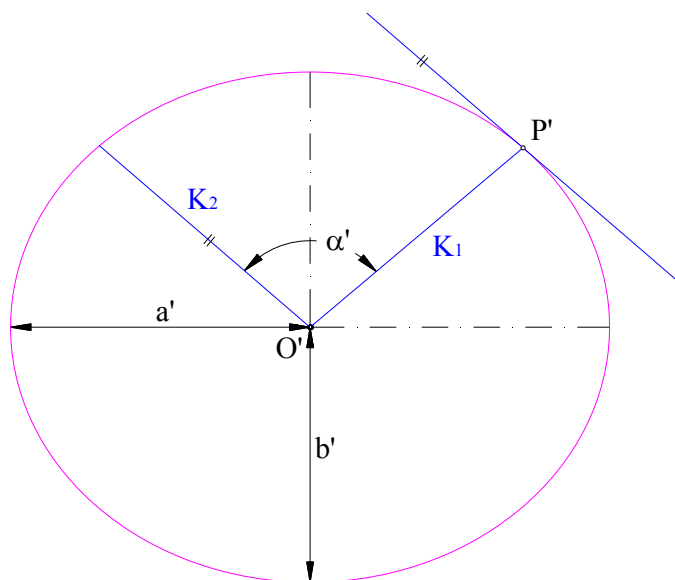


Figura 2.4.10. Ejemplo de dos diámetros conjugados de la elipse indicatriz de Tissot para la aplicación de los teoremas de Apolonio.

Para la deducción del segundo teorema de Apolonio, retomando de nuevo la figura 2.4.9, en el triángulo $O'P'd\xi'$ se encuentra que:

$$\left. \begin{aligned} \cos u' &= \frac{d\xi'}{ds'} \\ \text{sen } u' &= \frac{d\eta'}{ds'} \end{aligned} \right\}$$

⁹⁴ VV.AA.: Apuntes de cartografía. Fascículo primero, Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970. P.36.

⁹⁵ Diámetros conjugados son aquellos que cumplen que la tangente a la elipse por el extremo de uno de ellos es paralela al otro.

⁹⁶ Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo Madrid, 1990. P.247.

Expresiones en las cuales, sustituyendo los valores de $d\xi'$ y $d\eta'$ de (2.4.48):

$$\left. \begin{aligned} ds' \cos u' &= a' \cos u \\ ds' \sin u' &= b' \sin u \end{aligned} \right\} \quad (2.4.68)$$

Expresiones que aplicándose a los diámetros conjugados de la elipse indicatriz con los que se ha estado trabajando proporcionan las siguientes ecuaciones:

$$K_1 \cos u_1' = a' \cos u_1 \quad (2.4.69)$$

$$K_1 \sin u_1' = b' \sin u_1 \quad (2.4.70)$$

$$K_2 \cos u_2' = a' \cos u_2 \quad (2.4.71)$$

$$K_2 \sin u_2' = b' \sin u_2 \quad (2.4.72)$$

Multiplicando entre sí las expresiones (2.4.69) y (2.4.72) por una parte, y las (2.4.70) y (2.4.71) por otra, se obtiene:

$$K_1 K_2 \cos u_1' \sin u_2' = a' b' \cos u_1 \sin u_2 \quad (2.4.73)$$

$$K_1 K_2 \sin u_1' \cos u_2' = a' b' \sin u_1 \cos u_2 \quad (2.4.74)$$

Restando miembro a miembro (2.4.73) y (2.4.74):

$$\begin{aligned} K_1 K_2 (\cos u_1' \sin u_2' - \sin u_1' \cos u_2') &= a' b' (\cos u_1 \sin u_2 - \sin u_1 \cos u_2) \\ K_1 K_2 \sin(u_2' - u_1') &= a' b' \sin(u_2 - u_1) \end{aligned} \quad (2.4.75)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left. \begin{aligned} u_2 - u_1 &= 90^\circ \\ u_2' - u_1' &= \alpha' \end{aligned} \right\}$$

La expresión (2.4.75) tomará la forma:

$$K_1 K_2 \sin \alpha' = a' b' \quad (2.4.76)$$

Ecuación que verifica el teorema de las áreas en la elipse o segundo teorema de Apolonio⁹⁷.

De (2.4.76) se obtiene de forma inmediata:

$$\begin{aligned} K_1 K_2 \sin(A_1 + 90^\circ) &= a' b' \\ K_1 K_2 \cos A_1 &= a' b' \end{aligned} \quad (2.4.77)$$

Si se designa por A_0 la alteración que sufre en la carta el ángulo formado por el meridiano y el paralelo en la superficie terrestre (es decir, 90°), para este caso particular las ecuaciones del teorema de Apolonio adoptarán la forma⁹⁸:

⁹⁷ VV.AA.: Apuntes de cartografía. Fascículo primero, Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970. P.37.

⁹⁸ Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P.; A. Trejo, C.: *Análisis Matemático. Volumen II*, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 7ª edición 1968. P.338-339.

$$\left. \begin{aligned} h k \cos A_o &= a' b' \\ h^2 + k^2 &= a'^2 + b'^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.78)$$

Para trabajar más cómodamente en las expresiones que permitan determinar los semiejes a' y b' , se puede recurrir al siguiente planteamiento. Se tiene en este momento un rectángulo infinitesimal sobre la superficie terrestre de lados correspondientes a los elementos diferenciales de paralelo y meridiano, $r d\lambda$ y $\rho d\phi$, de área:

$$dS = r d\lambda \rho d\phi$$

Superficie que se corresponderá en la carta a la del paralelogramo infinitesimal abarcado por los segmentos dirigidos $d\tau$ y $d\mu$, que en función de (2.4.35) será⁹⁹:

$$dS' = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \phi} \right) d\phi d\lambda$$

Por tanto, la dilatación superficial (2.4.57) será:

$$\sigma = \frac{1}{r \rho} \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \phi} \right) = a' b' \quad (2.4.79)$$

Con esta última expresión, y las deducidas del teorema de Apolonio (2.4.78), se puede deducir la suma y resta de los semiejes de la elipse indicatriz:

$$(a' + b')^2 = a'^2 + b'^2 + 2 a' b' = h^2 + k^2 + 2\sigma$$

$$(a' + b')^2 = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 \quad (2.4.80)$$

$$(a' - b')^2 = a'^2 + b'^2 - 2 a' b' = h^2 + k^2 - 2\sigma$$

$$(a' - b')^2 = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial x}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial y}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 \quad (2.4.81)$$

Conocida la ley matemática que define la proyección con la cual se trabaje, definida por expresiones del tipo (2.4.14), y los radios de curvatura de paralelos y meridianos en la superficie de referencia, resolviendo estas dos últimas ecuaciones (2.4.80) y (2.4.81) se obtienen los valores de a y b , semiejes de la elipse indicatriz de Tissot.

Del mismo modo, partiendo de las expresiones (2.4.63), (2.4.78), y (2.4.79), se puede obtener fácilmente la alteración A_o que sufre en la carta el ángulo formado por el meridiano y el paralelo en la superficie terrestre:

$$\cos A_o = \frac{a' b'}{h k} = \frac{\sigma}{h k} \quad (2.4.82)$$

2.4.5. Condiciones de conformidad de Cauchy–Riemann

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son unas expresiones que también establecen las condiciones de conformidad en una representación cartográfica¹⁰⁰.

La propiedad de conformidad de una proyección le atribuye a ésta un gran valor para la resolución de los problemas de la navegación, ya que los ángulos medidos sobre ella coincidirán con los reales. Es por ello que resulta interesante determinar cuáles serán las condiciones que debe cumplir una proyección para que sea considerada conforme.

Una característica primordial de las representaciones conformes es que en ellas la elipse indicatriz de Tissot se transformará en una circunferencia de radio:

$$ds' = a' = b'$$

Este hecho se puede demostrar fácilmente partiendo de la expresión (2.4.51). En ella, y teniendo en cuenta que en las representaciones conformes los ángulos se conservan ($u = u'$), se comprueba que los semiejes de la elipse indicatriz se igualan ($a' = b'$), transformándose ésta en una circunferencia. Siendo así, la conformidad de una proyección significará que, en un punto cualquiera, el módulo de deformación lineal será constante ($K = \text{cte.}$) para todas las direcciones que se consideren.

Partiendo de la expresión del módulo de deformación lineal (2.4.36) en la forma:

$$K^2 = \frac{E d\varphi^2 + G d\lambda^2 + 2F d\varphi d\lambda}{\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2}$$

Y dividiendo entre el término: $r^2 d\lambda^2$, se obtiene:

$$K^2 = \frac{\frac{E d\varphi^2}{r^2 d\lambda^2} + \frac{G}{r^2} + \frac{2F d\varphi}{r^2 d\lambda}}{\frac{F \rho^2 d\varphi^2}{r^2 d\lambda^2} + 1} \quad (2.4.83)$$

A su vez, si se considera la expresión (2.4.5) en la forma (cociente entre (2.4.1) y (2.4.2)):

$$\text{tg } \alpha = \frac{\rho d\varphi}{r d\lambda}$$

La expresión (2.4.83) se simplifica:

$$K^2 = \frac{\frac{E \text{tg}^2 \alpha}{\rho^2} + \frac{G}{r^2} + \frac{2F \text{tg} \alpha}{\rho r}}{\text{tg}^2 \alpha + 1} \quad (2.4.84)$$

La ecuación anterior proporciona el módulo de deformación lineal en un determinado punto, según la dirección α . A partir de ella pueden deducirse las condiciones que deben satisfacerse, para que

¹⁰⁰ Millán Gamboa, José Manuel: *Cartografía náutica*, JM Ediciones Cádiz, 2006. P.99.

una proyección sea conforme. Para ello, se deriva y se iguala a cero dicha expresión para calcular los valores de α correspondientes al máximo y mínimo de la ecuación¹⁰¹:

$$\left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha\right) \left[\frac{E}{\rho^2} 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{2F}{r\rho} \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right] - \left[\frac{E}{\rho^2} 2 \operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{2F}{r\rho} \operatorname{tg} \alpha + \frac{G}{r^2} \right] \left(2 \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) = 0$$

De donde:

$$\frac{E}{\rho^2} 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{2F}{r\rho} \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{E}{\rho^2} 2 \operatorname{tg}^3 \alpha - \frac{2F}{r\rho} 2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{G}{r^2} 2 \operatorname{tg} \alpha = 0$$

Considerando la igualdad:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$$

Se obtiene:

$$\frac{E}{\rho^2} 2 \operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \frac{2F}{r\rho} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - \frac{E}{\rho^2} 2 \operatorname{tg}^3 \alpha - \frac{2F}{r\rho} 2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{G}{r^2} 2 \operatorname{tg} \alpha = 0$$

Simplificando:

$$\frac{E}{\rho^2} 2 \operatorname{tg} \alpha + \frac{2F}{r\rho} - \frac{2F}{r\rho} \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{G}{r^2} 2 \operatorname{tg} \alpha = 0 ;$$

$$\frac{F}{r\rho} \operatorname{tg}^2 \alpha - \left(\frac{E}{\rho^2} - \frac{G}{r^2} \right) \operatorname{tg} \alpha - \frac{F}{r\rho} = 0 ;$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{\frac{E}{\rho^2} - \frac{G}{r^2}}{\frac{F}{r\rho}} \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0 \quad (2.4.85)$$

Las dos raíces de la ecuación de segundo grado anterior ($\operatorname{tg} \alpha_1$ y $\operatorname{tg} \alpha_2$) cumplirán las condiciones:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1 \quad (2.4.86)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\frac{E}{\rho^2} - \frac{G}{r^2}}{\frac{F}{r\rho}} \quad (2.4.87)$$

La primera de las condiciones anteriores (2.4.86) prueba que las dos direcciones α_1 y α_2 , correspondientes a los valores máximos y mínimos del ángulo buscado son rectangulares en la superficie de referencia (elipsoide o esfera).

¹⁰¹ VV.AA.: *Apuntes de cartografía. Fascículo primero, Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales*, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970. P. 27 a 29.

El valor de las raíces anteriores responderá a la expresión deducida de la resolución de la ecuación de segundo grado (2.4.85):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{E}{\rho^2} - \frac{G}{r^2}}{\frac{2F}{r\rho}} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{E}{\rho^2} - \frac{G}{r^2}\right)^2}{\frac{4F^2}{r^2\rho^2}} + 1} \quad (2.4.88)$$

Como ya se ha mencionado, en un sistema de proyección conforme la elipse indicatriz se convierte en una circunferencia sobre el plano, de modo que los semiejes a' y b' serán iguales ($a' = b'$). Debiendo ser la anamorfosis lineal, en este caso, independiente de la dirección considerada α , es decir, la ecuación (2.4.85) ha de verificarse cualquiera que sea el valor de α . De igual forma, el primer miembro de (2.4.83), al considerar $ds = 0$, será igual a:

$$K^2 = ds'^2 = a'^2 = b'^2 \quad (2.4.89)$$

Esto obliga a que las raíces de (2.4.88) sean de la forma $0/0$, y para que ello se cumpla deberá verificarse que¹⁰²:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E}{\rho^2} = \frac{G}{r^2} \\ F = 0 \end{array} \right\} \quad (2.4.90)$$

A su vez se demuestra, en virtud de las expresiones (2.4.64) y (2.4.82), que:

$$\left. \begin{array}{l} h = k \\ A_o = 0 \end{array} \right\}$$

Con lo cual, partiendo de las condiciones (2.4.90) y teniendo en cuenta el valor de los coeficientes E, G y F (2.4.19):

$$\frac{1}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right] = \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right]$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0$$

Las ecuaciones anteriores se simplifican considerando la igualdad $a' = b'$ (2.4.89) en la expresión (2.4.81), de forma que para que se cumpla han de anularse ambos corchetes¹⁰³:

¹⁰² Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo Madrid, 1990. P.261.

¹⁰³ VV.AA.: *Apuntes de cartografía. Fascículo primero, Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales*, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970. P. 41 a 42.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) &= -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.4.91)$$

Expresiones estas últimas conocidas como ecuaciones de conformidad de Cauchy–Riemann.

En general, el estudio de los sistemas de proyección, que se llevará a cabo en los siguientes capítulos, se centrará en considerar la superficie terrestre de referencia como esférica y de radio unitario, por tanto, las ecuaciones anteriores pueden simplificarse al ser:

$$\rho = R = 1$$

$$r = R \cos \varphi = \cos \varphi$$

Por tanto, las ecuaciones de Cauchy–Riemann para la Tierra supuesta esférica quedarían en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \cos \varphi \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.92)$$

2.5. PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS DE UTILIDAD EN LA ELABORACIÓN DE CARTAS DE NAVEGACIÓN

Existen un gran número de proyecciones siendo su clasificación compleja. A continuación, se describen aquellas proyecciones cartográficas más usuales siguiendo la clasificación según la superficie proyectiva sea un cilindro, un cono o un plano.

Para el análisis de estas proyecciones se partirá de considerar la superficie de referencia como una esfera, ya que esto no influirá en los resultados globales que se obtengan, salvo en aquellos casos que tenga interés el elipsoide.

2.5.1. Proyección de Mercator

2.5.1.1. Orígenes de la proyección de Mercator

El nombre de esta proyección, la más conocida y empleada en la actualidad, proviene de su descubridor Gerhard Kremer, más conocido por su nombre latino Gerardus Mercator.

Mercator nació en 1512 en la pequeña ciudad de Rupelmonde, en la actual Bélgica. Tras quedarse huérfano un tío de su padre se encargó de que recibiera educación en las mejores escuelas de Holanda¹⁰⁴. Así aprendió geometría, astronomía y geografía de la mano del que quizás fuera el mejor

¹⁰⁴ Hall, Elial F.; Brevoort, Carson: “Gerard Mercator: His life and works”, *Journal of the American Geographical Society of New York*, Vol. 10, pp. 163 a 196, 1878. P. 164.

matemático de su tiempo, Gemma Frisius¹⁰⁵, en la universidad de Louvain, quien se convertiría en su tutor. Con tan solo 24 años abrió un negocio de fabricación de instrumentos científicos y astronómicos, y de grabado de mapas y cartas de navegación¹⁰⁶. Hasta el momento de su muerte, en 1594, Mercator gozó de cierta fama como fabricante de instrumentos de precisión, y, aunque su producción de mapas no fue prolífica en exceso, introdujo un buen número de correcciones en la concepción geográfica de Europa¹⁰⁷. Sin embargo, por lo que se recuerda a Mercator es por la proyección por él descubierta (aunque no se guarde ningún escrito del procedimiento empleado). Mercator únicamente hizo referencia a que había empleado una nueva proporción a la hora de situar los paralelos y meridianos¹⁰⁸.

El primer mapa en esta proyección lo publicó en 1569, bajo el nombre de “Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigantium emendate accomodata”¹⁰⁹.

2.5.1.2. Características principales de la proyección de Mercator

Las características principales que hacen que la proyección Mercator sea útil para la navegación son¹¹⁰:

- Las transformadas de las líneas de rumbo (loxodrómicas), que aparecen sobre la carta como líneas rectas, que cortan a los meridianos con el mismo ángulo; es una proyección conforme.
- Las transformadas de los paralelos y meridianos aparecen representados por líneas rectas perpendiculares entre sí.
- La transformada del Ecuador es una línea automecoica, esto es, a lo largo de ella su módulo de deformación lineal es la unidad. Aparece representado con su magnitud real, únicamente afectada por la escala, sin ningún tipo de deformación.

2.5.1.3. Proyección de Mercator (Tierra esférica)

La proyección de Mercator es una proyección cilíndrica modificada analíticamente creada para cumplir con una finalidad determinada por las características anteriores, por ello, para el estudio de su desarrollo se tomarán estas como hipótesis de partida.

2.5.1.3.1. Desarrollo de la proyección de Mercator

El fundamento de este desarrollo es la alteración de la distancia entre los paralelos, de modo que, las deformaciones en el sentido de la latitud sean iguales a las deformaciones existentes en el sentido de la longitud¹¹¹. Se considera para su estudio una loxodrómica entre dos puntos A y B de la superficie terrestre (figura 2.5.1.a), de forma que ésta corte a todos los meridianos bajo un mismo ángulo “ α ”, y se tomará una porción diferencial de dicha loxodrómica entre dos puntos infinitamente próximos C y D (el

¹⁰⁵ (1508-1555), médico y matemático holandés, aplicó sus conocimientos de matemáticas a la geografía, cartografía y astronomía. Su figura siempre estuvo ligada al desarrollo de las ciencias náuticas.

¹⁰⁶ Noble Wilford, John: *The Mapmakers*, Alfred A. Knopf, New York, revised edition 2000. P. 88.

¹⁰⁷ Hall, Elial F.; Brevoort, Carson: “Gerard Mercator: His life and works”, *Journal of the American Geographical Society of New York*, Vol. 10, pp. 163-196, 1878. P. 171.

¹⁰⁸ Noble Wilford, John: *The Mapmakers*, Alfred A. Knopf, New York, revised edition 2000. P. 88.

¹⁰⁹ Snyder, John P.: *Flattening the Earth, Two thousand years of map projections*, The University of Chicago Press, Chicago, 1993. Pp. 43 a 45.

¹¹⁰ Raisz, Edwin: *Cartografía General*, Ediciones Omega, Barcelona, 7ª edición 1985. Pp. 76 -78.

¹¹¹ Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1990. P. 316.

punto E de la figura corresponderá a la intersección del paralelo de D con el meridiano de C, por lo que el triángulo esférico¹¹² CDE será rectángulo en E).

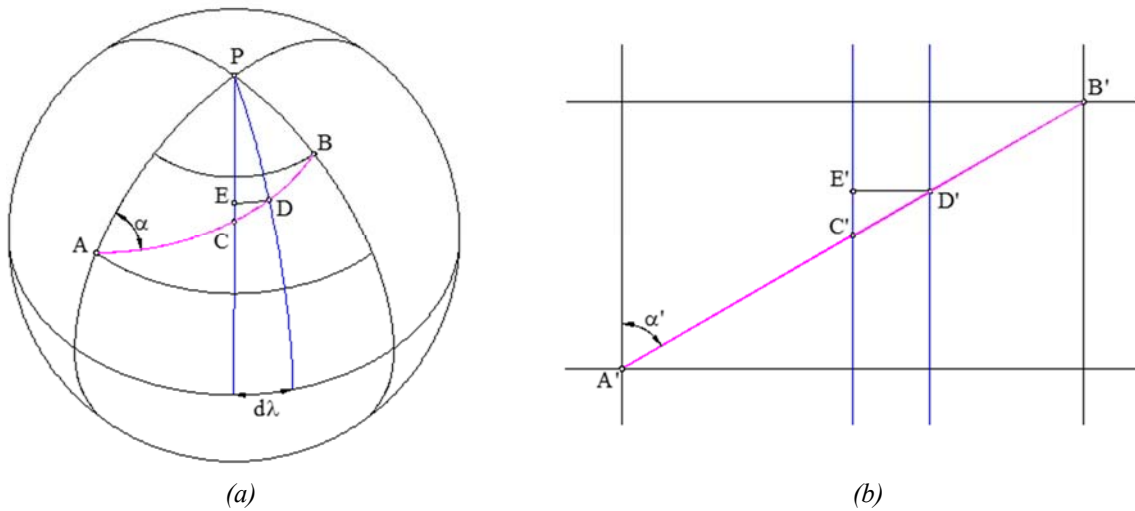


Figura 2.5.1. Desarrollo de la proyección de Mercator (Tierra esférica).

Debido a su calidad de infinitesimal el triángulo esférico CDE puede considerarse como plano. Considerando además el radio de la esfera de referencia como igual a la unidad, ED será igual a un incremento diferencial de apartamiento “ $d\lambda \cos \varphi$ ”, y CE igual a un incremento diferencial de latitud “ $d\varphi$ ”, de forma tal que se cumple¹¹³:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\lambda \cos \varphi}{d\varphi} \quad (2.5.1)$$

El problema consiste en encontrar el valor que se debe dar a los grados de latitud, para que la loxodrómica que une A con B, se represente como una línea recta en la carta. Si se considera además un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, donde el eje de abscisas coincida con la representada del Ecuador y el de ordenadas con la del meridiano considerado como origen, se tendrá que (figura 2.5.1.b):

$$C'E' = dy$$

$$E'D' = dx$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{dx}{dy} \quad (2.5.2)$$

Si la proyección debe de ser conforme: $\alpha = \alpha'$, por tanto: $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha'$ ¹¹⁴. Igualando por tanto las expresiones (2.5.1) y (2.5.2), se obtiene:

¹¹² Por simplicidad, en determinadas circunstancias se considerará conscientemente el abuso de lenguaje consistente en denominar triángulo esférico a una porción de la superficie esférica que estrictamente no lo es. En concreto, en los casos de porciones infinitesimales donde alguno de los lados puede ser un arco de circunferencia menor y los demás lados arcos de circunferencia máxima. Esta circunstancia se considerará legitimada por el carácter infinitesimal de dichas regiones.

¹¹³ Sellés, Manuel: *Instrumentos de navegación. Del Mediterráneo al Pacífico*, Lunwerg Editores, Madrid 1994. P. 99.

¹¹⁴ Capasso, Ideale; Fede, Sergio: *Navigazione. Volume Primo*, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 7ª edizione 1981. P. 166.

$$\frac{d\lambda \cos \varphi}{d\varphi} = \frac{dx}{dy}$$

$$dy = \frac{d\varphi dx}{d\lambda \cos \varphi} \quad (2.5.3)$$

Por ser el Ecuador una línea automecoica y los grados de longitud iguales a los del Ecuador para cualquier punto de la carta:

$$x = \lambda \quad (2.5.4)$$

$$E'D' = dx = d\lambda$$

Por tanto, de (2.5.3):

$$dy = \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

E integrando la ecuación anterior:

$$y = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

$$y = \text{Ln} \, \text{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.5.5)$$

Expresión que proporciona el número de minutos de Ecuador a que se debe situar en la carta un paralelo de latitud “ φ ”. A dicho valor se le denomina latitud aumentada “ φ_a ”, o también, especialmente en textos anglosajones, partes meridionales o latitudes crecientes¹¹⁵.

2.5.1.3.2. Ecuaciones de transformación de coordenadas

Las expresiones (2.5.4) y (2.5.5) proporcionan las coordenadas cartesianas en el plano respecto de las geográficas:

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \text{Ln} \, \text{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \varphi_a \end{aligned} \right\}$$

Si se considera el eje de ordenadas coincidente con la transformada de un meridiano de longitud λ_o , distinto del de Greenwich¹¹⁶:

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda - \lambda_o \\ y &= \text{Ln} \, \text{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \varphi_a \end{aligned} \right\} \quad (2.5.6)$$

¹¹⁵ Moreu Curbera; Martínez Jiménez: *Astronomía y Navegación. Tomo II*, Artes Gráficas Galicia – Librería San José, Vigo, 1975. P. 139.

¹¹⁶ López Varela, Pablo: Análisis de Idoneidad de las Derrotas empleadas en Navegación Marítima sobre las Proyecciones de Mercator, Gnomónica y Estereográfica. Tesis Doctoral, Departamento de Energía y Propulsión Marina, Universidad de A Coruña, 2005. P. 253.

Evidentemente, cabe la posibilidad de que se trabajase con una esfera de referencia de radio distinto a la unidad $R \neq 1$, en este caso¹¹⁷:

$$\left. \begin{aligned} x &= R (\lambda - \lambda_o) \\ y &= R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \varphi_a \end{aligned} \right\} \quad (2.5.7)$$

Las ecuaciones (2.5.7) se corresponden también con las ecuaciones de paralelos y meridianos en el plano, y se obtiene que los polos no tendrán representación en la carta. Esto se comprende por el hecho de que cuando la latitud tiende a 90° , la ordenada (y) en (2.5.7) tiende a infinito. Hecho por otra parte obvio si se tiene en cuenta que los meridianos se transforman en el plano por líneas rectas paralelas.

Para la obtención de las ecuaciones inversas, bastaría con despejar φ y λ en las expresiones anteriores, así, de (2.5.6):

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= x + \lambda_o \\ \varphi &= 2 \operatorname{arctg} e^{\frac{y}{R}} - 90^\circ \end{aligned} \right\} \quad (2.5.8)$$

O bien, de (2.5.7):

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{x}{R} + \lambda_o \\ \varphi &= 2 \operatorname{arctg} \left(e^{\frac{y}{R}} \right) - 90^\circ \end{aligned} \right\} \quad (2.5.9)$$

2.5.1.3.3. Deformaciones de la proyección de Mercator

- Deformación angular

La proyección de Mercator no presenta deformación angular, dado que, se parte de la condición de conformidad para su desarrollo.

- Deformación superficial

Para la aplicación de la expresión (2.3.9) se considerara como dS la superficie del triángulo de elementos diferenciales CDE sobre la esfera y como dS' su transformado en el plano C'D'E'. Así, de la figura 2.5.1 se obtiene:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{2} CE \cdot ED = \frac{1}{2} d\varphi \, d\lambda \, \cos \varphi \\ dS' &= \frac{1}{2} C'E' \cdot E'D' = \frac{1}{2} dy \, dx = \frac{1}{2} d\varphi \, \sec \varphi \, d\lambda \end{aligned}$$

Por lo que sustituyendo en (2.3.9) se obtiene:

¹¹⁷ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 41.

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = \sec^2 \varphi \quad (2.5.10)$$

Expresión que proporciona el módulo de deformación superficial para la proyección de Mercator, y que demuestra de forma inmediata su no equivalencia.

- Deformación lineal

Para el estudio de la deformación lineal según (2.3.10), y considerando el triángulo CDE como plano, se tomará como elemento lineal diferencial en la esfera de referencia (ds) el segmento de loxodrómica CD representado en la figura 2.5.1.a, con lo que su transformada en el plano (ds') será el segmento C'D' de la figura 2.5.1.b. Es decir:

$$ds = CD = d\varphi \sec \alpha$$

$$ds' = C'D' = dy \sec \alpha = d\varphi \sec \varphi \sec \alpha'$$

Por lo que sustituyendo en la expresión (2.3.10):

$$K = \frac{ds'}{ds} = \sec \varphi \quad (2.5.11)$$

Como puede verse en la expresión anterior, la deformación lineal es independiente de la dirección o acimut que se considera, ya que, no aparece el ángulo α ; siendo únicamente función de la secante de la latitud. De este modo, los módulos de deformación lineal que se obtendrían en la dirección de los meridianos (h) y de los paralelos (k) serán iguales¹¹⁸, hecho que puede comprobarse rápidamente partiendo nuevamente de la representación de la figura 2.5.1:

$$h = \frac{C'E'}{CE} = \frac{dy}{d\varphi} = \frac{\frac{d\varphi}{\cos \varphi}}{d\varphi} = \sec \varphi$$

$$k = \frac{E'D'}{ED} = \frac{dx}{d\lambda \cos \varphi} = \frac{d\lambda}{d\lambda \cos \varphi} = \sec \varphi$$

Como puede verse la deformación lineal será la misma en cualquier dirección, por tanto, la transformada de cualquier elemento diferencial de longitud ds a partir de un punto será:

$$ds' = ds \sec \varphi \quad (2.5.12)$$

La consecuencia es, si se considera una circunferencia infinitesimal de radio ds en la esfera, su transformada en el plano de proyección será otra circunferencia de radio ds' , es decir, la elipse indicatriz de Tissot, al igual que en todas las proyecciones conformes, será una circunferencia.

De la expresión (2.5.12) se demuestran tres características típicas de la proyección de Mercator:

- Cuando la latitud es igual a cero, su secante será igual a uno, por lo que en (2.5.11) $K = 1$, con lo que se demuestra, que el Ecuador es una línea automecoica.

¹¹⁸ Por regla general cuando el módulo de deformación lineal se determina en la dirección del meridiano se representa por h , y cuando se hace en la dirección del paralelo por k .

- Si la latitud se mantiene constante, es decir, para todos los puntos de un mismo paralelo, $K = \text{cte.}$, con lo que se demuestra que los paralelos son líneas isométricas.
- A medida que la latitud se acerca a 90° , su secante se aproxima a infinito, con lo que la separación entre el polo y cualquier otro paralelo se hace infinita, es decir, en el polo no tendrá representación en el plano de proyección.

Como resumen puede establecerse que la proyección de Mercator no presenta deformación angular, y que las deformaciones lineal y superficial son función de la secante de la latitud y de su cuadrado respectivamente, por ello, aumentarán a medida que lo hace la latitud. Es por este motivo por el que la proyección de Mercator, desde un punto de vista teórico, se vuelve inutilizable para latitudes superiores a los 70° N/S ¹¹⁹.

2.5.1.4. Proyección Mercator (Tierra elipsoidal)

Al igual que para la Tierra esférica se hará el desarrollo imponiendo la condición de conformidad.

2.5.1.4.1. Desarrollo de la proyección de Mercator

Pártase de una loxodrómica entre dos puntos A y B de la superficie terrestre (figura 2.5.2.a), de forma que ésta corte a todos los meridianos bajo un mismo ángulo α , y tómesese una porción diferencial de dicha loxodrómica entre dos puntos infinitamente próximos C y D (el punto E de la figura corresponderá a la intersección del paralelo de D con el meridiano de C, por lo que el triángulo CDE será rectángulo en E).

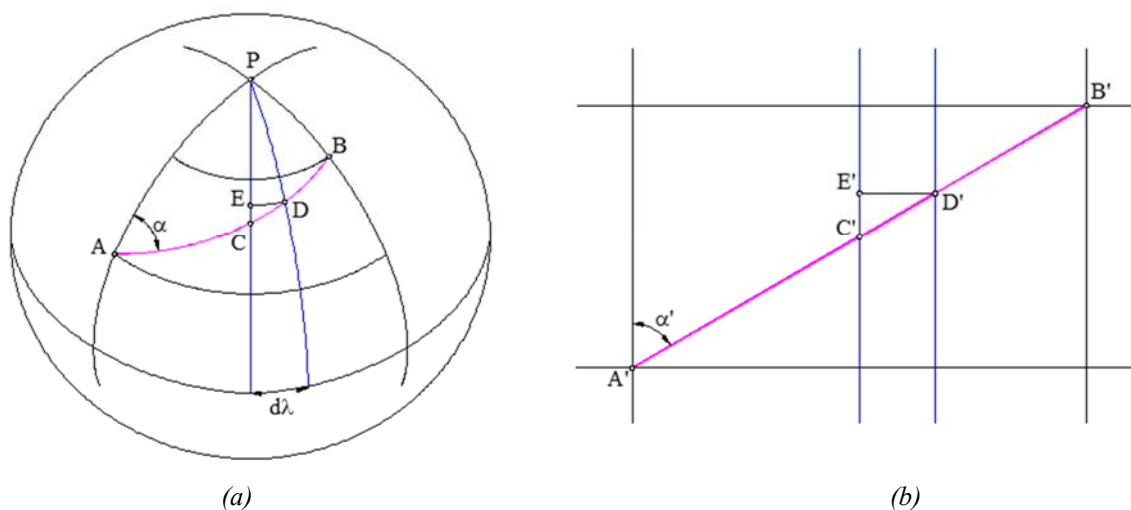


Figura 2.5.2. Desarrollo de la proyección de Mercator (Tierra elipsoidal).

Debido a su calidad de infinitesimal el triángulo CDE puede considerarse como plano. Considerando además el semieje mayor (a) como igual a la unidad, ED será igual a un incremento

¹¹⁹ Franco Rey, Jorge: *Nociones de topografía, geodesia y cartografía*, Universidad de Extremadura, Servicio de Publicaciones, Cáceres, 1999. P. 139.

diferencial de apartamiento “ $N d\lambda \cos \varphi$ ”, y CE igual a un incremento diferencial de latitud “ $\rho d\varphi$ ”, de forma tal que se cumple¹²⁰:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{N d\lambda \cos \varphi}{\rho d\varphi} \quad (2.5.13)$$

De la misma manera que para la Tierra esférica, si se considera la representación plana del planteamiento descrito, y se aplica las hipótesis de partida establecidas (figura 2.5.2.b), se obtiene una carta donde los meridianos y paralelos se trazan como líneas rectas perpendiculares entre sí, siendo los grados de longitud iguales a lo largo de la carta e iguales a los grados de Ecuador. En este caso:

$$C'E' = dy$$

$$E'D' = dx$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{dx}{dy} \quad (2.5.14)$$

Si se impone la condición de conformidad:

$$\begin{aligned} \frac{N d\lambda \cos \varphi}{\rho d\varphi} &= \frac{dx}{dy} \\ dy &= \frac{\rho d\varphi dx}{N d\lambda \cos \varphi} \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Por ser el Ecuador una línea automecoica y los grados de longitud iguales a los del Ecuador para cualquier punto de la carta:

$$x = \lambda \quad (2.5.16)$$

$$E'D' = dx = d\lambda$$

Por tanto, de (2.5.15):

$$dy = \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi}$$

Sustituyendo ρ y N por sus valores:

$$dy = \frac{(1 - e^2) d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi}$$

E integrando la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} y &= \int_0^\varphi \frac{(1 - e^2) d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} \\ y &= \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

¹²⁰ Sellés, Manuel: *Instrumentos de navegación. Del Mediterráneo al Pacífico*, Lunwerg Editores, Madrid 1994. P. 99.

2.5.1.4.2. Ecuaciones de transformación de coordenadas

Las expresiones (2.5.16) y (2.5.17) proporcionan las coordenadas cartesianas en el plano respecto de las geográficas en la forma de¹²¹:

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \text{Ln tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} = \varphi_a \end{aligned} \right\}$$

Si se considera el eje de ordenadas coincidente con la transformada de un meridiano de longitud λ_o , distinto del de Greenwich:

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda - \lambda_o \\ y &= \text{Ln tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} = \varphi_a \end{aligned} \right\} \quad (2.5.18)$$

Evidentemente, cabe la posibilidad de que se trabajase con un elipsoide de referencia de semieje mayor distinto a la unidad ($a \neq 1$), en este caso¹²²:

$$\left. \begin{aligned} x &= a(\lambda - \lambda_o) \\ y &= a \left[\text{Ln tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right] = \varphi_a \end{aligned} \right\} \quad (2.5.19)$$

Al igual que para el supuesto de Tierra esférica, las ecuaciones (2.5.19) se corresponden con las ecuaciones de paralelos y meridianos en el plano, demostrándose también que los polos tendrán su representación en el infinito.

Si suponemos $e = 0$, de estas fórmulas deducimos las correspondientes a Tierra esférica.

Para la obtención de las ecuaciones inversas, bastaría con despejar φ y λ en las expresiones anteriores, así, de (2.5.18):

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= x + \lambda_o \\ \varphi &= 90^\circ - 2 \arctg \left[e^{-y} \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.5.20)$$

O bien, de (2.5.19):

¹²¹ Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1990. P. 328.

¹²² Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 44.

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{x}{a} + \lambda_0 \\ \varphi &= 90^\circ - 2 \arctg \left[e^{-\frac{y}{a}} \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.5.21)$$

Un ejemplo del aspecto de una proyección de Mercator con meridiano puede verse en la siguiente figura:

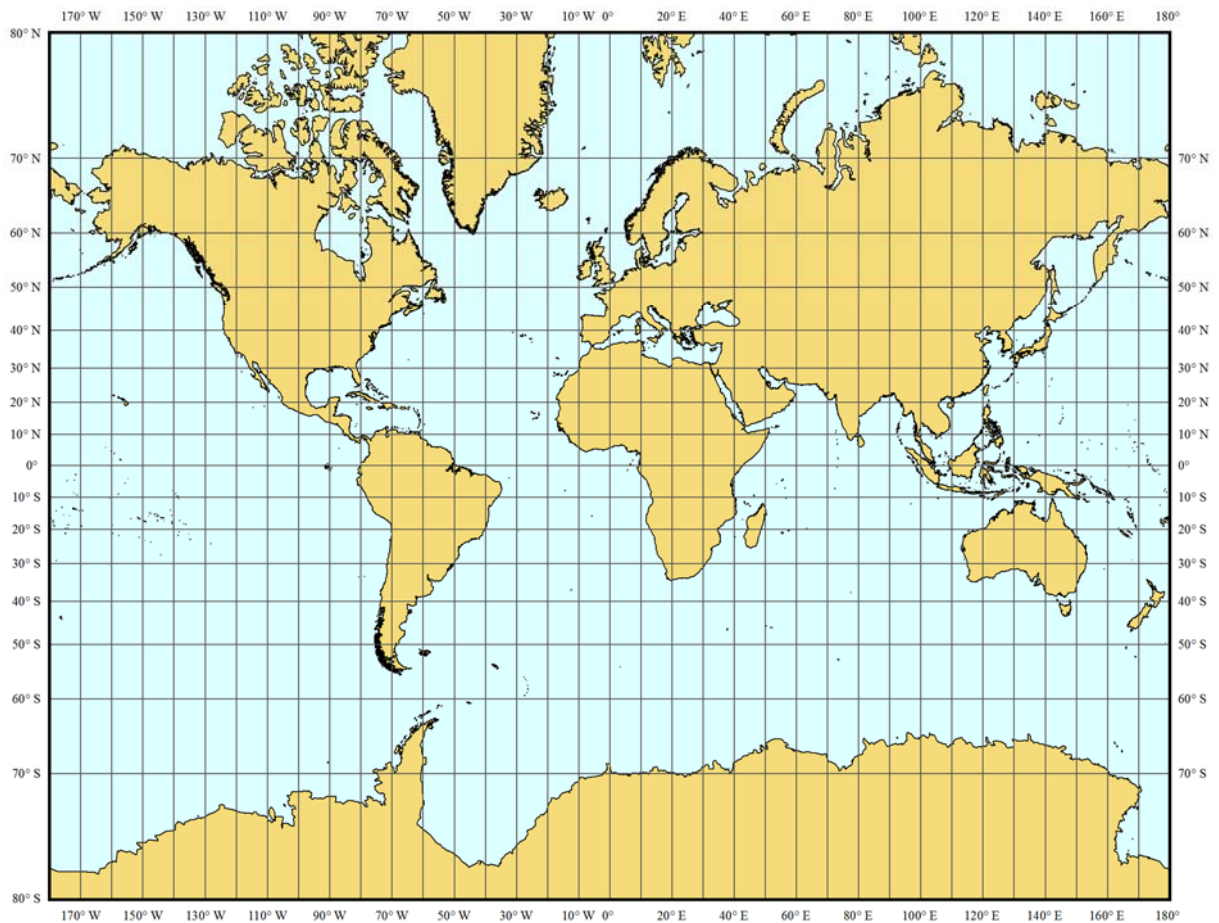


Figura 2.5.3. Proyección de Mercator entre los paralelos de 80° N y 80° S.

2.5.1.4.3. Deformaciones de la proyección de Mercator

- Deformación angular

La conformidad es una de las características de las que se parte para el desarrollo de la proyección de Mercator, por lo que no presentará deformación angular.

- Deformación superficial

Para la aplicación de la expresión (2.3.9) se considerara como dS la superficie del triángulo de elementos diferenciales CDE sobre el elipsoide y como dS' su transformado en el plano C'D'E'. Así, de la figura 2.5.2 se obtiene:

$$dS = \frac{1}{2} CE \cdot ED = \frac{1}{2} \rho N d\varphi d\lambda \cos \varphi$$

$$dS' = \frac{1}{2} C'E' \cdot E'D' = \frac{1}{2} dy dx = \frac{1}{2} d\varphi \sec \varphi d\lambda$$

Por lo que sustituyendo en (2.3.9) se obtiene:

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = \frac{1}{\rho N} \sec^2 \varphi \quad (2.5.22)$$

Expresión que proporciona el módulo de deformación superficial para la proyección de Mercator, y que demuestra de forma inmediata su no equivalencia.

- Deformación lineal

Para el estudio de la deformación lineal según (2.3.10), y considerando el triángulo CDE como plano, se tomará como elemento lineal diferencial en el elipsoide de referencia (ds) el segmento de loxodrómica CD representado en la figura 2.5.2.a, con lo que su transformada en el plano (ds') será el segmento C'D' de la figura 2.5.2.b. Es decir:

$$ds = CD = \rho d\varphi \sec \alpha$$

$$ds' = C'D' = dy \sec \alpha' = \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi} \sec \alpha'$$

Por lo que sustituyendo en la expresión (2.3.10):

$$K = \frac{ds'}{ds} = \frac{1}{N} \sec \varphi \quad (2.5.23)$$

De esta forma, los módulos de deformación lineal que se obtendrían en la dirección de los meridianos (h) y de los paralelos (k) serán iguales, hecho que puede comprobarse rápidamente partiendo nuevamente de la representación de la figura 2.5.2:

$$h = \frac{C'E'}{CE} = \frac{dy}{d\varphi} = \frac{\frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi}}{\rho d\varphi} = \frac{1}{N} \sec \varphi$$

$$k = \frac{E'D'}{ED} = \frac{dx}{d\varphi} = \frac{d\lambda}{N d\lambda \cos \varphi} = \frac{1}{N} \sec \varphi$$

Al igual que para el supuesto de Tierra esférica, puede verse, que la deformación lineal será la misma en cualquier dirección, por tanto, la transformada de cualquier elemento diferencial de longitud ds a partir de un punto será:

$$ds' = \frac{ds}{N} \sec \varphi \quad (2.5.24)$$

Demostrándose también que el Ecuador es una línea automecoica, los paralelos son líneas isométricas y que él no tendrá presentación en el plano de proyección.

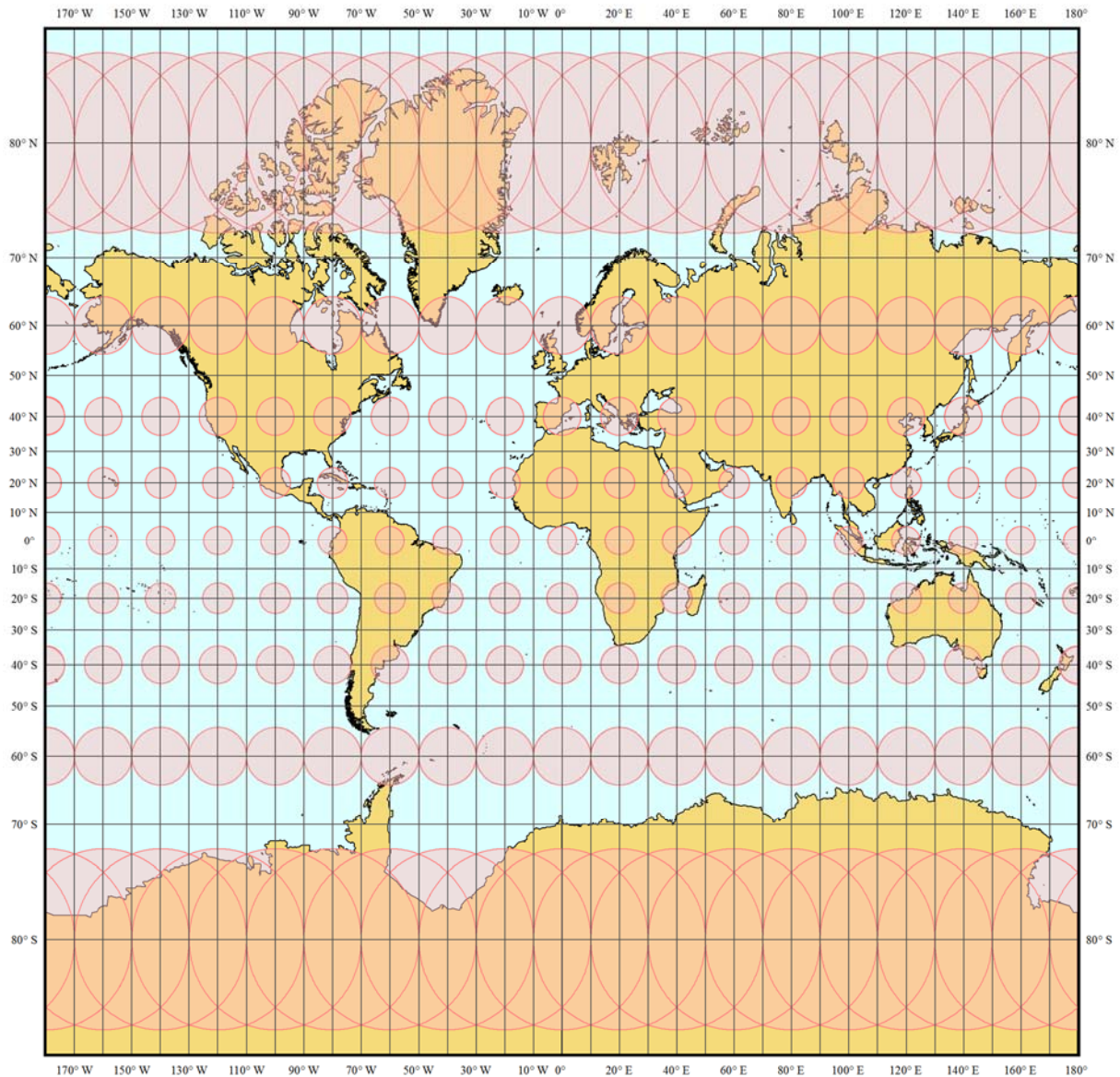


Figura 2.5.4. Proyección de Mercator entre los paralelos de 80° N y 80° S, con representación de las elipses indicatrices de Tissot en el Ecuador y en los paralelos de 20° N/S, 40° N/S, 60° N/S y 80° N/S.

2.5.1.5. Usos de la proyección de Mercator

La proyección de Mercator constituye la proyección cartográfica más utilizada en la elaboración de cartas de navegación. De hecho, desde principios del siglo XX se emplea como estándar para este fin, incluso a latitudes para las cuales pudieran ser más apropiadas otras proyecciones.

A pesar de que la proyección de Mercator nació vinculada a la navegación marítima, también tiene un importante peso en la elaboración de mapas para fines distintos. En este aspecto son muchos los autores, que han criticado su uso abusivo en lo referente a geografía general y, especialmente, en la

enseñanza de ciencias sociales, en educación primaria y secundaria, ya que da una imagen muy deformada de la superficie de los continentes. Basta con observar el mapamundi de la figura 2.5.3 para ver que en ella Groenlandia presenta un tamaño superior al de toda Sudamérica, cuando en realidad la superficie de Groenlandia es de aproximadamente una octava parte de la de Sudamérica. De hecho, se han realizado estudios que demuestran que la gran mayoría de la gente tiene una imagen mental de la configuración terrestre fuertemente influenciada por la proyección de Mercator¹²³. Resulta interesante mencionar aquí, que la Asociación Americana de Cartografía (American Cartographic Association) lleva años alertando sobre el error conceptual que genera en la sociedad un entramado rectangular de paralelos y meridianos, causado por un uso abusivo de la proyección de Mercator en la elaboración de mapas genéricos¹²⁴. Esta crítica se basa en que la forma de la Tierra no es cuadrada y que es esencial elegir, especialmente en el campo de la educación primaria, mapamundis que reflejen mejor la verdadera forma terrestre¹²⁵.

2.5.2. Proyección transversa de Mercator

La proyección transversa de Mercator se basa en el mismo razonamiento que la proyección de Mercator, con la salvedad, de que, en este caso, el cilindro se hace tangente a la superficie de referencia a lo largo de un meridiano (cilindro transversal) y no en el Ecuador (cilindro directo).

Al igual que en la proyección de Mercator el Ecuador es una línea automecónica, en este caso es el meridiano, donde el cilindro se hace tangente a la superficie de referencia, el que no sufre deformación; permitiendo así, representar la zona que rodea al mismo con unos índices de deformaciones bajos¹²⁶.

2.5.2.1. Orígenes de la proyección transversa de Mercator

La proyección transversa de Mercator, basada en una superficie de referencia esférica, fue desarrollada por el matemático francés Jean Henri Lambert¹²⁷ en 1772¹²⁸. A Lambert también se le debe la invención de otras proyecciones cartográficas, entre las que destacan la cónica conforme de Lambert, de la cual se hablará posteriormente.

En 1822 Carl Friedrich Gauss¹²⁹ presentó un estudio sobre esta proyección aplicada a un modelo de Tierra basado en un elipsoide de revolución, sin embargo, no fue hasta casi un siglo después, en 1912,

¹²³ Tyner, Judith A.: "Interactions of culture and cartography", *The History Teacher*, Vol. 20, N° 4, pp. 455 a 464, agosto 1987. Pp. 459 a 460 y 462. Delmelle, Eric M.: *Map Projection Properties: considerations for small-scale GIS applications*, thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Arts, Department of Geography, State University of New York, Buffalo, septiembre 2001. P. 42.

¹²⁴ Algunos autores atribuyen este abuso en el empleo de la proyección de Mercator a razones políticas, ya que con ella se consigue un aumento en el tamaño de ciertas naciones en detrimento de otras, en concreto: Monmonier, Mark: *How to lie with maps*, The University of Chicago Press, Chicago, 1996. Pp. 94 a 99.

¹²⁵ American Cartographic Association: "The Case against Rectangular World Maps", *Cartographic Journal*, Vol. 26, N° 2, pp. 156 y 157, 1989.

¹²⁶ Osborne, Peter.: "*The Mercator projections*", <http://www.mercator99.webspace.virginmedia.com/mercator.pdf>, Edinburgh, 2nd edition 2013. P. 49.

¹²⁷ (1728-1777), matemático natural de la región de Alsacia, también destacó como físico, astrónomo y filósofo. A parte de su importante trabajo en el campo de las matemáticas de las proyecciones cartográficas, a él se debe la creación de la trigonometría esférica tal y como se concibe hoy en día.

¹²⁸ Snyder, John P.: *Flattening the Earth, Two thousand years of map projections*, The University of Chicago Press, Chicago, 1993. P. 82.

¹²⁹ (1777-1855), matemático, físico y astrónomo alemán. Destacan sus trabajos en diversas ramas de las matemáticas, en topología, geodesia, mecánica celeste y electromagnetismo.

que L. Krüger presenta las fórmulas adecuadas para el elipsoide¹³⁰. A este hecho se debe que esta proyección también sea denominada como proyección conforme de Gauss o de Gauss-Krüger.

A lo largo de la primera mitad del siglo XX, y basándose en los estudios de Gauss y Krüger, la proyección transversa de Mercator da lugar a la UTM (Universal Transversa de Mercator).

2.5.2.2. Características principales de la proyección transversa de Mercator

Las características principales son¹³¹:

- Es una proyección conforme.
- Las transformadas del meridiano central, de los meridianos que distan 90° del meridiano central y del Ecuador son líneas rectas. Las transformadas de otros paralelos y meridianos son curvas cóncavas hacia el meridiano central.
- La transformada del meridiano central es una línea automecoica.
- La escala aumenta con la distancia desde el meridiano central siendo infinita a 90° de dicho meridiano.

2.5.2.3. Desarrollo de la proyección transversa de Mercator

Tomando un cilindro cuyo eje esté situado en el plano del Ecuador y sea tangente a la esfera a lo largo de un meridiano, se obtendrá un gráfico como el de la figura siguiente:

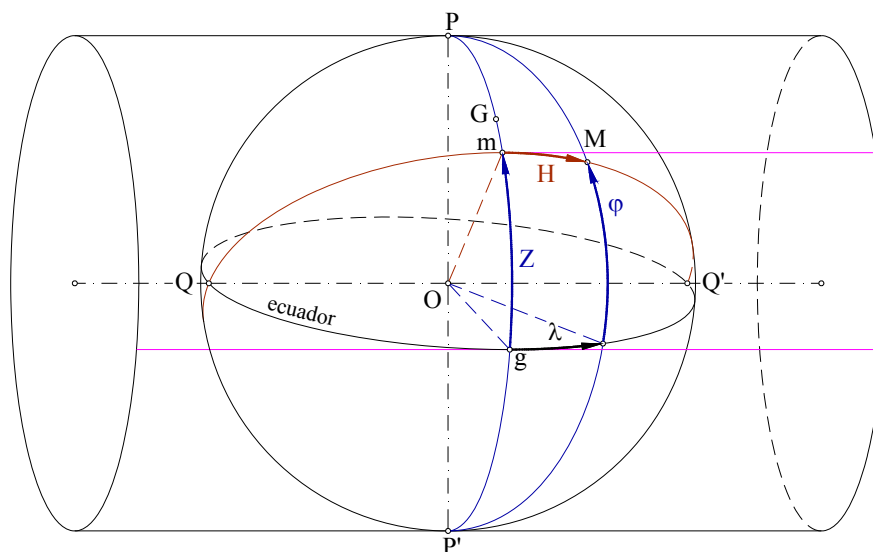


Figura 2.5.5. Desarrollo cilíndrico transverso de Gauss.

El estudio de esta proyección sigue el mismo patrón que la de Mercator, así, debe considerarse un entramado sobre la esfera, donde los círculos máximos cuyo plano contenga al eje del cilindro se

¹³⁰ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 48.

¹³¹ Snyder, John P.; Voxland, Philip M.: *An Album of Map Projections*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, United States Government Printing Office, Washington, 1989. P. 12.

denominarán falsos meridianos, y los círculos menores cuyos planos sean perpendiculares a dicho eje serán falsos paralelos. Queda así definido un sistema de círculos máximos y menores análogo al sistema convencional de meridianos y paralelos.

A un punto cualquiera M de la esfera, cuyas coordenadas geográficas son λ y φ le corresponderán en este sistema las coordenadas Z y H, llamadas coordenadas de Cassini-Soldner¹³².

La coordenada Z se medirá desde el Ecuador, que ahora cumple las funciones de meridiano central, y H desde el meridiano de tangencia, que para el ejemplo de la figura anterior se hace coincidir con el de Greenwich (G).

El sistema de proyección de este nuevo sistema de coordenadas logrará las condiciones de conformidad proyectando los falsos meridianos y los falsos paralelos, del mismo modo que los paralelos y meridianos en la proyección de Mercator¹³³. Así, las coordenadas en el plano para que la proyección sea conforme responderán a fórmulas análogas a las de la proyección de Mercator, donde se permutan los valores de x e y, y se considera H y Z en lugar de φ y λ :

$$\left. \begin{aligned} x &= \text{Ln} \, \text{tg} \left(45^\circ + \frac{H}{2} \right) \\ y &= Z \end{aligned} \right\} \quad (2.5.25)$$

Para determinar los valores de H y Z en función de las coordenadas geográficas φ y λ se puede partir de considerar el triángulo esférico PQM definido en la figura anterior. Los elementos de este triángulo son:

$$MP = 90^\circ - \varphi$$

$$QP = 90^\circ$$

$$QM = 90^\circ - H$$

$$\text{Ángulo en P} = 90^\circ - \lambda$$

$$\text{Ángulo en Q} = 90^\circ - Z$$

Aplicando las fórmulas de Bessel se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } \varphi &= \cos H \, \text{sen } Z \\ \cos \varphi \, \text{sen } \lambda &= \text{sen } H \\ \cos \varphi \, \cos \lambda &= \cos H \, \cos Z \end{aligned} \right\} \quad (2.5.26)$$

Dividiendo las ecuaciones primera y tercera de (2.5.26):

$$\text{tg } Z = \text{tg } \varphi \, \sec \lambda \quad (2.5.27)$$

Y de la segunda expresión de (2.5.26):

$$\text{sen } H = \text{sen } \lambda \, \cos \varphi \quad (2.5.28)$$

¹³² Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1990. P. 329 y 330.

¹³³ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 67.

Las expresiones anteriores proporcionan directamente los valores de H y Z en función de las coordenadas geográficas φ y λ .

Un ejemplo del aspecto de una proyección transversa de Mercator con meridiano estándar el de Greenwich puede verse en la siguiente figura:

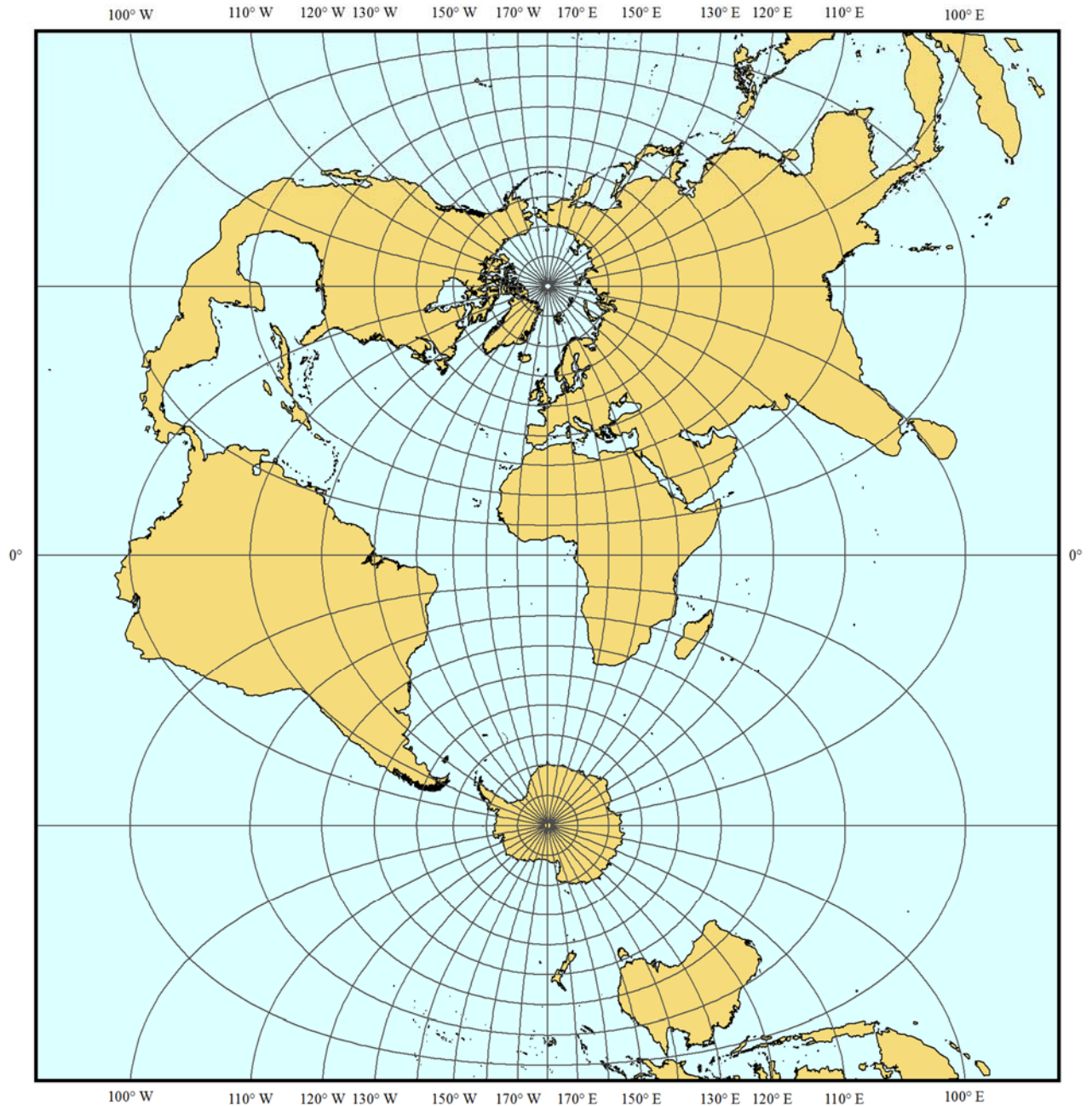


Figura 2.5.6. Proyección transversa de Mercator con el meridiano de Greenwich como estándar.

2.5.2.4. Deformaciones de la proyección transversa de Mercator

La proyección transversa de Mercator, al basarse en el mismo sistema proyectivo que la proyección de Mercator no presenta deformación angular¹³⁴.

Sustituyendo H y Z por ϕ y λ en los módulos de deformación superficial y lineal de la proyección de Mercator (2.5.10) y (2.5.11) se tienen los respectivos módulos para la transversa de Mercator.

2.5.2.4.1. Deformación angular

La proyección transversa de Mercator es una proyección conforme.

2.5.2.4.2. Deformación superficial

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = \sec^2 H \quad (2.5.29)$$

2.5.2.4.3. Deformación lineal

$$K = \frac{ds'}{ds} = \sec H \quad (2.5.30)$$

Al igual que en la proyección Mercator la deformación lineal es independiente de la dirección o acimut que se considera, ya que, no aparece el ángulo α ; siendo únicamente función de la secante de H. De este modo, los módulos de deformación lineal que se obtendrían en la dirección de los meridianos y de los paralelos serán iguales.

Como resumen puede establecerse que la proyección transversa de Mercator no presenta deformación angular, y que las deformaciones lineal y superficial son función de la secante de H y de su cuadrado respectivamente, por ello aumentarán a medida que lo hace H.

Se obtiene la ventaja de representar las zonas polares con escasa deformación, así como todo un huso esférico centrado en el meridiano estándar¹³⁵, propiedad que da lugar al origen de la UTM.

Un ejemplo de una proyección transversa de Mercator con las elipses de Tissot puede verse en la siguiente figura:

¹³⁴ La conformidad es clara al basarse en el mismo sistema proyectivo que la proyección de Mercator, no obstante, sería sencillo demostrar la conformidad mediante las condiciones de Cauchy-Riemann, como puede verse en (Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1990. P. 332 a 334).

¹³⁵ VV.AA.: Apuntes de cartografía. Fascículo segundo, Clasificación, Proyecciones cónicas propiamente dichas y mericónicas. Proyecciones cilíndricas y mericilíndricas, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1971. P. 149.

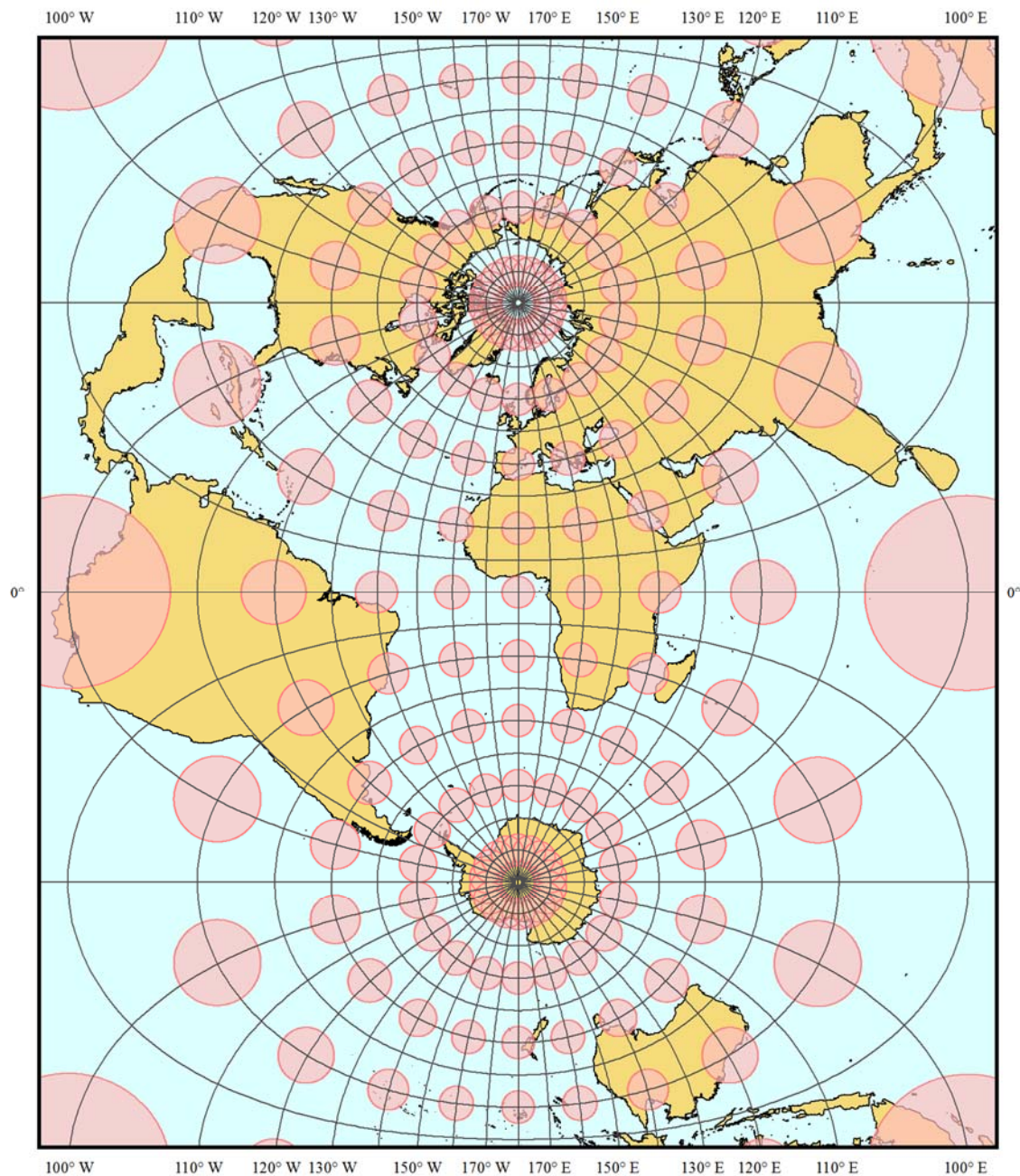


Figura 2.5.7. Proyección transversa de Mercator con el meridiano de Greenwich como estándar, con representación de las elipses indicatrices de Tissot en el Ecuador y en los paralelos de 20° N/S, 40° N/S, 60° N/S y 80° N/S.

2.5.2.5. Usos de la proyección transversa de Mercator

Esta proyección, fue recomendada por Lambert para la representación de zonas alargadas en el sentido del meridiano, como Chile y Argentina, tomando como estándar el central de la zona¹³⁶, ya que, las deformaciones irán en aumento a medida que se separe de éste. Este sistema fue recomendado por

¹³⁶ VV.AA.: Apuntes de cartografía. Fascículo segundo, *Clasificación, Proyecciones cónicas propiamente dichas y mericónicas. Proyecciones cilíndricas y mericilíndricas*, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1971. P. 149.

la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, en la Asamblea celebrada en Edimburgo en 1936, para la cartografía de los países africanos entre los $\pm 36^\circ$ de latitud, suponiendo la Tierra dividida en 60 husos de 6° de longitud cada uno¹³⁷.

Esta proyección también es usada en la actualidad por varios países (como el Reino Unido, Estados Unidos o España)¹³⁸ para la elaboración de mapas topográficos oficiales, en escalas comprendidas normalmente entre 1:24.000 y 1: 250.000, y en los Estados Unidos para la cartografía de estados, donde la extensión en la dirección norte-sur es la predominante¹³⁹.

Decir también, que es la proyección base de la UTM (Universal Transversa de Mercator), la cual no es objeto de estudio en este trabajo.

2.5.3. Proyección cónica conforme de Lambert

Las proyecciones cónicas tienen su origen en la proyección de los puntos de la superficie terrestre sobre un cono (o una serie de conos) tangente o secante a ella, y que es posteriormente desarrollado en un plano para formar la carta. Las líneas de tangencia o intersección del cono con la superficie de referencia se presentarán como líneas estándar, esto es, automecoicas¹⁴⁰.

La cónica conforme de Lambert es la única, de entre la gran variedad de desarrollos cónicos, que resulta de interés en la cartografía náutica, siendo su única aplicación real el del trazado de cartas meteorológicas.

Este tipo de proyección es la más utilizada en navegación aérea al igual que, la proyección de Mercator es en la navegación marítima.

La cónica conforme de Lambert es una proyección modificada basada en la cónica simple, en la que mantiene la existencia de uno o dos paralelos automecoicos, pero supeditada a un resultado conforme.

2.5.3.1. Orígenes de la proyección cónica conforme de Lambert

La proyección cónica de Lambert fue la primera nueva proyección que presentó Hohann Heinrich Lambert en su “Beitrag” (Lambert, 1772), publicación que contenía la transversa de Mercator descrita previamente¹⁴¹.

Lambert desarrolló su cónica conforme tanto para una superficie de referencia esférica como para un elipsoide de revolución, y con dos paralelos estándar, es decir, considerando un cono secante.

¹³⁷ Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1990. P. 331.

¹³⁸ Robinson, Arthur H.; Sale, Randall D.; Morrison, Joel L.; Muehrcke, Phillip C.: *Elementos de cartografía*, Ediciones Omega S.A., Barcelona, 1987. P. 93.

¹³⁹ Snyder, John P.; Voxland, Philip M.: *An Album of Map Projections*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, United States Government Printing Office, Washington, 1989. P. 12.

¹⁴⁰ López Varela, Pablo: *Análisis de Idoneidad de las Derrotas empleadas en Navegación Marítima sobre las Proyecciones de Mercator, Gnomónica y Estereográfica*. Tesis Doctoral, Departamento de Energía y Propulsión Marina, Universidad de A Coruña, 2005. Pp. 345 y 346.

¹⁴¹ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 104.

2.5.3.2. Características principales de la proyección cónica conforme de Lambert

Las características principales son:

- Las transformadas de los meridianos son líneas rectas, igualmente espaciadas, concurrentes en uno de los polos.
- Las transformadas de los paralelos son circunferencias concéntricas, centrados en el polo donde convergen los meridianos. El espaciado entre paralelos aumenta a medida que nos separamos de dicho polo, para conseguir que los ángulos se conserven y reducir al mínimo las deformaciones¹⁴².
- El polo más cercano al paralelo estándar es un punto; el otro polo no puede mostrarse¹⁴³.
- Es una proyección conforme, los rumbos los podemos medir directamente con el transportador.
- Las deformaciones son mínimas en la proximidad de los paralelos automecoicos.
- La loxodrómica es una línea curva y la ortodrómica se puede considerar como una línea recta en las proximidades de los paralelos automecoicos¹⁴⁴.

2.5.3.3. Desarrollo de la proyección cónica conforme de Lambert

En el desarrollo de esta proyección se obtendrá el valor de la expresión, que proporciona el radio de un paralelo genérico, para que la proyección resulte conforme.

Para ello, se partirá de una cónica tangente básica (figura 2.5.8), con su correspondiente paralelo automecoico de radio r_0 :

¹⁴² Figueroa, Fernando: *Apuntes de cartografía aplicados a la navegación aérea*, Editorial Aeronáutica SUMAAS, Madrid, 1977. P. 71.

¹⁴³ Snyder, John P.; Voxland, Philip M.: *An Album of Map Projections*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, United States Government Printing Office, Washington, 1989. P. 95.

¹⁴⁴ Figueroa, Fernando: *Apuntes de cartografía aplicados a la navegación aérea*, Editorial Aeronáutica SUMAAS, Madrid, 1977. P. 72.

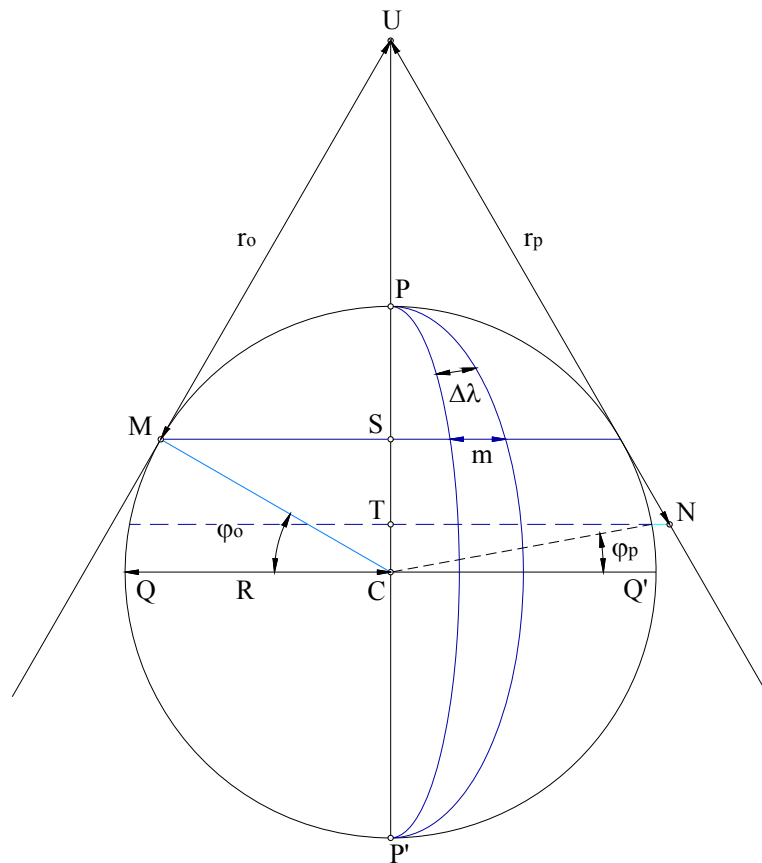


Figura 2.5.8. Construcción de una proyección cónica tangente.

Donde:

$$r_o = R \cotg \varphi_o \quad (2.5.31)$$

Y una convergencia de meridianos definida por la figura 2.5.9:

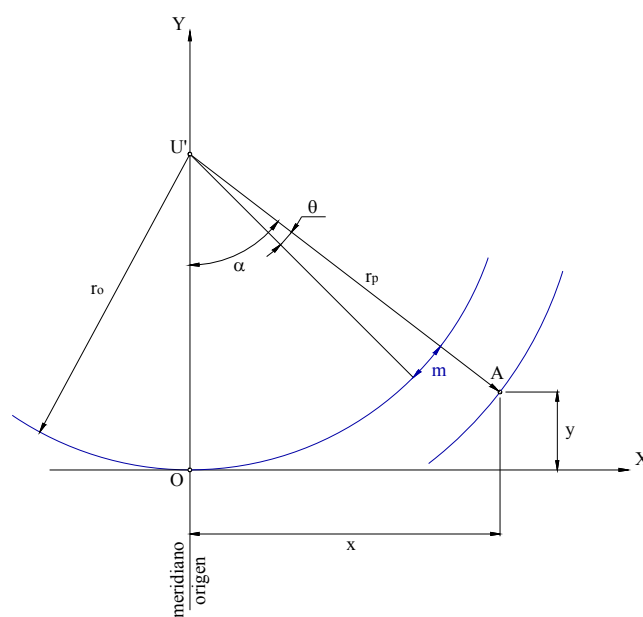


Figura.2.5.9. Construcción de una carta en proyección cónica tangente

Donde:

$$\theta = \Delta\lambda \operatorname{sen} \varphi_0 \quad (2.5.32)$$

Se impone la condición de conformidad, suponiendo para ello, una superficie diferencial sobre la esfera y su correspondiente en el plano:

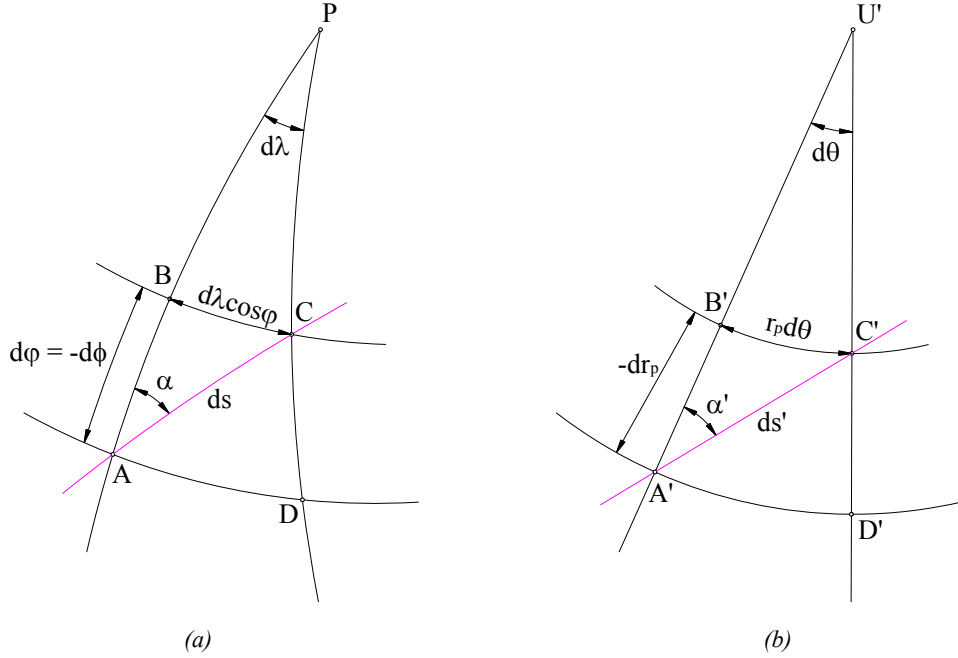


Figura.2.5.10. Desarrollo de la proyección cónica conforme de Lambert.

Para la esfera (figura a):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\lambda \cos \varphi}{d\varphi}$$

Mientras que para el plano (figura b):

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{r_p d\theta}{-dr_p}$$

Por tanto, para que se dé la condición de conformidad debe cumplirse la igualdad:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \alpha' \\ \frac{d\lambda \cos \varphi}{d\varphi} &= \frac{r_p d\theta}{-dr_p} \\ \frac{dr_p}{r_p} &= -\frac{d\theta d\varphi}{d\lambda \cos \varphi} \end{aligned} \quad (2.5.33)$$

Y siendo (2.5.32):

$$\theta = \Delta\lambda \operatorname{sen} \varphi_0$$

Su derivada será:

$$d\theta = d\lambda \sin \varphi_o \quad (2.5.34)$$

Sustituyendo así θ y $d\theta$:

$$\frac{dr_p}{r_p} = -\frac{d\varphi}{\cos \varphi} \sin \varphi_o$$

De donde, integrando:

$$\int \frac{dr_p}{r_p} = \int -\frac{d\varphi}{\cos \varphi} \sin \varphi_o$$

Y considerando la colatitud ϕ :

$$\begin{aligned} \int \frac{dr_p}{r_p} &= \sin \varphi_o \int \frac{d\phi}{\sin \phi} \\ \int \frac{dr_p}{r_p} &= \sin \varphi_o \int \frac{2 d \frac{\phi}{2}}{2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}} = \sin \varphi_o \int \frac{\sec^2 \frac{\phi}{2} d \frac{\phi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\phi}{2}} \\ \operatorname{Ln} r_p &= \sin \varphi_o \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} + \operatorname{Ln} C \end{aligned}$$

Siendo:

$$\frac{\phi}{2} = \frac{90^\circ - \varphi}{2} = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$$

Se obtiene finalmente:

$$r_p = C \left[\operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right]^{\sin \varphi_o} \quad (2.5.35)$$

Expresión que proporciona el radio de un paralelo genérico para que la proyección resulte conforme.

Cuando se toma un punto del Ecuador ($\varphi = 0^\circ$) el valor de la constante será $C = r_e$, donde r_e correspondería al radio ecuatorial en la carta¹⁴⁵. Por tanto:

$$r_p = r_e \left[\operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right]^{\sin \varphi_o} \quad (2.5.36)$$

De esta forma quedaría definida la configuración de la proyección, en la cual, los meridianos formarían un haz de rectas convergentes en un punto, con una convergencia angular entre ellos definida por la expresión (2.5.32); y los paralelos vendrían configurados como arcos de círculos concéntricos de centro el punto de convergencia de los meridianos, como puede verse en la figura 2.5.11 y radio definido por la anterior expresión anterior.

¹⁴⁵ Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1990. P. 372 y 373.

Una vez calculado el radio del paralelo, podemos calcular las coordenadas de Lambert (coordenadas cartesianas).

Las coordenadas rectangulares de un punto de la esfera de coordenadas geográficas λ y φ serán:

$$\left. \begin{aligned} y &= r_o - r_p \cos \theta \\ x &= r_p \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.5.37)$$

Un ejemplo del aspecto de una proyección cónica conforme de Lambert puede verse en la siguiente figura:

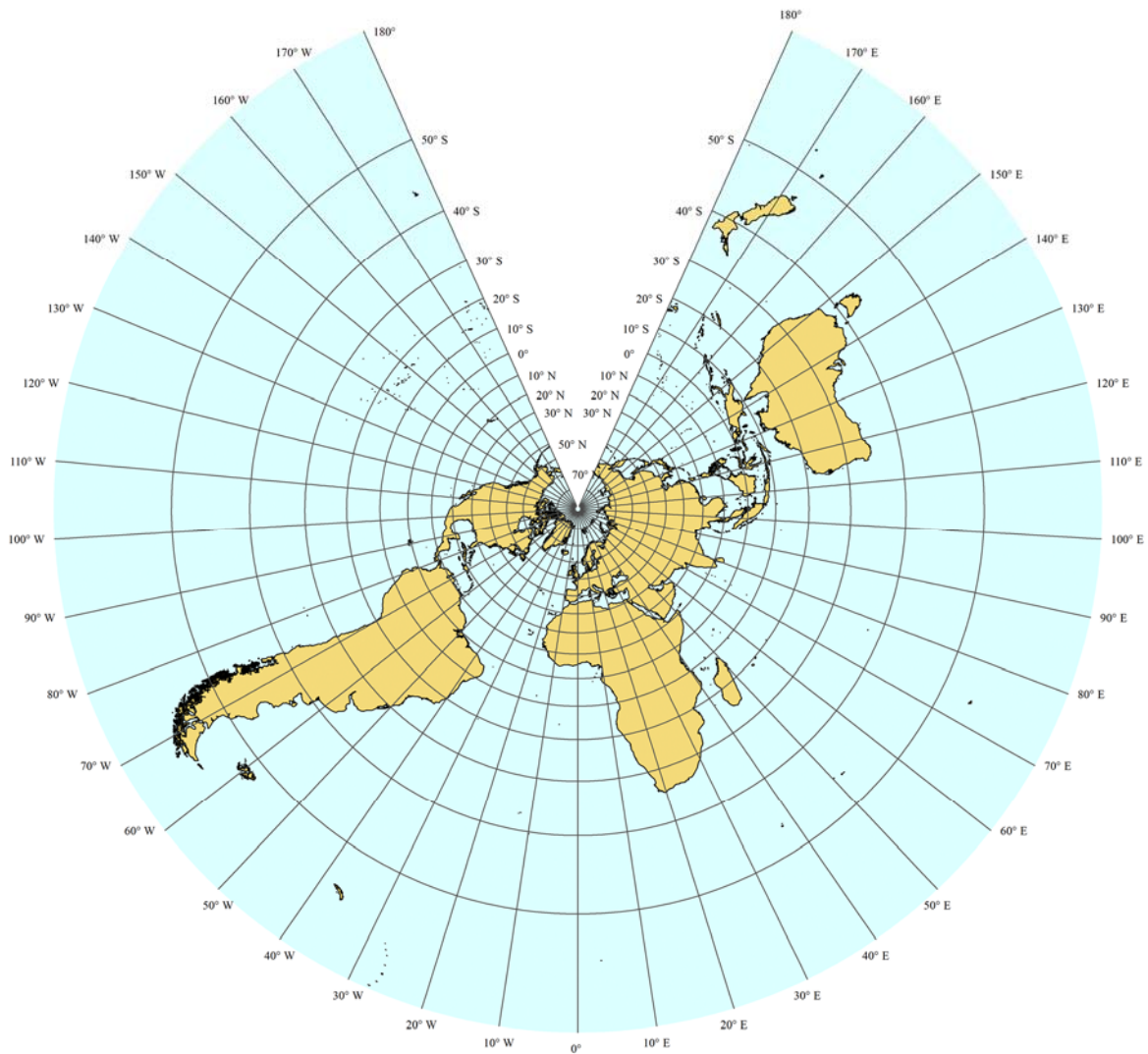


Figura 2.5.11. Proyección cónica conforme de Lambert, con paralelo estándar en 60° N.

2.5.3.4. Deformaciones de la proyección cónica conforme de Lambert

2.5.3.4.1. Deformación angular

La proyección cónica conforme de Lambert es una proyección conforme. La conformidad de la proyección podría comprobarse fácilmente con las condiciones de Cauchy-Riemann, pero no se considera necesario un análisis más pormenorizado.

2.5.3.4.2. Deformación superficial

Tomando el elemento superficial diferencial dS sobre la esfera, según lo establecido en la figura 2.5.10.a, este puede expresarse del siguiente modo:

$$dS = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} d\varphi d\lambda \cos \varphi \quad (2.5.38)$$

Mientras que su homólogo en el plano dS' , según la figura 2.5.10.b:

$$dS' = \frac{1}{2} A'B' \cdot A'B' = -\frac{1}{2} dr_p r_p d\theta \quad (2.5.39)$$

Por lo que sustituyendo (2.5.38) y (2.5.39) en (2.3.9) se obtiene:

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = \frac{-\frac{1}{2} dr_p r_p d\theta}{\frac{1}{2} d\varphi d\lambda \cos \varphi} = \frac{-dr_p r_p d\theta}{d\varphi d\lambda \cos \varphi} \quad (2.5.40)$$

Sustituyendo (2.5.34) en (2.5.40) se tiene:

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = \frac{-dr_p r_p \sin \varphi_o}{d\varphi \cos \varphi} \quad (2.5.41)$$

2.5.3.4.3. Deformación lineal

El elemento lineal diferencial sobre la esfera, según lo establecido en la figura 2.5.10.a, será:

$$ds = d\varphi \sec \alpha \quad (2.5.42)$$

Mientras que su homólogo en el plano será (figura 2.5.10.b.):

$$ds' = -dr_p \sec \alpha' \quad (2.5.43)$$

Por lo que sustituyendo (2.5.41) y (2.5.42) en (2.3.10) se obtiene:

$$K = \frac{ds'}{ds} = \frac{-dr_p \sec \alpha'}{d\varphi \sec \alpha} = \frac{-dr_p}{d\varphi} \quad (2.5.44)$$

Como en toda proyección conforme, los módulos de deformación lineal, que se obtendrían en la dirección de los meridianos y de los paralelos, serán iguales.

Un ejemplo de una proyección cónica conforme de Lambert con las elipses de Tissot puede verse en la siguiente figura:

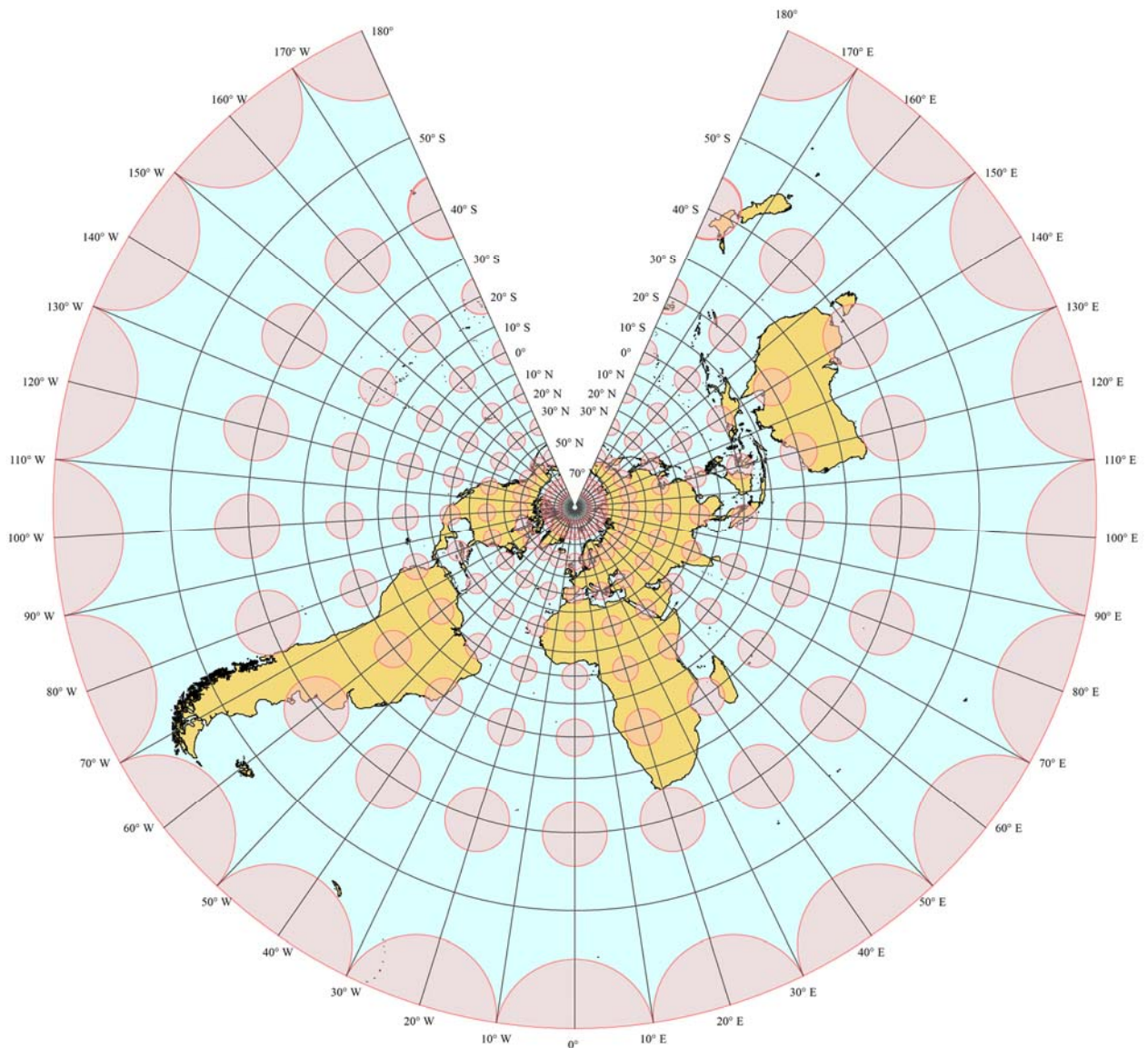


Figura 2.5.12. Proyección cónica conforme de Lambert, con paralelo estándar en 60° N, con representación de las elipses indicatrices de Tissot en el Ecuador y en los paralelos de 20° N/S, 40° N/S, 60° N/S y 80° N.

Como se aprecia en la figura anterior, en una proyección cónica conforme de Lambert el polo situado en el mismo hemisferio que el paralelo (o paralelos) estándar se representa como un punto, mientras que el opuesto tendría su representación en el infinito. Así, en dichos puntos (representadas de los polos) no se cumple la condición de conformidad¹⁴⁶.

2.5.3.5. Usos de la proyección cónica conforme de Lambert

La proyección cónica conforme de Lambert, considerando la Tierra como un elipsoide de revolución, es empleada para mapas a gran escala de regiones donde predomina la dirección este - oeste,

¹⁴⁶ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 105.

así como para la realización de cartas topográficas¹⁴⁷. Una de las últimas aplicaciones topográficas de esta proyección es la realización de mapas de la superficie de la Luna, de los satélites de Júpiter, así como de algunos planetas como Mercurio y Marte¹⁴⁸.

Se utiliza para muchos de los mapas del USGS creados después de 1957. Esta proyección reemplazó a la policónica.

La deformación lineal, en zonas próximas al meridiano de tangencia, es insignificante, esto unido al hecho de que, por ser conforme, se conservan los ángulos, hace que las figuras representadas en esta proyección sean prácticamente semejantes a las reales. Además, como es aproximadamente equidistante, las distancias pueden medirse directamente sobre la carta, obteniendo resultados de bastante precisión, y como es isógona, los rumbos pueden medirse también directamente con ayuda de un transportador. Una línea recta en esta proyección se aproxima tanto a un círculo máximo sobre la esfera, que ambos pueden considerarse idénticos para los propósitos de la navegación. Todas estas cualidades hacen que esta proyección, sea especialmente útil en la elaboración de cartas de navegación aérea por ortodrómica, ya que, aunque se comete un pequeño error al considerar la representada de un círculo máximo como una línea recta, presenta la ventaja, de que se pueden medir directamente rumbos y distancias, a la vez que conserva la forma de los accidentes geográficos sin deformaciones excesivas. Las escalas oficiales para este tipo de cartas son de 1:1.000.000 y 1:500.000¹⁴⁹.

En la actualidad, el Convenio sobre Aviación Civil Internacional define en el Anexo nº4¹⁵⁰ una extensa serie de especificaciones sobre las cartas aeronáuticas¹⁵¹. Dentro de estas definiciones nos encontramos con el tipo de proyección, que han de tener dichas cartas. Para cartas de escala 1:1 000 000 y 1: 500 000, la proyección cónica conforme de Lambert es la proyección a usar entre el Ecuador y los 80° de latitud y la proyección estereográfica entre los 80° y 90° de latitud, proyección que se estudiará posteriormente.

¹⁴⁷ Snyder, John P.; Voxland, Philip M.: *An Album of Map Projections*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, United States Government Printing Office, Washington, 1989. P. 95.

¹⁴⁸ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 106.

¹⁴⁹ López Varela, Pablo: Análisis de Idoneidad de las Derrotas empleadas en Navegación Marítima sobre las Proyecciones de Mercator, Gnomónica y Estereográfica. Tesis Doctoral, Departamento de Energía y Propulsión Marina, Universidad de A Coruña, 2005. P. 345.

¹⁵⁰ Anexo 4 al Convenio sobre Aviación Civil Internacional. Cartas aeronáuticas, 10ª edición, julio 2001.

¹⁵¹ Moya Honduvilla, Javier; Bernabé Poveda, Miguel Ángel: *Descubrir la cartografía aeronáutica*, Centro de Documentación y Publicaciones de Aena, Madrid, 2011. P. 66.

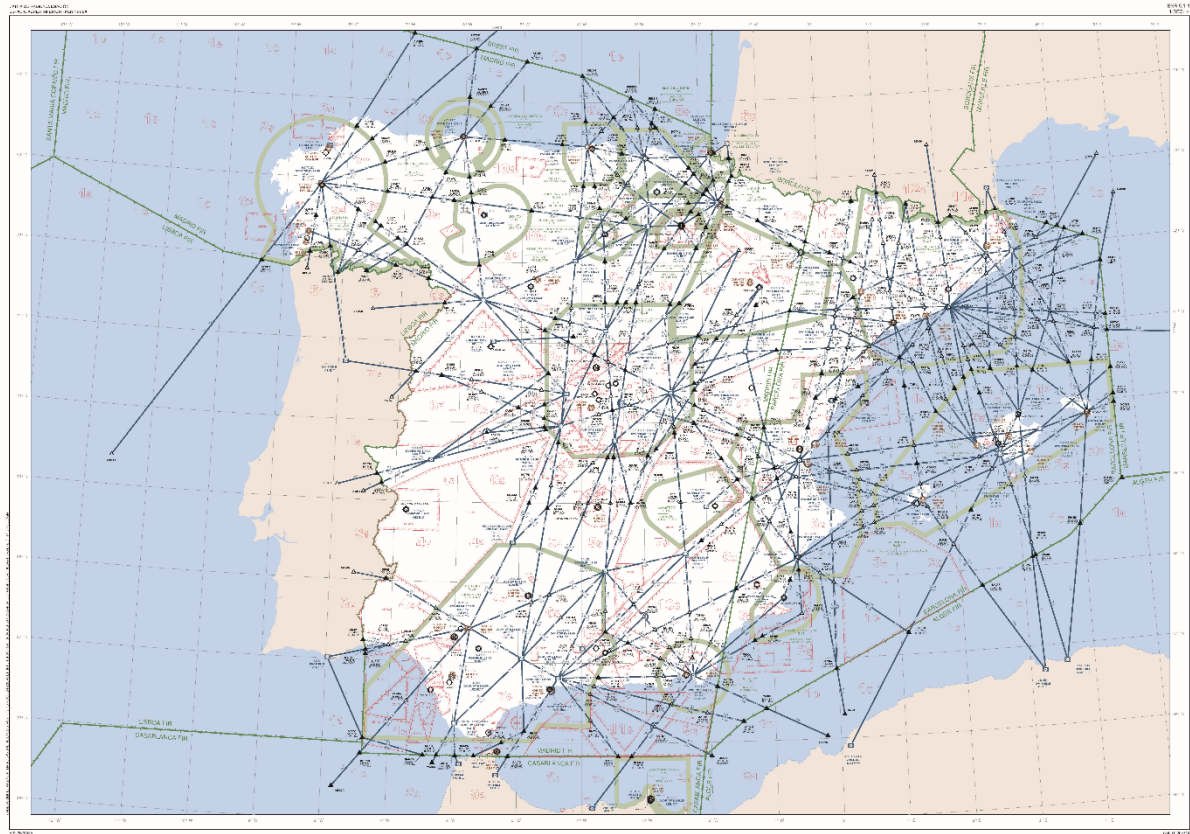


Figura 2.5.13. Ejemplo de aplicación de una proyección cónica conforme de Lambert a una carta de navegación aérea¹⁵².

2.5.4. La proyección escenográfica horizontal como caso genérico de proyección perspectiva vertical

Para poder analizar, a posteriori, las proyecciones perspectivas verticales: estereográfica, gnomónica y ortográfica, se estudia la proyección escenográfica horizontal como caso genérico de proyección perspectiva vertical. Particularizando estas fórmulas que se van a obtener para esta proyección, se obtendrán las correspondientes a las tres proyecciones mencionadas¹⁵³.

Las proyecciones perspectivas verticales comparten una serie de propiedades que se irán demostrando a lo largo de este epígrafe, y que pueden resumirse en las siguientes¹⁵⁴:

- Todo círculo máximo cuyo plano contenga al punto de vista, o lo que es lo mismo, todo círculo máximo que pase por el centro de la proyección, se transforma en el plano en una recta.
- La representada de cualquier otro círculo sobre la esfera (máximo o menor) será una curva de segundo grado, puesto que resultará de la intersección de un cono con un plano.

¹⁵² ENAIRE: Carta de radionavegación ENR 6.1.1, <http://www.enaire.es/csee/Satellite/navegacion-aerea>.

¹⁵³ Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1990. P. 267.

¹⁵⁴ VV.AA: *Apuntes de cartografía. Fascículo primero. Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales*, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970. Pp. 63 y 64.

- La dirección o acimut desde el centro de la proyección a cualquier otro punto de la carta se muestra en verdadera magnitud, propiedad que permite englobar, a las proyecciones perspectivas verticales dentro del grupo de las acimutales.
- Las propiedades de la proyección sobre un plano tangente a la esfera de referencia se mantendrán, si se considera cualquier otro plano paralelo, secante a la esfera (por regla general siempre se consideran planos tangentes o secantes, pero también se aplicaría esta propiedad a planos paralelos exteriores a la esfera).
- Los elementos que caracterizan un determinado sistema perspectivo son la distancia D del punto de vista al centro geométrico de la esfera, y las coordenadas φ_0, λ_0 del centro de la proyección.

La utilidad de la proyección escenográfica es prácticamente nula, limitándose de forma casi exclusiva, a representaciones del aspecto que tendría la Tierra y otros planetas desde el espacio¹⁵⁵. Por este motivo, el estudio de esta proyección se limitará a la obtención de aquellas ecuaciones que resulten de interés para la obtención de las propiedades particulares del resto de proyecciones perspectivas.

En una proyección escenográfica horizontal el vértice V se sitúa en un punto sobre la normal al plano del cuadro que pase por el centro C de la esfera de referencia, y exterior a esta, de modo que la distancia D de dicho punto al centro C sea mayor que el radio de la esfera¹⁵⁶ R ; y el plano de proyección es tangente a la esfera de referencia en un punto T , de coordenadas (φ_0, λ_0) , situado entre el polo y el Ecuador ($0^\circ < \varphi_0 < 90^\circ$)¹⁵⁷.

El planteamiento gráfico de la construcción geométrica de una proyección escenográfica horizontal puede verse en la siguiente figura:

¹⁵⁵ Snyder, John P.; Voxland, Philip M.: *An Album of Map Projections*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, United States Government Printing Office, Washington, 1989. P. 110.

¹⁵⁶ Debe de recordarse que, como se estableció anteriormente, se considerará una esfera de referencia de radio unitario, por tanto $R = 1$.

¹⁵⁷ López Varela, Pablo: Análisis de Idoneidad de las Derrotas empleadas en Navegación Marítima sobre las Proyecciones de Mercator, Gnomónica y Estereográfica. Tesis Doctoral, Departamento de Energía y Propulsión Marina, Universidad de A Coruña, 2005. P. 133.

Para el cálculo de las expresiones de transformación de coordenadas de la esfera al plano y viceversa, puede partirse de la semejanza de los triángulos VOE y VTE' de la figura 2.5.14, de modo que:

$$\rho = \frac{\text{sen } \phi (D + 1)}{D + \cos \phi} \quad (2.5.45)$$

Esta última expresión (2.5.45) constituye la fórmula general de paso de la coordenada esférica polar ϕ , a la plana polar ρ , para $R = 1$.

Respecto a las coordenadas Z y Z' , esférica y plana respectivamente, se observa en la figura 2.5.16 que:

$$Z = Z' \quad (2.5.46)$$

La expresión (2.5.46) sirve para demostrar la condición de acimutal de todas las proyecciones perspectivas, que al no ser función de D , se cumplirá para cualquier otra posición particular del vértice.

2.5.4.1.2. Transformación de coordenadas geográficas en la esfera a cartesianas en el plano

En las proyecciones perspectivas, para referir la posición de los puntos del plano del cuadro en coordenadas cartesianas, lo primero que debe hacerse es establecer las direcciones y el origen de los ejes de ordenadas y abscisas. De forma general, se considera como origen el centro de la proyección, como eje de abscisas la transformada del meridiano del centro de la proyección (considerado como meridiano origen) y como eje de ordenadas la transformada del primer vertical que pasa por el centro de la proyección¹⁵⁸, es decir, del círculo máximo que pasa por el centro de la proyección y es perpendicular al meridiano que lo contiene. Con ello se obtiene que los ejes x e y se orientarán en las mismas direcciones en que crecen las latitudes y longitudes geográficas. El planteamiento descrito puede verse en la siguiente figura.

¹⁵⁸ VV.AA: Apuntes de cartografía. Fascículo primero, Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970. P.64.

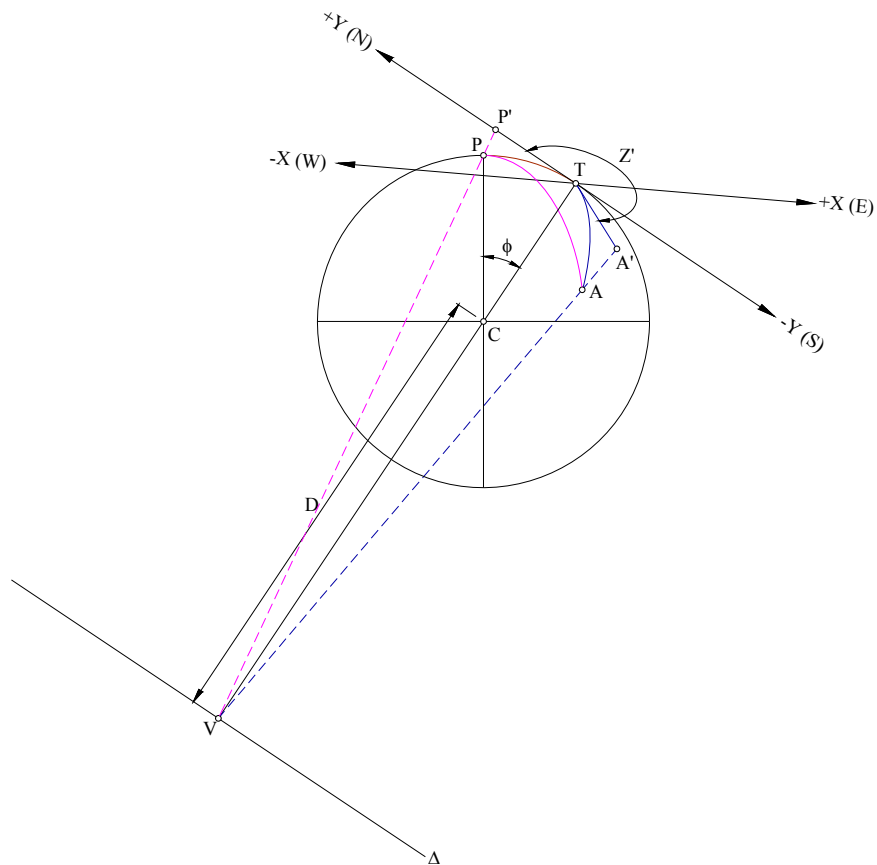


Figura 2.5.15. Transformación de coordenadas geográficas a cartesianas en una proyección escenográfica horizontal.

En la figura anterior se representa la proyección de un punto A (ϕ, λ) del cual se desean conocer sus coordenadas cartesianas (x, y) en el plano (punto A'). Para ello se parte del triángulo esférico PTA, cuyos lados y vértices se representan en la siguiente figura¹⁵⁹.

¹⁵⁹ López Varela, Pablo: *Análisis de Idoneidad de las Derrotas empleadas en Navegación Marítima sobre las Proyecciones de Mercator, Gnomónica y Estereográfica*. Tesis Doctoral, Departamento de Energía y Propulsión Marina, Universidad de A Coruña, 2005. P. 131 y ss.

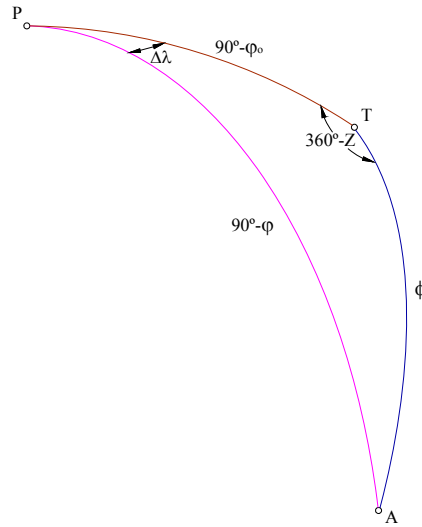


Figura 2.5.16. Triángulo esférico PTA donde se contemplan las coordenadas geográficas y polares respecto al punto de tangencia T, de un punto A de la esfera terrestre de referencia.

En base al triángulo esférico PTA definido en la figura anterior, aplicando las fórmulas de Bessel se obtienen las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \cos \phi &= \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda \\ -\sin \phi \sin Z &= \cos \varphi \sin \Delta\lambda \\ \sin \phi \cos Z &= \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta\lambda \end{aligned} \right\} \quad (2.5.47)$$

Considérese ahora la transformada del punto A sobre el plano, según la figura 2.5.15, la posición de A' respecto a los ejes de coordenadas previamente establecidos responderá a la siguiente figura:

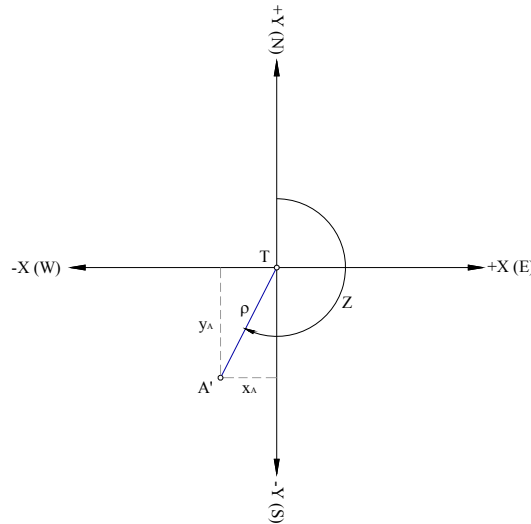


Figura 2.5.17. Coordenadas cartesianas del punto A' sobre el plano del cuadro.

Como puede verse en la figura anterior, donde se establece un valor positivo para las latitudes al norte del centro de la proyección y las longitudes al este, las coordenadas cartesianas en el plano de proyección del punto A' (x_A , y_A) pueden expresarse en función de sus correspondientes polares (ρ , Z), del siguiente modo:

$$\left. \begin{aligned} x_A &= TA' \sin Z = -\rho \sin Z \\ y_A &= TA' \cos Z = \rho \cos Z \end{aligned} \right\} \quad (2.5.48)$$

Donde sustituyendo el valor de ρ de (2.5.45), y generalizando las expresiones anteriores para cualquier punto:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{\sin \phi (D+1)}{D + \cos \phi} \sin Z \\ y &= \frac{\sin \phi (D+1)}{D + \cos \phi} \cos Z \end{aligned} \right\}$$

Sustituyendo ahora las expresiones (2.5.47) en las anteriores:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{(D+1) \cos \phi \sin \Delta \lambda}{D + \sin \phi \sin \phi_0 + \cos \phi \cos \phi_0 \cos \Delta \lambda} \\ y &= \frac{(D+1) (\sin \phi \cos \phi_0 - \cos \phi \sin \phi_0 \cos \Delta \lambda)}{D + \sin \phi \sin \phi_0 + \cos \phi \cos \phi_0 \cos \Delta \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.49)$$

Este par de expresiones constituyen las fórmulas generales de transformación de las coordenadas geográficas en la esfera a cartesianas en el plano.

2.5.4.1.3. Transformación de coordenadas cartesianas en el plano a geográficas en la esfera

Se parte nuevamente del planteamiento establecido en la figura 2.5.14, pero esta vez buscando la obtención de las coordenadas geográficas de un punto genérico A (ϕ_A , λ_A) a partir de sus correspondiente cartesianas (x_A , y_A) en el plano de proyección. Así, aplicando las fórmulas de Bessel al triángulo esférico PTA de la figura 2.5.16 se tiene:

$$\sin \phi = \sin \phi_0 \cos \phi + \cos \phi_0 \sin \phi \cos Z \quad (2.5.50)$$

Además, de la figura 2.5.17 se pueden obtener las siguientes igualdades:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} Z &= \frac{x}{y} \\ \sin Z &= \frac{x}{\rho} \\ \cos Z &= \frac{y}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.51)$$

Sustituyendo la última expresión de (2.5.51) en (2.5.50):

$$\sin \phi = \sin \phi_0 \cos \phi + \frac{y}{\rho} \cos \phi_0 \sin \phi$$

$$\phi = \arcsen \left(\sin \phi_0 \cos \phi + \frac{y}{\rho} \cos \phi_0 \sin \phi \right) \quad (2.5.52)$$

En la expresión anterior el valor de ρ puede obtenerse de la figura (2.5.17):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.5.53)$$

Sin embargo, el cálculo del valor del seno y el coseno de ϕ para sustituir en (2.5.51) es bastante más delicado, y deberá deducirse de la expresión (2.5.44):

$$\rho = \frac{\sin \phi (D+1)}{D + \cos \phi}$$

Teniendo:

$$\sin \phi = \frac{D - \sqrt{1 - \rho^2 \frac{(D-1)}{(D+1)}}}{\frac{(D+1)}{\rho} + \frac{\rho}{(D+1)}} \quad (2.5.54)$$

$$\cos \phi = \frac{-D - \sqrt{D^2 - \left[1 + \frac{(D+1)^2}{\rho^2}\right] \left[D^2 - \frac{(D+1)^2}{\rho^2}\right]}}{1 + \frac{(D+1)^2}{\rho^2}} \quad (2.5.55)$$

De este modo, la latitud sobre la esfera terrestre de referencia de un punto de coordenadas cartesianas (x, y) sobre el plano del cuadro vendrá dada por la expresión (2.5.52), donde ρ se calculará con (2.5.53), y el seno y coseno de ϕ con (2.5.54) y (2.5.55).

Para obtener ahora la ecuación correspondiente al cálculo de la longitud, se parte de la fórmula de la cotangente en el triángulo esférico PTA definido en la figura 2.5.16¹⁶⁰:

$$\cotg \phi \cos \varphi_o = \sin \varphi_o \cos Z + \sin Z \cotg \Delta \lambda$$

De donde:

$$\tg \Delta \lambda = \frac{\sin Z}{\cos \varphi_o \cotg \phi - \sin \varphi_o \cos Z}$$

$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda_o = \arctg \left(\frac{\sin Z}{\cos \varphi_o \cotg \phi - \sin \varphi_o \cos Z} \right)$$

$$\lambda = \lambda_o + \arctg \left(\frac{\sin Z}{\cos \varphi_o \cotg \phi - \sin \varphi_o \cos Z} \right)$$

Y considerando la segunda de las expresiones del grupo (2.5.51):

$$\lambda = \lambda_o + \arctg \left(\frac{x}{\rho \cos \varphi_o \cotg \phi - y \sin \varphi_o} \right) \quad (2.5.56)$$

¹⁶⁰ Puede llamar la atención que en la expresión deducida del triángulo de la figura (2.5.16), el término del seno de Z lleve un signo positivo, sin embargo, se puede comprobar que para cualquier posición del punto considerado el signo de su producto por la cotangente de $\Delta \lambda$, vendrá dado por esta última, ya que $\sin (360^\circ - Z) = - \sin Z$ (Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1990. P. 268).

Esta expresión permite conocer la longitud de un punto sobre la esfera terrestre de referencia, a partir de sus coordenadas cartesianas sobre el plano del cuadro, donde ρ se calculará con (2.5.53), y la cotangente de ϕ con el cociente entre (2.5.55) y (2.5.54).

Algunas de las ecuaciones de transformación vistas hasta el momento, pueden dar lugar a una indeterminación en el supuesto particular de que $\rho = 0$, en este caso la solución es sencilla ya que el punto corresponderá al centro de la proyección, con lo cual: $\varphi = \varphi_0$, y $\lambda = \lambda_0$.

Un ejemplo del aspecto de una proyección escenográfica horizontal puede verse en la siguiente figura:

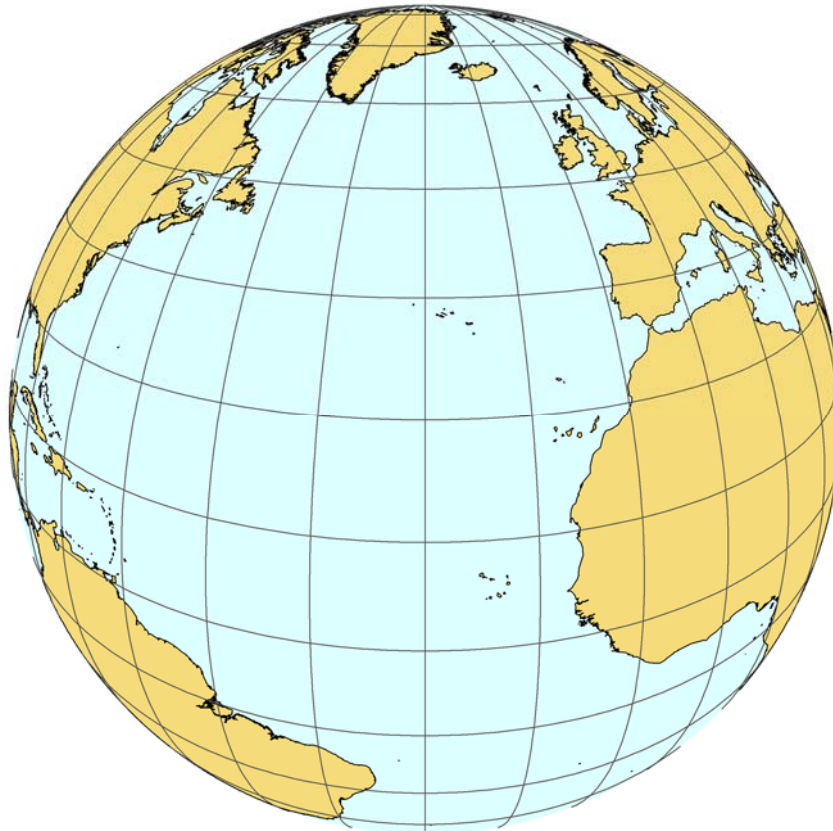


Figura 2.5.18. Proyección escenográfica horizontal con $D=2$ ($\varphi_0 = 30^\circ N$, $\lambda_0 = 030^\circ W$)

2.5.4.2. Deformaciones de la proyección escenográfica

El estudio de las deformaciones en la proyección escenográfica horizontal, se realizará siguiendo el mismo planteamiento que el establecido para la proyección de Mercator y la cónica conforme de Lambert, pudiéndose aplicar posteriormente al resto de perspectivas.

Para ello, se supone una superficie diferencial sobre la esfera y su correspondiente en el plano:

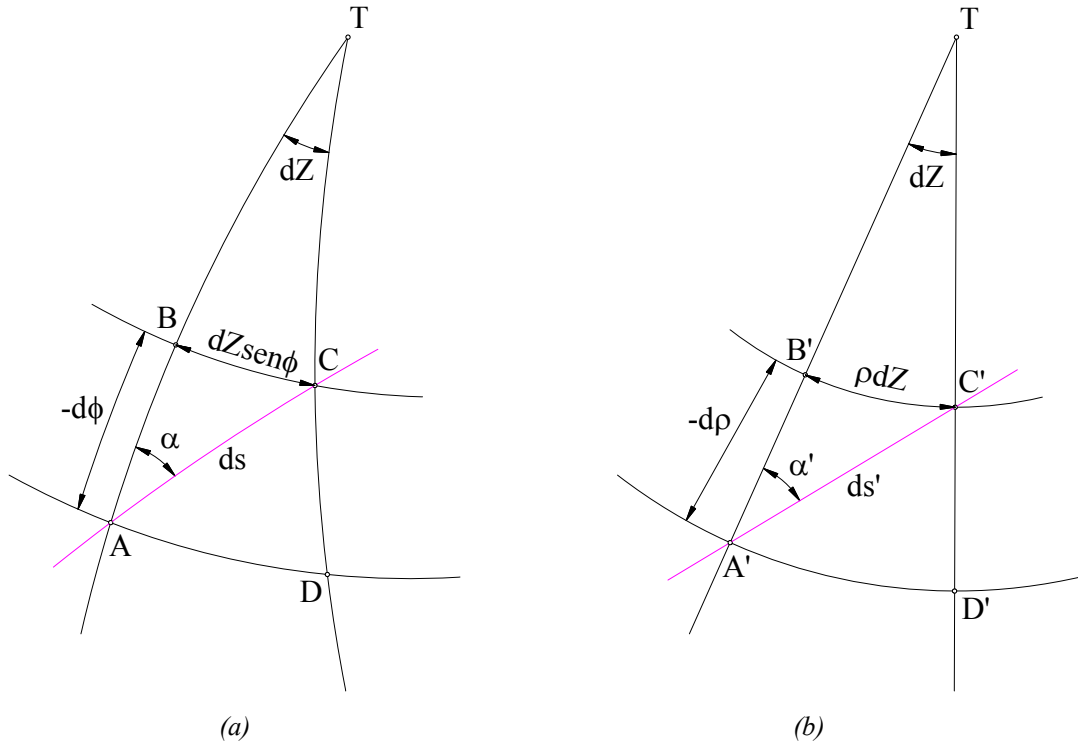


Figura 2.5.19. Estudio de las deformaciones en la proyección escenográfica, basado en la proyección de un triángulo de elementos diferenciales desde la esfera (a) al plano (b).

2.5.4.2.1. Deformación angular

En el triángulo de la figura 2.5.19.a, que por su condición de infinitesimal puede considerarse plano, se comprueba que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dZ \operatorname{sen} \phi}{-d\phi} \quad (2.5.57)$$

Mientras que para su transformada en el plano, de la figura 2.5.19.b:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\rho dZ}{-d\rho} \quad (2.5.58)$$

Por tanto, el módulo de deformación angular en la forma de (2.3.8) será:

$$A = \alpha' - \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\rho dZ}{-d\rho} - \operatorname{arctg} \frac{dZ \operatorname{sen} \phi}{-d\phi} \quad (2.5.59)$$

Para el estudio de la deformación angular, en la práctica, resulta más útil considerar el cociente de las tangentes de los ángulos α' y α :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{\rho dZ}{-d\rho}}{\frac{dZ \operatorname{sen} \phi}{-d\phi}} = \frac{\rho d\phi}{d\rho \operatorname{sen} \phi}$$

Donde sustituyendo el valor de ρ (2.5.45) y el de su derivada $d\rho$:

$$d\rho = \frac{\cos \phi (D+1)(D + \cos \phi) + \sin^2 \phi (D+1)}{(D + \cos \phi)^2} d\phi = \frac{(1 + D \cos \phi)(D+1)}{(D + \cos \phi)^2} d\phi \quad (2.5.60)$$

Se tiene:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{\sin \phi (D+1) d\phi}{D + \cos \phi}}{\frac{(1 + D \cos \phi)(D+1)}{(D + \cos \phi)^2} \sin \phi d\phi} = \frac{D + \cos \phi}{D \cos \phi + 1} \quad (2.5.61)$$

Por tanto:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha \frac{D + \cos \phi}{D \cos \phi + 1} \quad (2.5.62)$$

Como puede observarse, la proyección escenográfica no es conforme, ya que $\operatorname{tg} \alpha' \neq \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha \neq \alpha'$.

Sin embargo, cuando $\phi = 0^\circ$: $\alpha = \alpha'$, lo que demuestra que el acimut se mantiene en el punto de tangencia ($Z = Z'$). Condición que, como ya se ha dicho, puede aplicarse al resto de proyecciones perspectivas por ser independiente de la distancia D.

2.5.4.2.2. Deformación superficial

Para el estudio de la deformación superficial se considerarán las superficies infinitesimales establecidas en la figura 2.5.19.

Para la esfera, según la figura 2.5.19.a:

$$dS = \frac{1}{2} AB \ BC = -\frac{1}{2} d\phi \ dZ \ \sin \phi \quad (2.5.63)$$

Para su transformada en el plano del cuadro, según la figura 2.5.19.b:

$$dS' = \frac{1}{2} A'B' \ A'B' = -\frac{1}{2} \rho \ dZ \ d\rho \quad (2.5.64)$$

Donde sustituyendo los valores de ρ (2.5.45) y $d\rho$ (2.5.60), el módulo de deformación superficial (2.3.9) vendrá dado por la expresión:

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = \frac{-\frac{1}{2} \rho \ dZ \ d\rho}{-\frac{1}{2} d\phi \ dZ \ \sin \phi} = \frac{\rho \ d\rho}{\sin \phi \ d\phi} = \frac{(D+1)^2 (1 + D \cos \phi)}{(D + \cos \phi)^3} \quad (2.5.65)$$

Con lo cual:

$$dS' = dS \frac{(D+1)^2 (1 + D \cos \phi)}{(D + \cos \phi)^3} \quad (2.5.66)$$

Quedando demostrada la no equivalencia de la proyección escenográfica, ya que $\sigma \neq 1$. También de (2.5.66) se demuestra que la deformación superficial será función de la distancia al punto de tangencia ϕ .

2.5.4.2.3. Deformación lineal

Tomando el elemento lineal diferencial ds sobre la esfera, según lo establecido en la figura 2.5.19.a, este puede expresarse del siguiente modo:

$$ds = -d\phi \sec \alpha \quad (2.5.67)$$

Mientras que su homólogo en el plano ds' , según la figura 2.5.19.b:

$$ds' = -d\rho \sec \alpha'$$

$$ds' = -d\rho \sqrt{1 + \tan^2 \alpha'} \quad (2.5.68)$$

Por lo tanto, el módulo de deformación lineal (2.3.10), sustituyendo $d\rho$ (2.5.60) y $\tan \alpha'$ (2.5.62) por sus valores, responderá a la expresión:

$$K = \frac{ds'}{ds} = \frac{d\rho \sec \alpha'}{d\phi \sec \alpha} = \frac{d\rho}{d\phi} \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha'}}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{(D+1)(1 + D \cos \phi)}{(D + \cos \phi)^2} \sqrt{\frac{1 + \tan \alpha \frac{D + \cos \phi}{D \cos \phi + 1}}{1 + \tan^2 \alpha}} \quad (2.5.69)$$

$$= \frac{(D+1)(1 + D \cos \phi)}{(D + \cos \phi)^2} \sqrt{\cos^2 \alpha + \left(\frac{D + \cos \phi}{D \cos \phi + 1} \right)^2 \sin^2 \alpha}$$

Con lo cual:

$$ds' = ds \frac{(D+1)(1 + D \cos \phi)}{(D + \cos \phi)^2} \sqrt{\cos^2 \alpha + \left(\frac{D + \cos \phi}{D \cos \phi + 1} \right)^2 \sin^2 \alpha} \quad (2.5.70)$$

Esta expresión sirve para demostrar dos propiedades de las proyecciones perspectivas. La primera es que la deformación lineal será función de la dirección que se considere. La segunda es que todo círculo sobre la esfera, cuyo plano sea paralelo al de proyección, se proyectará sobre el plano como una circunferencia de centro en T y tendrá la propiedad de isométrica, es decir, sobre ella K será constante.

Puede observarse también que la expresión (2.5.70) corresponde a la ecuación de una elipse, y al ser su radio igual a ds' , ésta será la ecuación de la elipse indicatriz de Tissot.

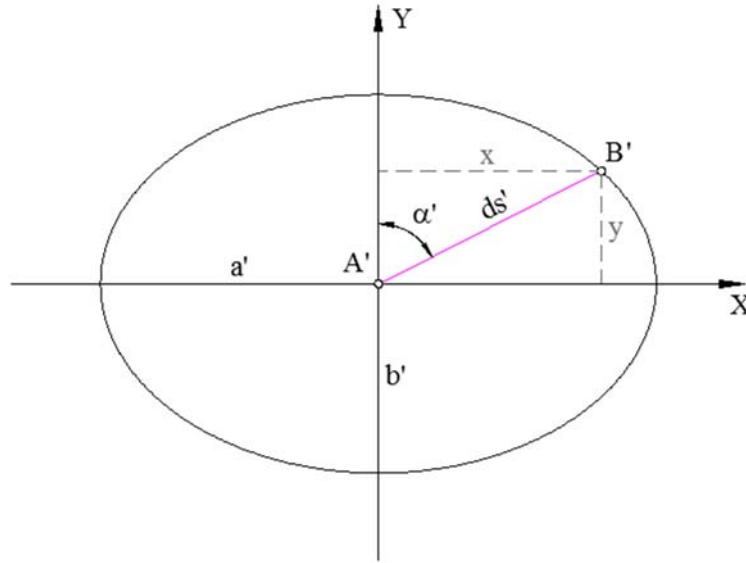


Figura 2.5.20. Descripción de los elementos de la elipse indicatriz de deformaciones en las proyecciones perspectivas.

Para demostrar que la ecuación (2.5.70) se corresponde con la de una elipse puede seguirse el siguiente razonamiento¹⁶¹. De la figura 2.5.20¹⁶² se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} x &= ds' \sin \alpha' \\ y &= ds' \cos \alpha' \end{aligned} \right\}$$

Sustituyendo las igualdades anteriores en la ecuación general de la elipse:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} &= 1 \\ \frac{ds'^2 \sin^2 \alpha'}{a'^2} + \frac{ds'^2 \cos^2 \alpha'}{b'^2} &= 1 \\ ds'^2 (b'^2 \sin^2 \alpha' + a'^2 \cos^2 \alpha') &= a'^2 b'^2 \\ ds' &= \frac{a' b' \sqrt{b'^2 \sin^2 \alpha' + a'^2 \cos^2 \alpha'}}{b'^2 \sin^2 \alpha' + a'^2 \cos^2 \alpha'} \\ ds' &= \frac{a' b'}{b'^2 \sin^2 \alpha' + a'^2 \cos^2 \alpha'} \sqrt{\cos^2 \alpha' + \frac{b'^2}{a'^2} \sin^2 \alpha'} \end{aligned} \quad (2.5.71)$$

Esta última expresión es semejante a la (2.5.70), y corresponderá a la ecuación de la elipse indicatriz de Tissot, obtenida al proyectar sobre el plano la traza dejada sobre la esfera por un elemento lineal diferencial ds al que se le haga rotar en torno a uno de sus extremos.

¹⁶¹ López Varela, Pablo: Análisis de Idoneidad de las Derrotas empleadas en Navegación Marítima sobre las Proyecciones de Mercator, Gnomónica y Estereográfica. Tesis Doctoral, Departamento de Energía y Propulsión Marina, Universidad de A Coruña, 2005. Pp. 145 a 147.

¹⁶² Pita Porta, Antonio F.: *Apuntes de la asignatura "Navegación III"*, del cuarto curso de la Licenciatura de Marina Civil, sección Náutica, Escuela Superior de la Marina Civil, A Coruña, curso 1997-1998.

Respecto a la orientación de la elipse indicatriz de Tissot sobre el plano, puede decirse que su semieje mayor coincidirá con la dirección, en la cual la deformación lineal sea máxima. Así, en (2.5.71) se observa que, para un punto cualquiera, ds' alcanzará su valor máximo cuando lo sea el término:

$$\cos^2 \alpha + \left(\frac{D + \cos \phi}{D \cos \phi + 1} \right)^2 \sin^2 \alpha$$

En el caso de la proyección escenográfica, donde $D > 1$, el término anterior será máximo cuando $\alpha = 90^\circ$, ya que para cualquier punto diferente del centro de la proyección (donde $\phi = 0^\circ$):

$$\frac{D + \cos \phi}{D \cos \phi + 1} > 1$$

Mientras que será mínimo cuando $\alpha = 0^\circ$.

Así, si se considera sobre la esfera de referencia los verticales y almicantarats respecto al centro de proyección T, de forma semejante a como se consideran meridianos y paralelos respecto al polo, las direcciones definidas por los almicantarats coincidirán con las de los ejes mayores de las elipses indicatrices de deformaciones, mientras que las definidas por los verticales coincidirán con los ejes menores. Además, si se considera el elemento ds como unitario, los semiejes de la elipse indicatriz coincidirán con los módulos de dilatación lineal a lo largo del almicantarat k_a y del vertical h_v .

Para el cálculo del módulo de dilatación lineal a lo largo del almicantarat k_a , bastará con considerar $\alpha = 90^\circ$ en la expresión general (2.5.69):

$$k_a = \frac{D + 1}{D + \cos \phi} \quad (2.5.72)$$

De forma similar, para el cálculo del módulo de dilatación lineal en el sentido del vertical h_v , se considerará $\alpha = 0^\circ$ en la expresión general (2.5.69):

$$h_v = \frac{(1 + D \cos \phi)(D + 1)}{(D + \cos \phi)^2} = k_a \frac{1 + D \cos \phi}{D + \cos \phi} \quad (2.5.73)$$

Las expresiones (2.5.72) y (2.5.73) también pueden expresarse en función de las coordenadas geográficas del centro de la proyección, y del punto a considerar, sustituyendo el valor del coseno de ϕ por su valor (2.5.47)¹⁶³:

$$k_a = \frac{D + 1}{D + \sin \varphi \sin \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos \Delta \lambda} \quad (2.5.74)$$

$$h_v = k_a \frac{1 + D(\sin \varphi \sin \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos \Delta \lambda)}{D + \sin \varphi \sin \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos \Delta \lambda} \quad (2.5.75)$$

Dependiendo del valor de D , los módulos de deformación se corresponden con los semiejes de la elipse indicatriz de la siguiente manera¹⁶⁴:

¹⁶³ VV.AA.: *Apuntes de cartografía. Fascículo primero, Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales*, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970. P. 67.

¹⁶⁴ Considérese en cualquier caso que el semieje mayor corresponderá al módulo de valor superior.

$$\text{Si: } k_a > h_v \Rightarrow k_a = a'; h_v = b'$$

$$\text{Si: } k_a < h_v \Rightarrow k_a = b'; h_v = a'$$

$$\text{Si: } k_a = h_v \Rightarrow k_a = b' = h_v = a'$$

En la figura 2.5.21 se representa una proyección escenográfica horizontal donde se han incluido las elipses indicatrices de deformaciones.

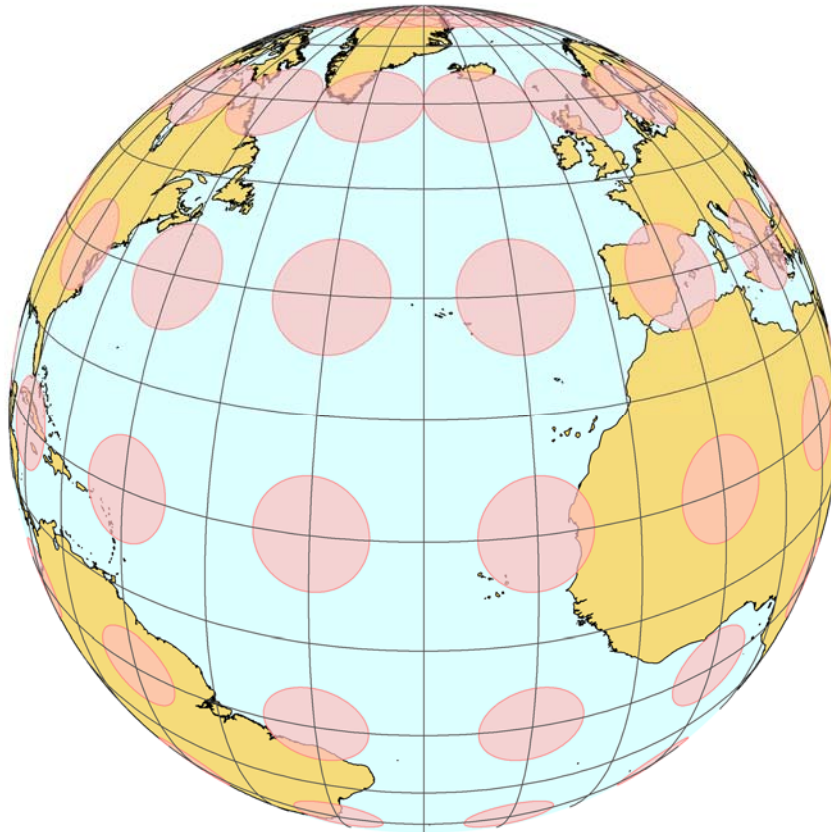


Figura 2.5.21. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección escenográfica horizontal para $D = 2$ ($\varphi_0 = 30^\circ N$, $\lambda_0 = 030^\circ W$).

2.5.4.3. Límites geométricos de las proyecciones perspectivas

Las proyecciones perspectivas presentan el inconveniente, de que ninguna de ellas permitirá representar sobre el plano, la totalidad de la superficie terrestre. Los límites de esta representación serán puramente geométricos, y pueden establecerse, en función de la posición del punto de vista, mediante una expresión matemática sencilla.

Así, en las proyecciones escenográficas, donde el punto de vista es exterior a la esfera de referencia, es decir $D > R$, el límite geométrico de la proyección vendrá determinado por el haz de visuales tangentes a la esfera, tal y como puede verse en la siguiente figura.

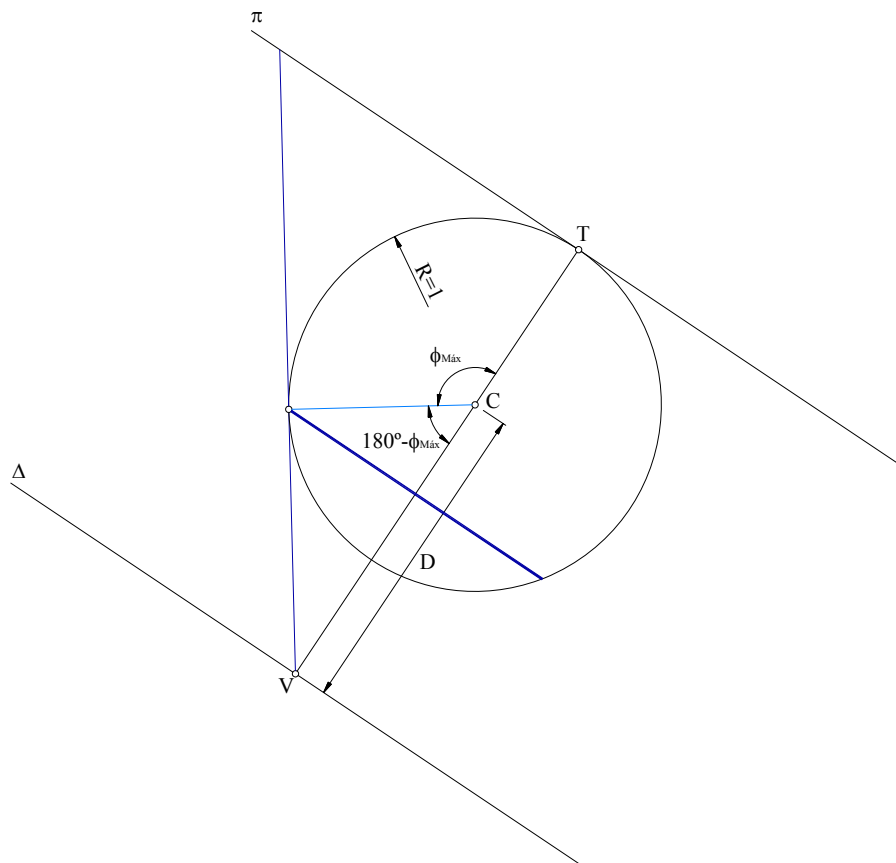


Figura 2.5.22. Límite geométrico de una proyección perspectiva, siendo $D > R$.

De este modo, el límite geométrico en este caso ($D > R$) estará formado por el círculo de la esfera de referencia cuyos puntos cumplan que su coordenada polar ϕ ($\phi_{Máx}$) sea:

$$\cos \phi_{Máx} = -\frac{R}{D}$$

Y ya que se considera $R = 1$:

$$\cos \phi_{Máx} = -\frac{1}{D} \quad (2.5.76)$$

En el caso particular de la proyección ortográfica, donde $D = \infty$, el límite geométrico será el de los puntos de $\phi = 90^\circ$, es decir, el círculo máximo de la esfera de plano paralelo al de proyección.

Por el contrario, si el punto de vista fuera interior $D < R$, el límite geométrico vendrá determinado por el conjunto de visuales paralelas al plano de proyección, ya que éstas lo intersecarán en el infinito.

2.5.5. Proyección estereográfica

En la proyección estereográfica, el vértice de proyección o punto de vista, está sobre la superficie de referencia ($D = 1$) en el punto diametralmente opuesto al de tangencia.

Es una proyección de gran importancia puesto que es la única proyección auténticamente perspectiva que conserva los ángulos, esto es, la única perspectiva conforme¹⁶⁵.

Como en todas las proyecciones perspectivas existen tres tipos fundamentales de proyección estereográfica: horizontales u oblicuas, polares o ecuatoriales y transversas o meridianas.

2.5.5.1. Orígenes de la proyección estereográfica

Hiparco de Nicea¹⁶⁶ siglo II a.C, se considera que fue el inventor de la proyección estereográfica, nombre que le fue asignado por Francois d'Aiguillon in 1613¹⁶⁷. Esta proyección nace vinculada a la astronomía, y hasta principios del siglo XVI, fue exclusivamente empleada para la producción de mapas estelares y construcción de astrolabios, de ahí que fuese también conocida popularmente como proyección de astrolabio¹⁶⁸. Sin embargo, a partir de este momento su aplicación al campo de la cartografía geográfica fue en aumento. Así, durante los siglos XVI y XVII, el aspecto oblicuo de la proyección estereográfica fue la base de la gran mayoría de la producción cartográfica, especialmente en lo referente a la elaboración de atlas¹⁶⁹. Precursores de este redescubrimiento de la proyección estereográfica en el campo de la cartografía “terrestre” fueron Johannes Werner, quien en 1515 presentó un mapa en su aspecto oblicuo; Orencio Fineo, quien publicó, en 1544, el mapa de un hemisferio terrestre en aspecto meridiano; y Rumold Mercator, quien en 1595, presenta una reedición del Atlas de su padre (el célebre Gerardus Mercator) donde introduce como novedad la representación en estereográfica meridiana de sus mapamundis¹⁷⁰.

Su uso fue popular durante los siglos XVII y XVIII debido a la facilidad de trazado de la red de meridianos y paralelos, siendo desplazado a lo largo del XIX por la proyección acimutal equidistante y la acimutal equivalente de Lambert.

En el siglo XX la proyección estereográfica se convierte en uno de los medios más comunes de representar las zonas polares en mapas de media y gran escala, y ya a mediados de siglo, fue adoptada cómo oficial en la cartografía militar de muchos países con el nombre de Universal Polar Estereográfica (UPS).

¹⁶⁵ Baselga Moreno, S.: *Fundamentos de Cartografía Matemática*, Editorial Universidad Politécnica de Valencia, 2006. P. 30.

¹⁶⁶ (190-127 a.C.), astrónomo griego, el más importante de su época. Descubrió la precesión de los equinoccios; catalogó, hizo gráficos y calculó el brillo de unas 1.000 estrellas; recopiló una tabla de cuerdas trigonométricas que fueron la base de la trigonometría moderna; y fue la principal influencia en la posterior obra de Tolomeo, a través del cual son conocidos muchos de sus méritos (*Enciclopedia Microsoft Encarta 2002*, Microsoft Corporation, Redmond USA).

¹⁶⁷ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 154.

¹⁶⁸ Rosenfeld, B. A.; Sergeeva, N. D.: *Lecciones populares de matemáticas: Proyección Estereográfica*, Editorial MIR, Moscú, 1977. P.37.

¹⁶⁹ Snyder, John P.: *Flattening the Earth, Two thousand years of map projections*, The University of Chicago Press, Chicago, 1993. P. 27.

¹⁷⁰ López Varela, Pablo: Análisis de Idoneidad de las Derrotas empleadas en Navegación Marítima sobre las Proyecciones de Mercator, Gnomónica y Estereográfica. Tesis Doctoral, Departamento de Energía y Propulsión Marina, Universidad de A Coruña, 2005. P. 153.

Esta proyección en su aspecto polar, también es usada en la actualidad en navegación aérea; complementa a la proyección cónica conforme de Lambert y a la proyección de Mercator para cubrir las necesidades de la navegación aérea en la zona polar¹⁷¹.

2.5.5.2. Características principales de la proyección estereográfica

La estereográfica comparte propiedades con el resto de perspectivas, sin embargo presenta dos características propias, que la hacen especialmente útil en el ámbito de la navegación marítima:

- La proyección estereográfica es conforme¹⁷².
- Todo círculo de la esfera de referencia se representará sobre el plano como una circunferencia, excepto aquellos que contienen al vértice de proyección, que se proyectarán como rectas.

La primera de las propiedades mencionadas se demostrará posteriormente en el estudio de las deformaciones de la proyección. Respecto a la segunda, es más sencillo demostrarla desde un punto de vista geométrico.

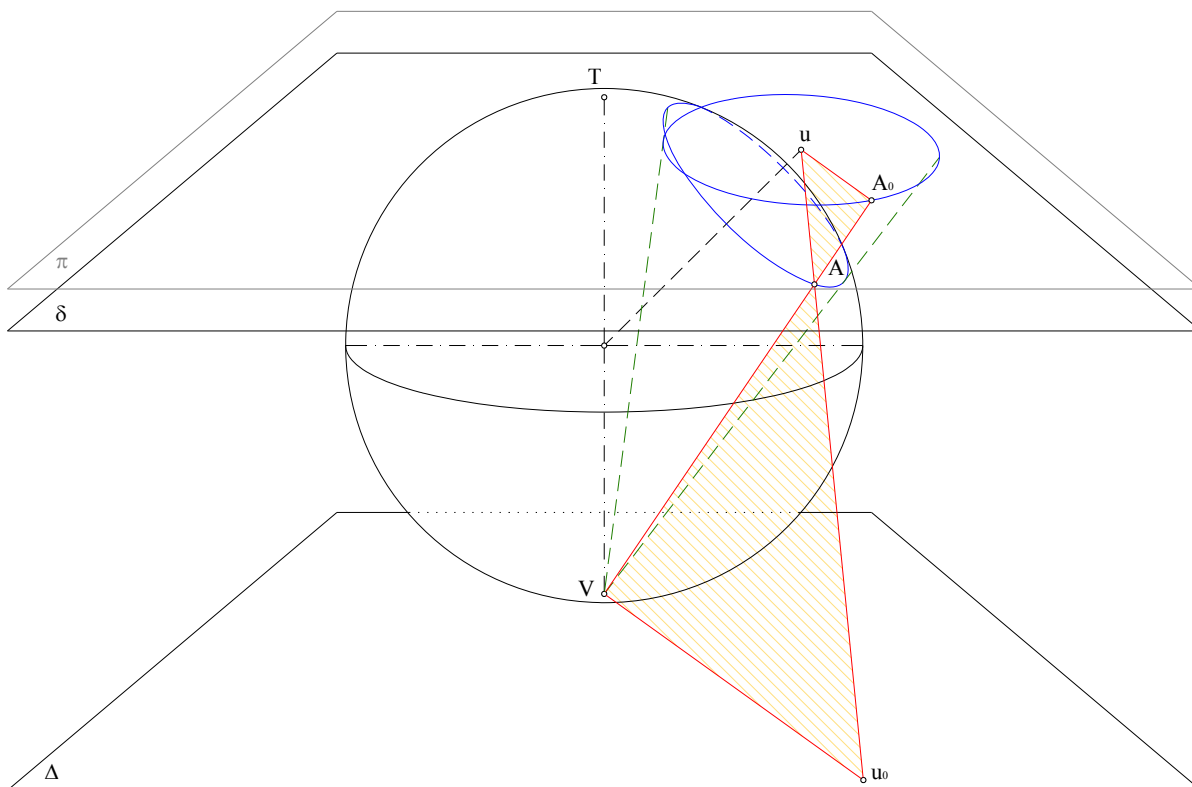


Figura 2.5.24. Proyección estereográfica: proyección de un círculo de la esfera sobre un plano paralelo al de proyección que contenga al vértice del cono tangente a la esfera por dicho círculo.

¹⁷¹ Moya Honduvilla, Javier; Bernabé Poveda, Miguel Ángel: *Descubrir la cartografía aeronáutica*, Centro de Documentación y Publicaciones de Aena, Madrid, 2011. P. 60.

¹⁷² Esto es cierto solo cuando se considera como superficie de referencia la esfera, en el caso de considerar un elipsoide de revolución no se cumplirá la condición de conformidad. Es posible obtener una proyección estereográfica conforme del elipsoide, pero no de forma geométrica, sino analítica, modificando de forma matemática la deformación en el sentido del vertical.

En la figura anterior se representa la proyección de un círculo de la esfera de referencia (en azul) sobre un plano del cuadro δ , que pase por el vértice u del cono tangente a la esfera según dicho círculo. Si se proyecta un punto cualquiera A , del círculo considerado, sobre el plano δ (paralelo al tangente π y, por tanto, también al de desvanecimiento Δ), se obtendrá su transformada A_0 . Proyectando sobre el plano de desvanecimiento A desde u (prolongando la recta uA), se obtiene el punto u_0 . En la construcción descrita los segmentos u_0V y u_0A son iguales ($u_0V = u_0A$), ya que ambos son tangentes a la esfera desde u_0 , por estar contenidas en el plano Δ y en el cono tangente, respectivamente. Además, al ser los segmentos u_0V y uA_0 paralelos, los triángulos A_0Au y u_0AV serán semejantes y, por consiguiente, $uA_0 = uA$. Y como para cualquier posición del punto A sobre el círculo menor considerado la longitud del segmento uA es constante, también lo será la longitud del segmento uA_0 , demostrándose así que todos los puntos de dicho círculo, proyectados sobre el plano δ , forman una circunferencia de centro u y radio uA_0 ¹⁷³. Si el círculo de la esfera contiene el vértice V , todas las visuales de su proyección estarán contenidas en un plano, por lo que su traza sobre el plano del cuadro será una línea recta.

También puede demostrarse geométicamente que, si en lugar de proyectar un círculo de la esfera sobre el plano que contenga al vértice del cono tangente a la esfera según dicho círculo, se emplease un plano del cuadro π , tangente a la esfera en T y paralelo al primero, la proyección del círculo seguirá siendo una circunferencia. El planteamiento gráfico de dicha demostración puede seguirse en la siguiente figura:

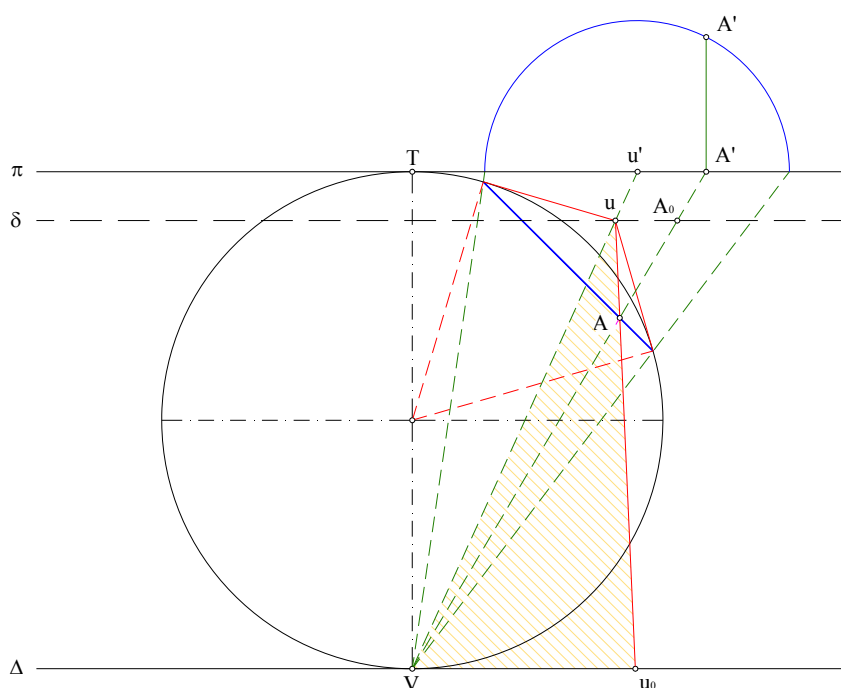


Figura 2.5.25. Demostración geométrica de que las propiedades de la proyección estereográfica no sufren cambios al emplear planos de proyección paralelos.

Como se estableció anteriormente con ayuda de la figura 2.5.24, los triángulos A_0Au y u_0AV son semejantes, y las distancias uA_0 y uA iguales y constantes. En la figura 2.5.25 los triángulos VuA_0 y $Vu'A'$ serán también semejantes y, por tanto, si la distancia uA_0 permanece constante para cualquier

¹⁷³ Figueroa, Fernando: *Apuntes de cartografía aplicados a la navegación aérea*, Editorial Aeronáutica SUMAAS, Madrid, 1977. Pp. 30 y 31.

posición de A, también lo hará u'A'. Se demuestra así que la proyección de un círculo de la esfera será una circunferencia tanto en el plano δ como en π , siendo el centro de dicha circunferencia la proyección del vértice del cono tangente a la esfera por el círculo a proyectar.

2.5.5.3. Transformación de coordenadas

2.5.5.3.1. Transformación de coordenadas polares en la esfera a polares en el plano

Particularizando las funciones de paso (2.5.45) y (2.5.46) de coordenadas esféricas polares (ϕ , Z) en la esfera de referencia, a planas polares (ρ , Z') en el plano del cuadro, obtenidas para la proyección escenográfica horizontal, se tiene que para la proyección estereográfica ($D = 1$) dichas expresiones serán:

$$\rho = \frac{\sin \phi (D+1)}{D + \cos \phi} = \frac{2 \sin \phi}{1 + \cos \phi} = \frac{2 \left(2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \right)}{1 + 1 - 2 \sin^2 \frac{\phi}{2}} = 2 \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho = 2 \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} \\ Z = Z' \end{array} \right\} \quad (2.5.78)$$

Expresiones que pueden obtenerse directamente del planteamiento gráfico de la proyección estereográfica descrito en la siguiente figura:

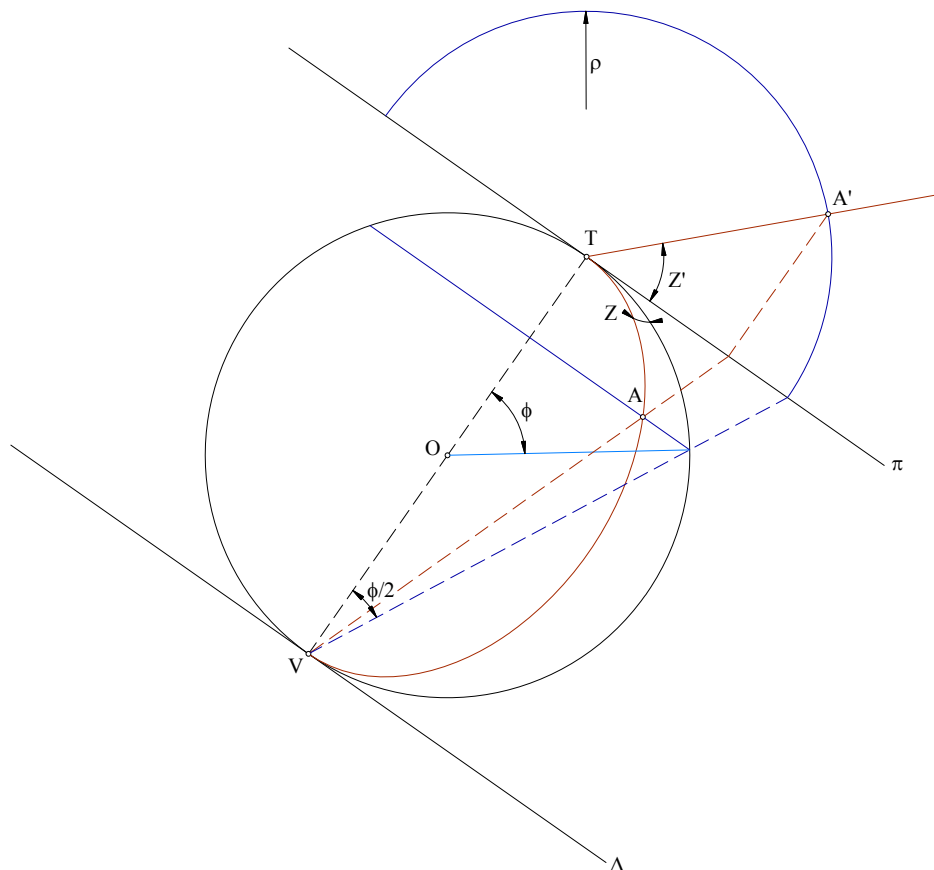


Figura 2.5.26. Planteamiento geométrico de la proyección estereográfica horizontal.

2.5.5.3.2. Transformación de coordenadas geográficas en la esfera a cartesianas en el plano

Particularizando las expresiones (2.5.49) de la proyección escenográfica horizontal para $D = 1$, se obtienen las ecuaciones de transformación de coordenadas geográficas en la esfera terrestre de referencia a cartesianas en el plano del cuadro.

- Para la proyección estereográfica horizontal, de (2.5.49) se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2 \cos \varphi \sin \Delta \lambda}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda} \\ y &= \frac{2 (\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta \lambda)}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.79)$$

Un ejemplo de una proyección estereográfica horizontal puede verse en la siguiente figura:

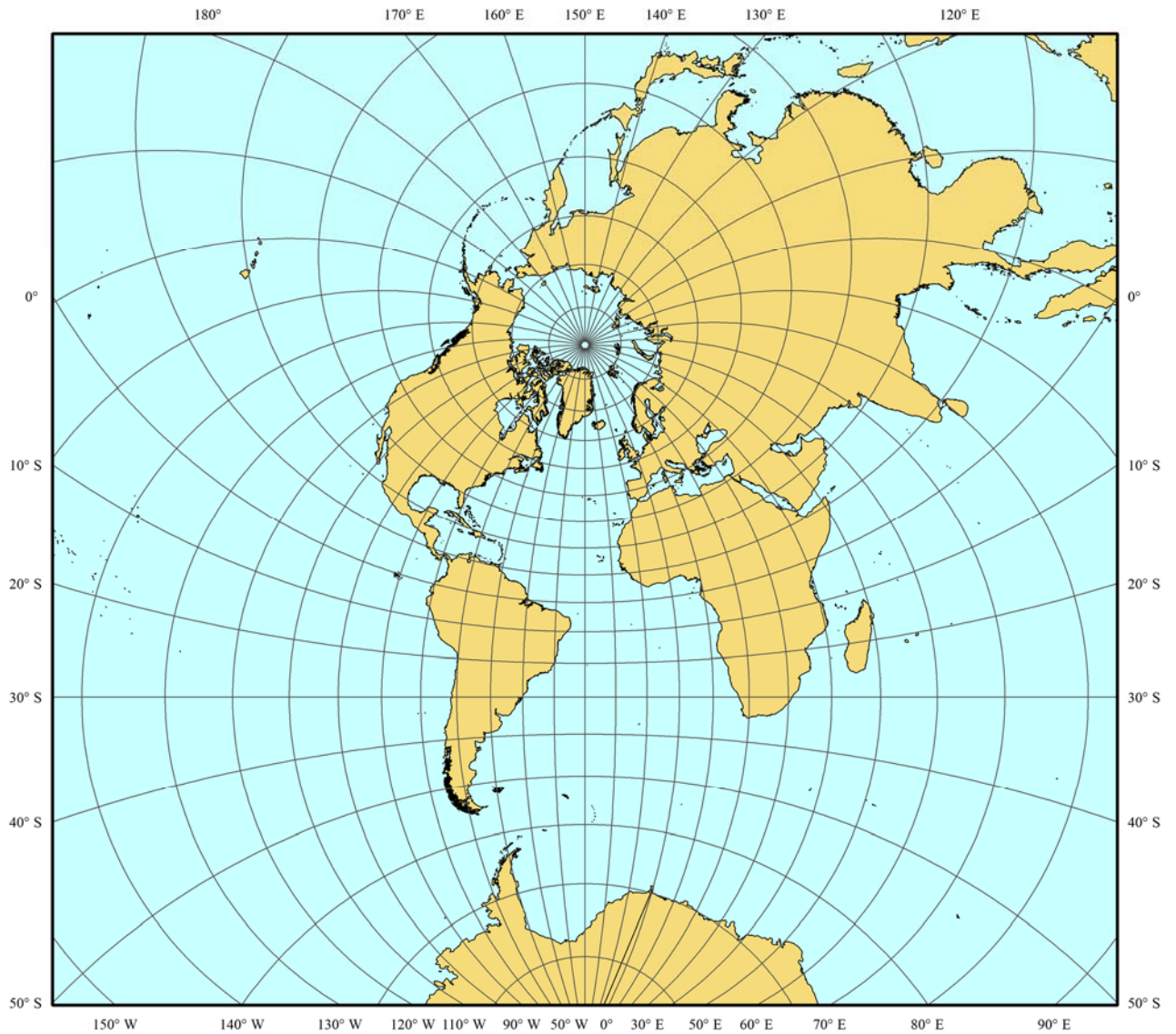


Figura 2.5.27. Proyección estereográfica horizontal con centro en: $\varphi_o = 30^\circ N$, $\lambda_o = 030^\circ W$

- Para la proyección estereográfica polar, se particulariza la expresión anterior para $\varphi_o = \pm 90^\circ$ (Polo Norte), teniendo:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2 \cos \varphi \sin \Delta \lambda}{1 + \sin \varphi} \\ y &= -\frac{2 \cos \varphi \cos \Delta \lambda}{1 + \sin \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.80)$$

- Y para $\varphi_o = -90^\circ$ (sur):

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2 \cos \varphi \sin \Delta \lambda}{1 - \sin \varphi} \\ y &= \frac{2 \cos \varphi \cos \Delta \lambda}{1 - \sin \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.81)$$

Un ejemplo de una proyección estereográfica polar, puede verse en la siguiente figura:

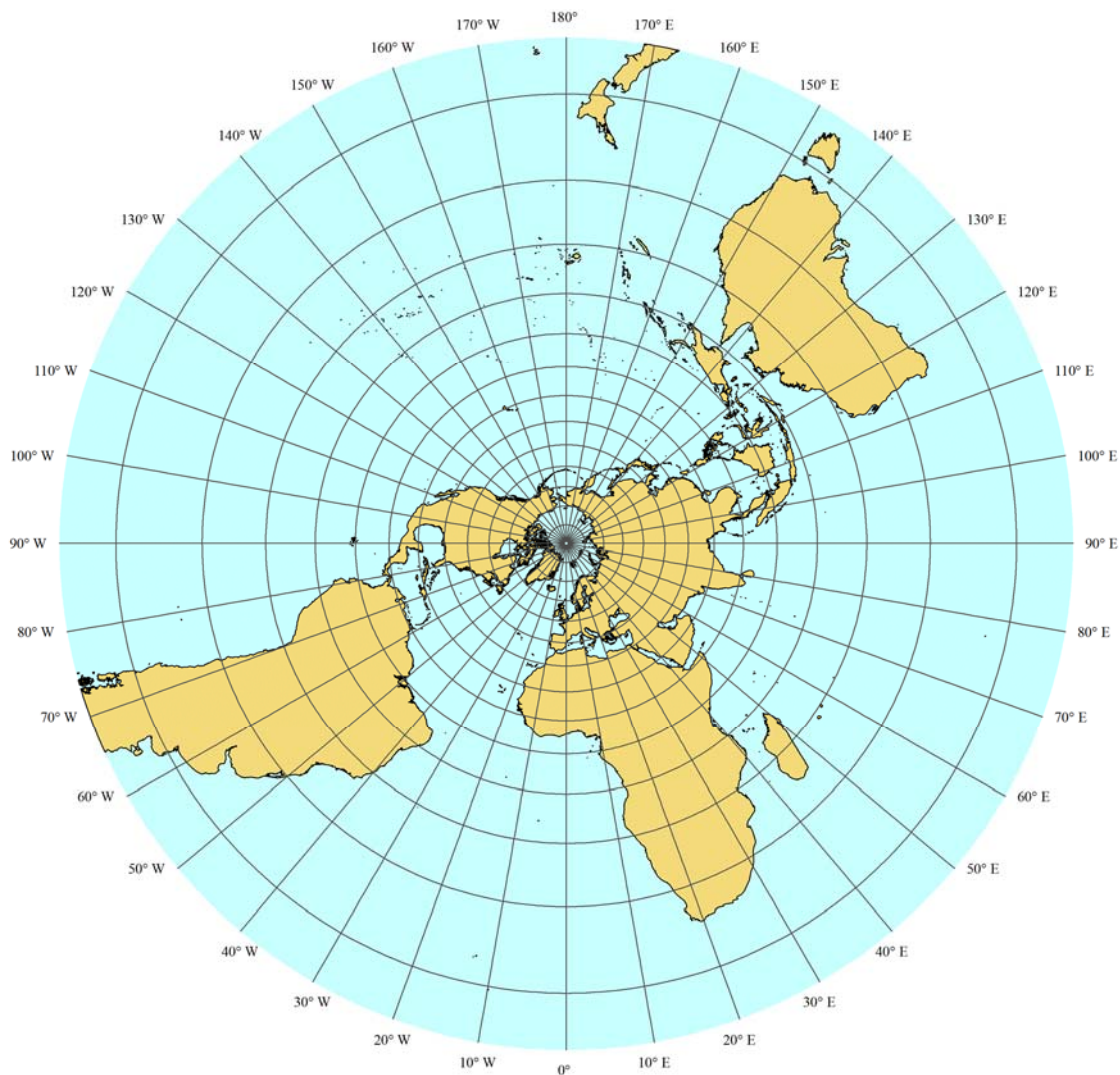


Figura 2.5.28. Proyección estereográfica polar con centro en: $\varphi_0 = 90^\circ N$.

- Para la proyección estereográfica transversa, se particulariza la expresión (2.5.79) tomando $\varphi_0 = 0^\circ$, teniendo:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2 \cos \varphi \sin \Delta \lambda}{1 + \cos \varphi \cos \Delta \lambda} \\ y &= \frac{2 \sin \varphi}{1 + \cos \varphi \cos \Delta \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.82)$$

Un ejemplo de proyección estereográfica transversa puede verse en la siguiente figura:

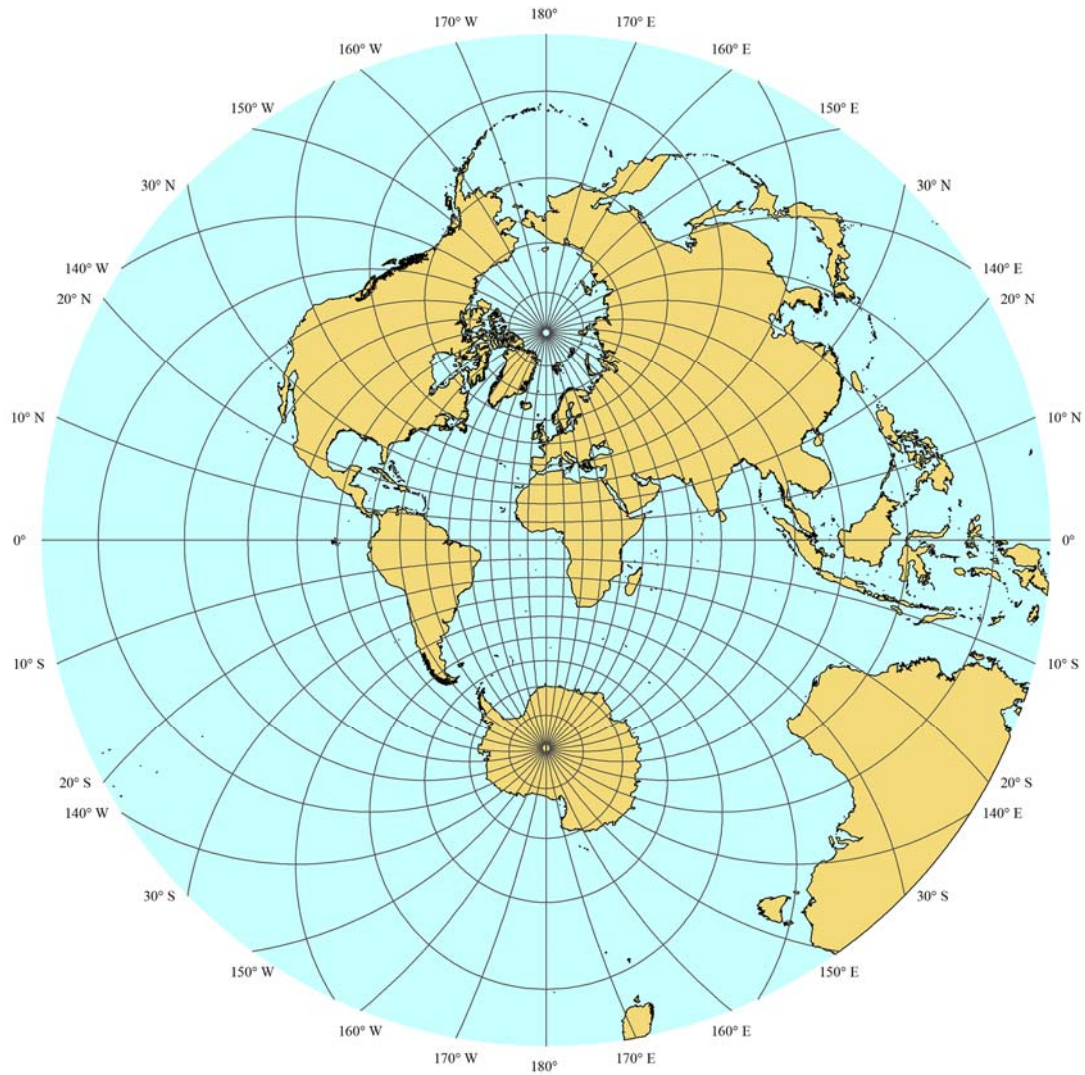


Figura 2.5.29. Proyección estereográfica transversa con centro en: $\varphi_o = 00^\circ$, $\lambda_o = 000^\circ$.

2.5.5.3.3. Transformación de coordenadas cartesianas en el plano a geográficas en la esfera

Particularizando las expresiones (2.5.52) y (2.5.56) de la proyección escenográfica horizontal para $D = 1$, se obtienen las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a geográficas en la esfera terrestre de referencia.

Para desarrollar las expresiones (2.5.52) y (2.5.56) deberán obtenerse los valores del seno y el coseno de ϕ para $D = 1$. De este modo, considerando (2.5.54) y (2.5.55) se tiene:

$$\sin \phi = \frac{4\rho}{4 + \rho^2} \quad (2.5.83)$$

$$\cos \phi = \frac{4 - \rho^2}{4 + \rho^2} \quad (2.5.84)$$

Así, tomando las ecuaciones de paso de coordenadas cartesianas a geográficas (2.5.52) y (2.5.56), y sustituyendo en ellas los valores de (2.5.83) y (2.5.84), se obtiene:

- Para la proyección estereográfica horizontal:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen \left\{ \frac{1}{4 + \rho^2} \left[(4 - \rho^2) \sen \varphi_o + 4 y \cos \varphi_o \right] \right\} \\ \lambda &= \lambda_o + \arctg \left[\frac{4 x}{(4 - \rho^2) \cos \varphi_o - 4 y \sen \varphi_o} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.5.85)$$

- Para la proyección estereográfica polar, se particulariza la expresión anterior para $\varphi_o = +90^\circ$ (Polo Norte), teniendo:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen \left(\frac{4 - \rho^2}{4 + \rho^2} \right); \quad \varphi = 90^\circ - 2 \arctg \left(\frac{\rho}{2} \right) \\ \lambda &= \lambda_o + \arctg \left(-\frac{x}{y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.86)$$

- Para la proyección estereográfica polar, se particulariza la expresión (2.5.85) para $\varphi_o = -90^\circ$ (Polo Sur), teniendo:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen \left(-\frac{4 - \rho^2}{4 + \rho^2} \right); \quad \varphi = -90^\circ + 2 \arctg \left(\frac{\rho}{2} \right) \\ \lambda &= \lambda_o + \arctg \left(\frac{x}{y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.87)$$

- Para la proyección estereográfica transversa, se particulariza la expresión (2.5.85) tomando $\varphi_o = 0^\circ$, teniendo:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen \left(\frac{4 y}{4 + \rho^2} \right) \\ \lambda &= \lambda_o + \arctg \left(\frac{4 x}{4 - \rho^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.88)$$

En las expresiones anteriores ρ vendrá dada por la ya vista (2.5.53):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2.5.5.4. Deformaciones de la proyección estereográfica

A continuación se particularizarán, para un valor de $D = 1$, las expresiones genéricas para el cálculo de las deformaciones angular, lineal y superficial, deducidas para la proyección escenográfica.

2.5.5.4.1. Deformación angular

Partiendo de la expresión (2.5.61) se obtiene:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{D + \cos \phi}{D \cos \phi + 1} = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha \quad (2.5.89)$$

Se demuestra que la proyección estereográfica es conforme ($\alpha = \alpha'$).

2.5.5.4.2. Deformación superficial

Partiendo de la expresión (2.5.65) se obtiene:

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = \frac{(D+1)^2(1+D\cos\phi)}{(D+\cos\phi)^3} = \frac{4}{(1+\cos\phi)^2} \neq 1 \quad (2.5.90)$$

El módulo de deformación superficial también puede expresarse en función de las coordenadas geográficas; para ello en (2.5.47) se obtuvo la relación entre esta distancia ϕ , y las coordenadas geográficas de los puntos de la esfera:

$$\cos\phi = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos\Delta\lambda$$

Sustituyendo este valor en (2.5.90):

$$\sigma = \frac{4}{(1 + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos\Delta\lambda)^2} \quad (2.5.91)$$

Para la proyección estereográfica polar, se particulariza la expresión anterior para $\varphi_0 = +90^\circ$ (Norte) teniendo:

$$\sigma = \frac{4}{(1 + \operatorname{sen}\varphi)^2} \quad (2.5.92)$$

Y para $\varphi_0 = -90^\circ$ (Sur):

$$\sigma = \frac{4}{(1 - \operatorname{sen}\varphi)^2} \quad (2.5.93)$$

Para la proyección estereográfica transversa, se particulariza la expresión (2.5.91) para $\varphi_0 = 0^\circ$ teniendo:

$$\sigma = K^2 = \frac{4}{(1 + \cos\varphi\cos\Delta\lambda)^2} \quad (2.5.94)$$

2.5.5.4.3. Deformación lineal

Partiendo de la expresión (2.5.69) se obtiene:

$$K = \frac{ds'}{ds} = \frac{(D+1)(1+D\cos\phi)}{(D+\cos\phi)^2} \sqrt{\cos^2\alpha + \left(\frac{D+\cos\phi}{D\cos\phi+1}\right)^2 \operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{2}{1+\cos\phi} \quad (2.5.95)$$

$$ds' = ds \frac{2}{1 + \cos \phi} \quad (2.5.96)$$

Por lo que se demuestra, que la deformación lineal es constante en todas las direcciones en el entorno diferencial de un punto de coordenadas (ρ , Z). Así, un círculo de radio ds sobre la esfera se proyectará como una circunferencia de radio ds' sobre el plano, de modo que, la elipse indicatriz de Tissot degenerará en una circunferencia de radio:

$$a' = b' = \frac{2}{1 + \cos \phi} \quad (2.5.97)$$

De (2.5.96) también se deduce que en el punto de tangencia ($\phi = 0^\circ$) la deformación lineal será mínima, ya que $ds' = ds$ ($K = 1$), y será infinita en su antípoda ($\phi = 180^\circ$), coincidente con la situación del punto de vista, perteneciente al plano de desvanecimiento. Así, el punto de la esfera donde se sitúa el vértice de la proyección no tendrá representación, con lo cual nunca se podrá obtener una proyección de toda la esfera terrestre de forma estereográfica. Como norma general su uso se limita a la representación del hemisferio opuesto al punto de vista, ya que, para una superficie mayor las deformaciones tanto lineales como especialmente las superficiales se vuelven demasiado grandes¹⁷⁴

Al igual que el módulo de deformación superficial, el módulo de deformación lineal también puede expresarse en función de las coordenadas geográficas:

$$K = \frac{2}{1 + \cos \phi} = \frac{2}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda} \quad (2.5.98)$$

Para la proyección estereográfica polar, se particulariza la expresión anterior para $\varphi_0 = + 90^\circ$ (Polo Norte) teniendo:

$$K = \frac{2}{1 + \sin \varphi} \quad (2.5.99)$$

Y para $\varphi_0 = - 90^\circ$ (Polo Sur):

$$K = \frac{2}{1 - \sin \varphi} \quad (2.5.100)$$

Para la proyección estereográfica transversa, se particulariza la expresión (2.5.98) para $\varphi_0 = 0^\circ$ teniendo:

$$K = \frac{2}{1 + \cos \varphi \cos \Delta \lambda} \quad (2.5.101)$$

Quedando demostrado que en la proyección estereográfica:

$$\sigma = K^2 \quad (2.5.102)$$

¹⁷⁴ Sanjosé Blasco, J.J.; García León, J.; López González, M.: Introducción a las ciencias que estudian la geometría de la superficie terrestre: geodesia, cartografía, fotogrametría, topografía, Bellisco Ediciones Técnicas y Científicas, Madrid, 2000. P. 110.

En las figuras 2.5.30, 2.5.31 y 2.5.32, se representan una proyección estereográfica horizontal, una polar y una transversa respectivamente, donde se han incluido las elipses indicatrices de deformaciones. Puede observarse, que la proyección estereográfica permite representar un hemisferio completo de la superficie terrestre con un grado de deformación aceptable, conservando además la forma representativa de las masas de tierra.

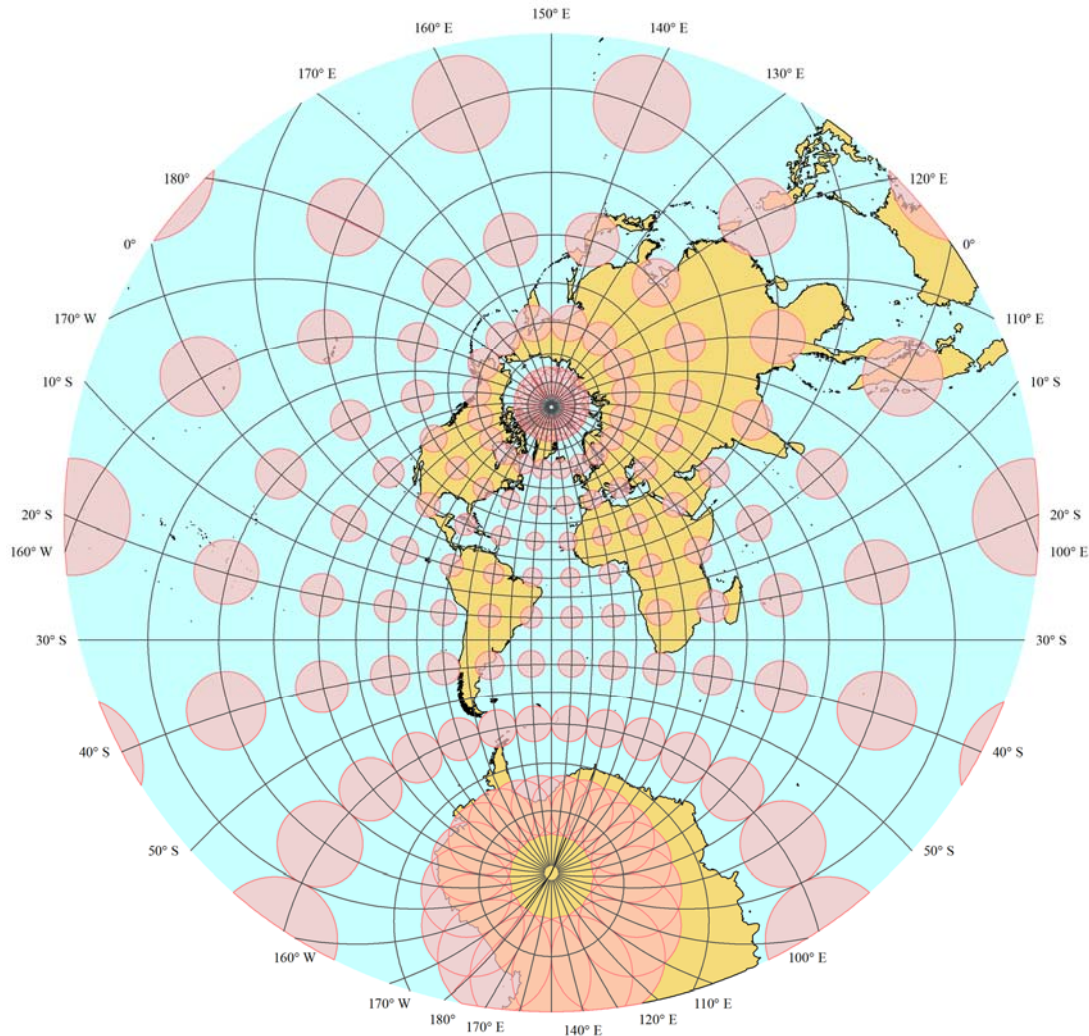


Figura 2.5.30. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección estereográfica horizontal con centro en: $\varphi_0 = 30^\circ N$, $\lambda_0 = 030^\circ W$.

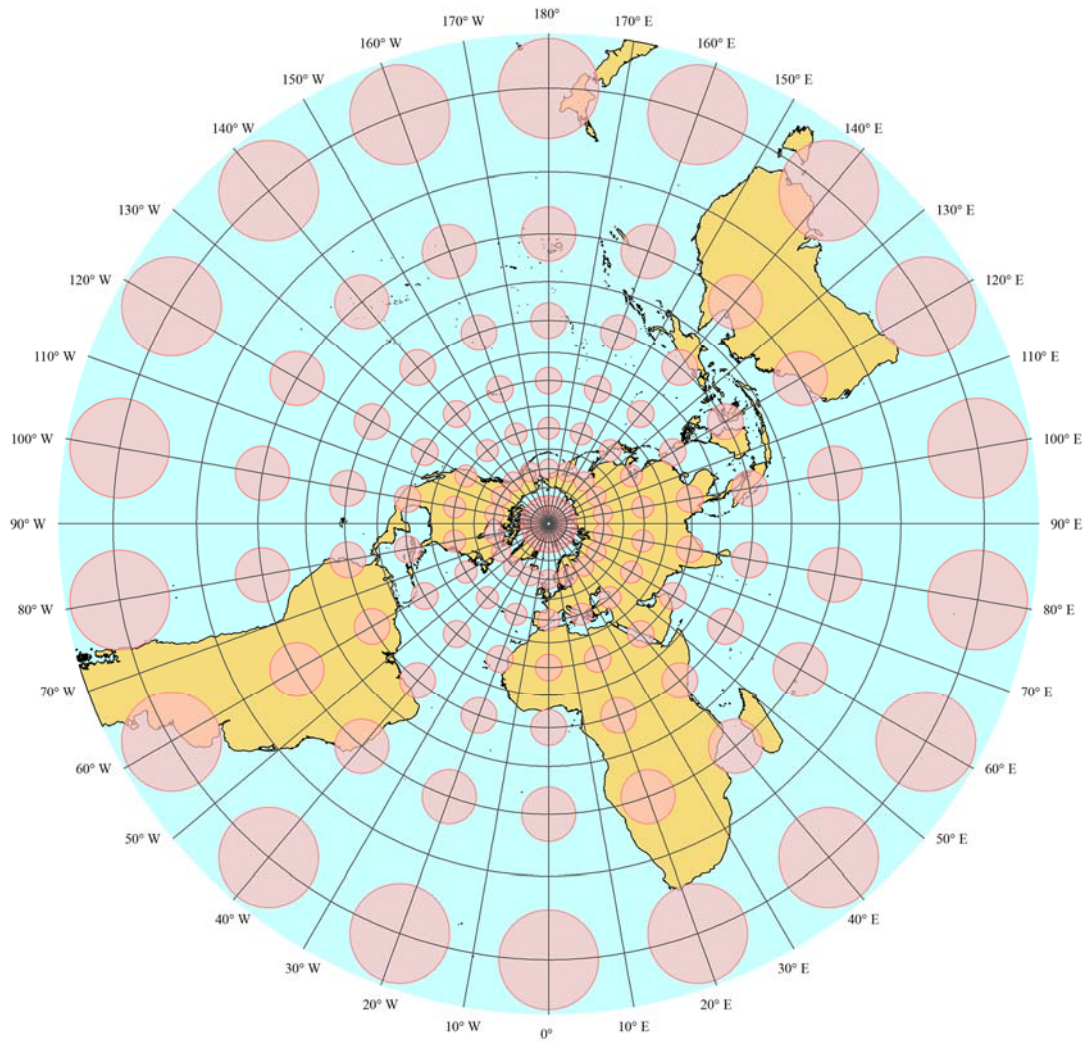


Figura 2.5.31. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección estereográfica polar con centro en: $\varphi_0 = 90^\circ N$.

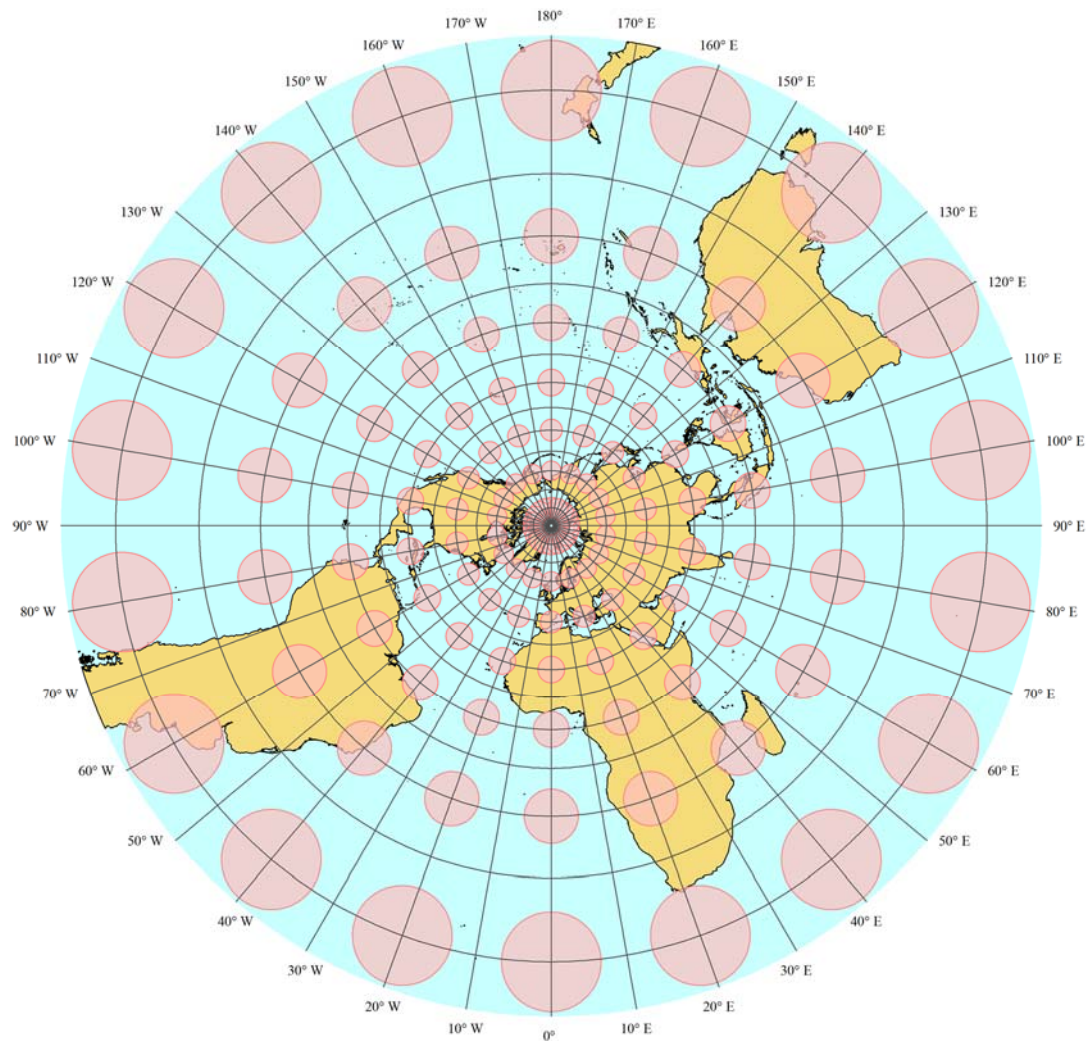


Figura 2.5.32. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección estereográfica transversa con centro en: $\varphi_0 = 00^\circ$, $\lambda_0 = 000^\circ$.

2.5.5.5. Usos de la proyección estereográfica

La proyección estereográfica, a pesar de tener unos orígenes tan tempranos, hasta el siglo XVI fue empleada únicamente para la elaboración de mapas de estrellas y construcción de astrolabios, de ahí que recibiese popularmente el nombre de proyección de astrolabio¹⁷⁵. En este momento, su uso se fue extendiendo a la elaboración de mapas geográficos, y durante los siglos XVI y XVII, el aspecto oblicuo de la proyección estereográfica fue la base de la gran mayoría de la producción cartográfica, especialmente en lo referente a la elaboración de atlas, uso que continuaría en auge a lo largo del siglo XVIII, debido al descubrimiento de su conformidad de la mano de Edmond Halley¹⁷⁶. A lo largo del siglo XIX la proyección estereográfica fue perdiendo vigencia a favor de la acimutal equidistante y la acimutal equivalente de Lambert.

¹⁷⁵ Rosenfeld, B. A.; Sergeeva, N. D.: *Lecciones populares de matemáticas: Proyección Estereográfica*, Editorial MIR, Moscú, 1977.

¹⁷⁶ Snyder, John P.: *Flattening the Earth, Two thousand years of map projections*, The University of Chicago Press, Chicago, 1993. P. 57.

En el siglo XX la proyección estereográfica se convierte en uno de los medios más comunes de representar las zonas polares en mapas de media y gran escala, y ya, a mediados de siglo, fue adoptada como oficial en la cartografía militar de muchos países bajo la forma de la denominada Universal Polar Estereográfica (UPS).

Como toda proyección conforme, la estereográfica presentará un interés especial para la elaboración de mapas para el análisis, guía o registro de movimientos y relaciones angulares, aunque en las últimas décadas haya sido desplazada en este campo por otras dos proyecciones conformes, cada vez más apreciadas, la cónica conforme de Lambert y la transversa de Mercator¹⁷⁷. Uno de los ejemplos más distintivos de este campo es su aplicación en la ingeniería geológica, donde se emplea para registrar en mapas de pequeña escala las direcciones, tanto absolutas como relativas, de cualquier tipo de estructura plana de origen sedimentario, ayudando en la resolución de problemas geométricos de geología estructural¹⁷⁸.

Por otra parte, la propiedad de la proyección estereográfica de representar los círculos de la esfera como circunferencias en el plano, la hacen especialmente útil para representaciones relacionadas con campos de alcance, como pueden ser la cobertura de emisoras de radio o de límites de autonomía de vehículos.

Además del uso astronómico mencionado, serán dos las aplicaciones fundamentales de la proyección estereográfica relacionadas con la navegación marítima. La primera de ellas es su uso en la elaboración de cartas en estereográfica polar para la navegación en zonas polares. Este tipo de cartas resulta útil por su condición de conformidad, y porque, a pequeñas escalas, las circunferencias representativas de las derrotas ortodrómicas, por pasar próximas al centro de la proyección, se separan muy poco de líneas rectas. Sin embargo, a pesar de que todos los tratados de navegación actuales encuentran de gran interés este uso, los servicios hidrográficos de los países con producción cartográfica, han retirado desde hace décadas las cartas estereográficas de sus catálogos. Es posible, que este hecho sea debido al elevado coste de producción de las cartas en papel, frente a su escasa demanda para zonas polares. Con los actuales sistemas de cartografía electrónica esta situación podría variar, y retomarse este uso de la proyección estereográfica¹⁷⁹.

Como segundo uso náutico de la proyección estereográfica se encuentra su aplicación al estudio y resolución gráfica de las variables, que intervienen en el triángulo de posición astronómico, y en la derrota ortodrómica; aunque este uso se limita la práctica, casi de forma exclusiva, a labores docentes.

En la actualidad, como ya se ha mencionado en los usos de la cónica conforme de Lambert, el Convenio sobre Aviación Civil Internacional define en el Anexo nº4¹⁸⁰ una extensa serie de especificaciones sobre las cartas aeronáuticas¹⁸¹; pudiéndose ver que para cartas de escala 1:1 000 000 y 1: 500 000, la proyección cónica conforme de Lambert es la proyección a usar entre el Ecuador y los 80° de latitud y la proyección estereográfica entre los 80° y 90° de latitud.

¹⁷⁷ Robinson, Arthur H.; Sale, Randall D.; Morrison, Joel L.; Muehrcke, Phillip C.: *Elementos de cartografía*, Ediciones Omega S.A., Barcelona, 1987. Pp. 91 y 92.

¹⁷⁸ Leyshon, Peter R.; Lisle, Richard J.: *Stereographic projection techniques in structural geology*, Butterworth-Heinemann Ltd., Oxford, 1996. P. 10.

¹⁷⁹ López Varela, Pablo: Análisis de Idoneidad de las Derrotas empleadas en Navegación Marítima sobre las Proyecciones de Mercator, Gnomónica y Estereográfica. Tesis Doctoral, Departamento de Energía y Propulsión Marina, Universidad de A Coruña, 2005. P.198.

¹⁸⁰

¹⁸¹ Moya Honduvilla, Javier; Bernabé Poveda, Miguel Ángel: *Descubrir la cartografía aeronáutica*, Centro de Documentación y Publicaciones de Aena, Madrid, 2011. P. 66.

2.5.6. Proyección gnomónica

Las proyecciones gnomónicas son proyecciones perspectivas verticales, en las cuales el vértice de proyección se encuentra en el centro de la esfera terrestre de referencia, siendo por tanto $D = 0$. El plano del cuadro puede ser tangente o secante a la esfera, aunque para el desarrollo de este epígrafe, al igual que en el resto de perspectivas, se considerarán siempre planos tangentes en sus tres aspectos: horizontal, polar y transversal.

2.5.6.1. Orígenes de la proyección gnomónica

El primer uso conocido de esta proyección se debe a Tales de Mileto¹⁸², aunque es probable que su origen sea anterior. En principio se empleaba para indicar sobre la superficie terrestre la marcha de los astros y de otros fenómenos celestes, así como en la construcción de relojes de sol¹⁸³.

La primera aplicación a la cartografía terrestre conocida data de 1610 (proyección oblicua centrada en Nuremberg con meridianos y paralelos separados 5°), sin embargo, su uso no se extiende hasta el siglo XVIII, aunque no pasa de un empleo anecdótico, debido a la dificultad de su trazado y a las grandes deformaciones, que presenta en zonas extensas. Tan sólo a finales del siglo XIX esta proyección cobra un cierto interés en la elaboración de cartas de navegación, debido al hecho de que las derrota ortodrómicas se representan como líneas rectas¹⁸⁴.

Respecto a las representaciones de la esfera celeste, la proyección gnomónica tuvo durante los siglos XVII y XVIII cierta repercusión (en todo caso más que en su aspecto geográfico). Esta repercusión estuvo ligada a la publicación en 1606 de un mapa celeste realizado por Johannes Kepler¹⁸⁵. También merece la pena destacar un atlas estelar aparecido en 1672, realizado por el matemático jesuita francés Ignace Gaston Pardies, en el cual la esfera celeste se proyectaba sobre las seis caras de un cubo, de modo que dos de ellas resultaran tangentes a los polos y las otras cuatro tangentes al Ecuador (dos de ellas en los puntos equinocciales). Con este sistema se lograba representar toda la esfera celeste sin alcanzar deformaciones excesivas. Ésta parece ser la primera aplicación de una proyección poliédrica¹⁸⁶, que posteriormente también se aplicaría a la elaboración de atlas terrestres, especialmente en la forma de un icosaedro regular¹⁸⁷.

¹⁸² (624-546 a.C.), filósofo, matemático y astrónomo griego. Conocido por predecir con exactitud un eclipse de Sol en el año 585 a.C. Sus ideas científicas y filosóficas fueron revolucionarias en su época al tratar de encontrar una explicación de la realidad atendiendo únicamente a datos reales, prescindiendo de la mitología (*Enciclopedia Multimedia Planeta DeAgostini*, Editorial Planeta DeAgostini S.A., 2000: "Tales de Mileto"), (Noble Wilford, John: *The Mapmakers*, Alfred A. Knopf, New York, revised edition 2000. P. 27).

¹⁸³ VV.AA.: *Apuntes de cartografía. Fascículo primero, Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales*, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970. P.109 y 110.

¹⁸⁴ Snyder, John P.: *Flattening the Earth, Two thousand years of map projections*, The University of Chicago Press, Chicago, 1993. P.169.

¹⁸⁵ (1571-1630), astrónomo y matemático alemán. Su labor más conocida fue la formulación de las tres leyes del movimiento planetario que llevan su nombre, y que permiten la explicación matemática de las órbitas de los planetas (*Enciclopedia Multimedia Planeta DeAgostini*, Editorial Planeta DeAgostini S.A., 2000.: "Kepler, Johannes").

¹⁸⁶ Snyder, John P.: *Flattening the Earth, Two thousand years of map projections*, The University of Chicago Press, Chicago, 1993. P.169.

¹⁸⁷ Fisher, Dennis: *Latitude Hooks and Azimuth Rings. How to Build and Use 18 Traditional Navigational Tools*, International Marine-McGraw-Hill, Camden, Maine 1995. P.607 a 609.

2.5.6.2. Características principales de la proyección gnomónica.

La característica más importante de la proyección gnomónica es que todos los círculos máximos de la esfera de referencia se proyectarán en el plano como una línea recta, y viceversa, es decir, todas las líneas rectas del plano serán círculos máximos en la esfera. La demostración de esta propiedad es inmediata, si se tiene en cuenta que el plano de todo círculo máximo de la esfera contendrá al vértice de la proyección, por lo que todas las visuales del mismo estarán sobre él. De ello se deriva, que en cualquier aspecto de una proyección gnomónica, tanto los meridianos como el Ecuador, estarán representados en la carta por líneas rectas¹⁸⁸.

Otra característica particular de esta proyección es que no es posible representar un hemisferio completo de la esfera, ya que el plano de desvanecimiento coincide con el del círculo máximo paralelo al plano de proyección. Por ello, los puntos de la esfera a una distancia angular de 90° del punto de tangencia tendrán su representación en el infinito, esto hace que esta proyección presente grandes deformaciones, dado que las distancias entre almicerats (o paralelos en el caso polar) aumentarán rápidamente a medida que aumenta la distancia al punto de tangencia¹⁸⁹.

2.5.6.3. Transformación de coordenadas

2.5.6.3.1. Transformación de coordenadas polares en la esfera a polares en el plano

Particularizando las funciones de paso (2.5.45) y (2.5.46) de coordenadas esféricas polares (ϕ , Z) en la esfera de referencia, a planas polares (ρ , Z') en el plano del cuadro, obtenidas para la proyección escenográfica horizontal, se tiene que para la proyección gnomónica ($D = 0$) dichas expresiones serán:

$$\rho = \frac{\sin \phi (D + 1)}{D + \cos \phi} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \tan \phi$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \tan \phi \\ Z = Z' \end{array} \right\} \quad (2.5.103)$$

Expresiones que pueden obtenerse directamente del planteamiento gráfico de la proyección gnomónica descrito en la siguiente figura.

¹⁸⁸ Bradley, A.D.: "The gnomonic projection of the sphere", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 47, N° 10, pp. 694 a 699, diciembre 1940. P. 694 y 695.

¹⁸⁹ Snyder, John P.; Bugayevskiy, Lev M.: *Map Projections: A Reference Manual*, Taylor and Francis Inc., Bristol, London, 1995. P. 112.

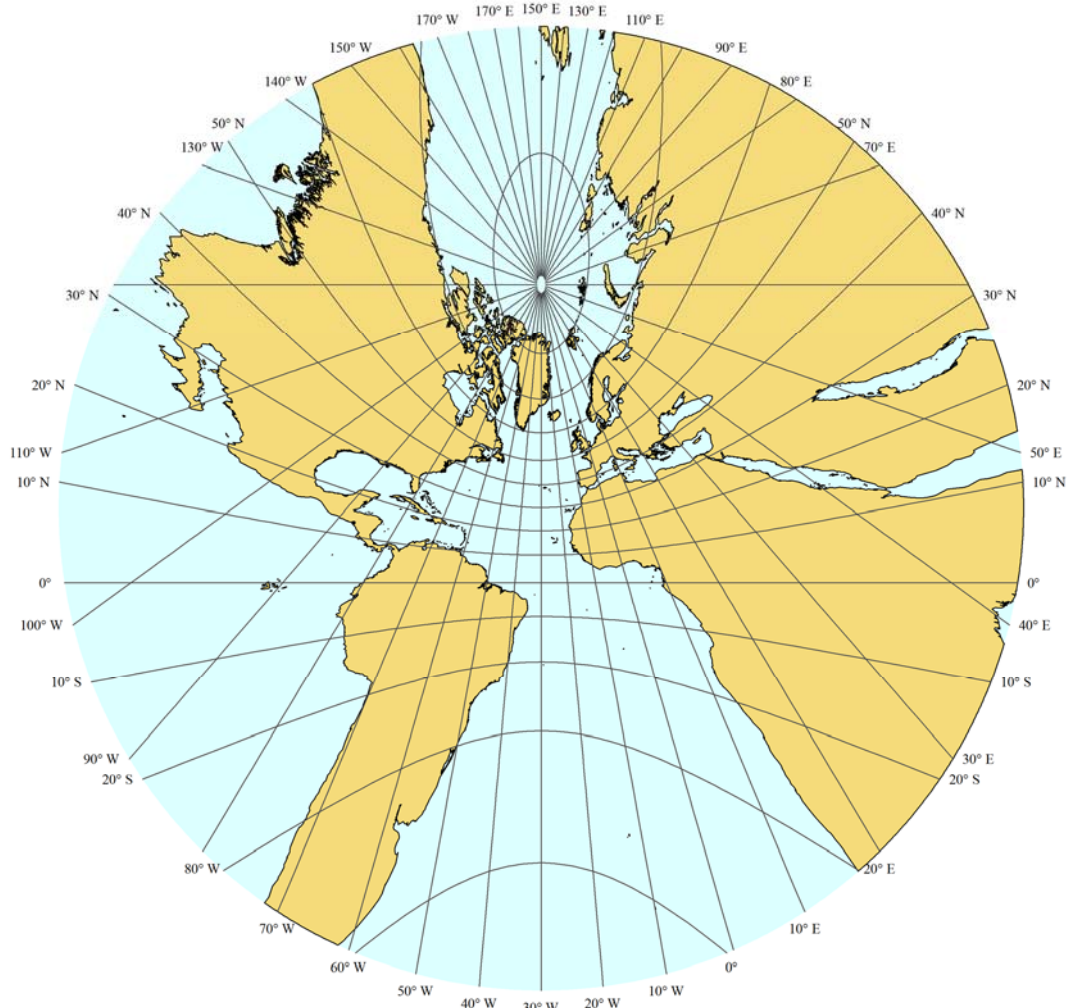


Figura 2.5.34. Proyección gnomónica horizontal con centro en: $\varphi_o = 30^\circ N$, $\lambda_o = 030^\circ W$.

- Para la proyección gnomónica polar, particularizando la expresión anterior para $\varphi_o = +90^\circ$, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda}{\operatorname{sen} \varphi} = \cotg \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda \\ y &= -\frac{\cos \varphi \cos \Delta \lambda}{\operatorname{sen} \varphi} = -\cotg \varphi \cos \Delta \lambda \end{aligned} \right\} \quad (2.5.105)$$

- Y para $\varphi_o = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{\cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda}{\operatorname{sen} \varphi} = -\cotg \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda \\ y &= -\frac{\cos \varphi \cos \Delta \lambda}{\operatorname{sen} \varphi} = -\cotg \varphi \cos \Delta \lambda \end{aligned} \right\} \quad (2.5.106)$$

Un ejemplo de proyección gnomónica polar puede verse en la siguiente figura:

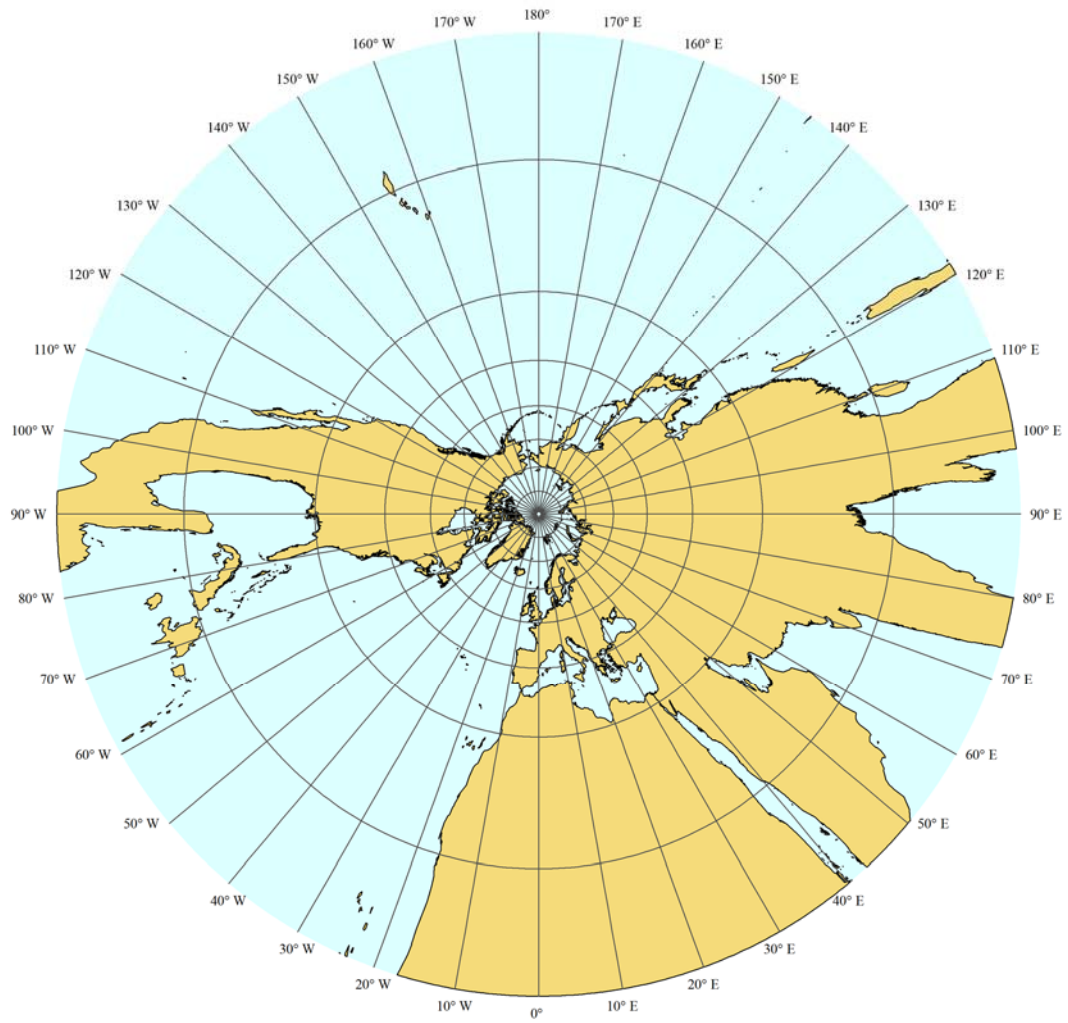


Figura 2.5.35. Proyección gnómica polar con centro en: $\varphi_0 = 90^\circ N$.

- Para la proyección gnómica transversa, se particulariza la expresión (2.5.104) tomando $\varphi_0 = 0^\circ$, teniendo:

$$\left. \begin{aligned} x &= \operatorname{tg} \Delta\lambda \\ y &= \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi \cos \Delta\lambda} = \operatorname{tg} \varphi \sec \Delta\lambda \end{aligned} \right\} \quad (2.5.107)$$

Un ejemplo de proyección gnómica transversa puede verse en la siguiente figura:

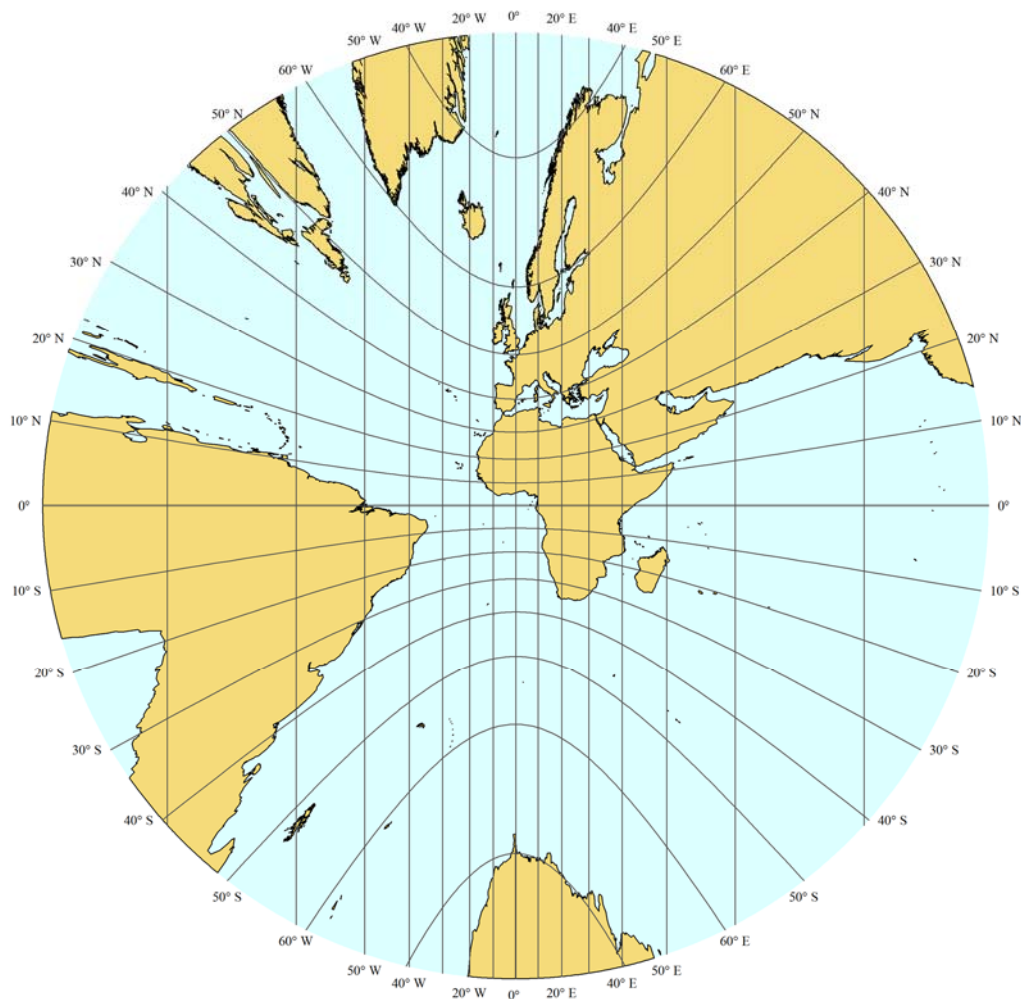


Figura 2.5.36. Proyección gnómica transversa con centro en: $\phi_o = 00^\circ$, $\lambda_o = 000^\circ$.

2.5.6.3.3. Transformación de coordenadas cartesianas en el plano a geográficas en la esfera

Al igual que para el supuesto estereográfico, particularizando las expresiones (2.5.52) y (2.5.56) de la proyección escenográfica horizontal para $D = 0$, se obtienen las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a geográficas en la esfera terrestre de referencia.

Para desarrollar las expresiones (2.5.52) y (2.5.56) deberán obtenerse los valores del seno y el coseno de ϕ para $D = 0$. De este modo, considerando (2.5.54) y (2.5.55) se tiene:

$$\text{sen } \phi = \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} \quad (2.5.108)$$

$$\text{cos } \phi = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} \quad (2.5.109)$$

Así, tomando las ecuaciones de paso de coordenadas cartesianas a geográficas (2.5.52) y (2.5.56), y sustituyendo en ellas los valores de (2.5.108) y (2.5.109), se obtiene:

- Para la proyección gnomónica horizontal:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen \left[\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} (\sen \varphi_o + y \cos \varphi_o) \right] \\ \lambda &= \lambda_o + \arctg \left(\frac{x}{\cos \varphi_o - y \sen \varphi_o} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.110)$$

- Para la gnomónica polar, se particulariza la expresión anterior para $\varphi_o = +90^\circ$ (Polo Norte), teniendo:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen \left(\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} \right); \quad \varphi = 90^\circ - \arctg \rho \\ \lambda &= \lambda_o + \arctg \left(-\frac{x}{y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.111)$$

- Y para $\varphi_o = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen \left(-\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} \right); \quad \varphi = -90^\circ + \arctg \rho \\ \lambda &= \lambda_o + \arctg \left(\frac{x}{y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.112)$$

- Para la gnomónica transversa, se particulariza la expresión (2.5.110) para $\varphi_o = 0^\circ$, teniendo:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen \left(\frac{y}{\sqrt{1+\rho^2}} \right) \\ \lambda &= \lambda_o + \arctg x \end{aligned} \right\} \quad (2.5.113)$$

Donde ρ vendrá dada por (2.5.53):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2.5.6.4. Deformaciones de la proyección gnomónica.

A continuación se particularizarán, para un valor de $D = 0$, las expresiones genéricas para el cálculo de las deformaciones angular, lineal y superficial, deducidas para la proyección escenográfica.

2.5.6.4.1. Deformación angular

Partiendo de la expresión (2.5.61) se obtiene:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{D + \cos \phi}{D \cos \phi + 1} = \cos \phi$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha \cos \phi \quad (2.5.114)$$

Se observa que la proyección gnomónica es no conforme y que, al igual que todas las acimutales, los ángulos se conservan en el punto de tangencia ($\phi = 0$).

Para expresar la deformación angular en función de las coordenadas geográficas, se sustituye (2.5.47) en (2.5.114):

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha (\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda) \quad (2.5.115)$$

Para la proyección gnomónica polar, se particulariza la expresión anterior para $\varphi_0 = +90^\circ$ (Polo Norte), teniendo:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi \quad (2.5.116)$$

Siendo para $\varphi_0 = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\operatorname{tg} \alpha' = -\operatorname{tg} \alpha \sin \varphi \quad (2.5.117)$$

Para la proyección gnomónica transversa, se particulariza la expresión (2.5.115) para $\varphi_0 = 0^\circ$, teniendo:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi \cos \Delta \lambda \quad (2.5.118)$$

2.5.6.4.2. Deformación superficial

Partiendo de la expresión (2.5.65) se obtiene:

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = \frac{(D+1)^2 (1 + D \cos \phi)}{(D + \cos \phi)^3} = \sec^3 \phi \neq 1 \quad (2.5.119)$$

$$dS' = dS \sec^3 \phi \quad (2.5.120)$$

Quedando demostrado que la proyección gnomónica no es equivalente.

El módulo de deformación superficial, al igual que el módulo de deformación angular, también puede expresarse en función de las coordenadas geográficas; sustituyendo (2.5.47) en (2.5.119):

$$\sigma = \frac{1}{(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda)^3} \quad (2.5.121)$$

Para la proyección gnomónica polar, se particulariza la expresión anterior para $\varphi_0 = +90^\circ$ (Polo Norte), teniendo:

$$\sigma = \frac{1}{\sin^3 \varphi} \quad (2.5.122)$$

Siendo para $\varphi_0 = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\sigma = \frac{1}{-\sin^3 \varphi} \quad (2.5.123)$$

Para la proyección gnomónica transversa, se particulariza la expresión (2.5.121) para $\varphi_0 = 0^\circ$, teniendo:

$$\sigma = \frac{1}{(\cos \varphi \cos \Delta\lambda)^3} \quad (2.5.124)$$

2.5.6.4.3. Deformación lineal

Partiendo de la expresión (2.5.69), se obtiene:

$$K = \frac{ds'}{ds} = \frac{(D+1)(1+D \cos \phi)}{(D + \cos \phi)^2} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \frac{D + \cos \phi}{D \cos \phi + 1}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad (2.5.125)$$

$$= \sec^2 \phi \sqrt{\cos^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \phi)} = \sec^2 \phi \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \phi}$$

$$ds' = ds \sec^2 \phi \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \phi} \quad (2.5.126)$$

La expresión anterior se corresponde con la ecuación de una elipse en la forma establecida en (2.5.71), con la cual se demuestra: que toda circunferencia infinitesimal de radio ds sobre la esfera se transformara en una elipse sobre la carta. Para obtener el valor de los semiejes de dicha elipse deben calcularse los módulos de deformación lineal a lo largo de los almicantarats y de los verticales.

Considerando $ds = 1$, de la expresión anterior se deduce que:

- Cuando $\alpha = 90^\circ$:

$$b' = k_a = \sec \phi \quad (2.5.127)$$

- Cuando $\alpha = 0^\circ$:

$$a' = h_v = \sec^2 \phi \quad (2.5.128)$$

De las expresiones anteriores se observa que la deformación es máxima en la dirección del vertical, y mínima en la del almicantarats.

Como se ha visto, la deformación lineal, al igual que la angular, será función de la distancia angular al punto de tangencia y de la dirección que se considere. Así, en el punto de tangencia ($\phi = 0^\circ$) la deformación lineal será mínima, ya que $ds' = ds$ ($K = 1$), y será infinita en los puntos que disten 90° del de tangencia ($\phi = 90^\circ$), ya que estarán incluidos en el plano de desvanecimiento. Así, en la proyección gnomónica no será posible obtener una proyección de un hemisferio completo.

El módulo de deformación lineal también puede expresarse en función de las coordenadas geográficas; sustituyendo (2.5.47) en (2.5.125):

$$K = \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha [1 + \operatorname{tg}^2 \alpha (\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda)]}}{(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda)^2} \quad (2.5.129)$$

Las expresiones de los semiejes para la elipse indicatriz de Tissot sustituyendo (2.5.46) en (2.5.120) y (2.5.121) serán:

$$\left. \begin{aligned} a' = h_v &= \frac{1}{(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda)^2} \\ b' = k_a &= \frac{1}{\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.130)$$

Para la proyección gnomónica polar, se particularizan las expresiones (2.5.129) y (2.5.130) para $\varphi_0 = +90^\circ$ (Polo Norte), teniendo:

$$K = \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{sen} \varphi)}}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \quad (2.5.131)$$

$$\left. \begin{aligned} a' = h_v &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \\ b' = k_a &= \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.132)$$

Y para $\varphi_0 = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$K = \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha (-1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{sen} \varphi)}}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \quad (2.5.133)$$

$$\left. \begin{aligned} a' = h_v &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \\ b' = k_a &= -\frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.134)$$

Para la proyección gnomónica transversa, se particulariza la expresión (2.5.129) y (2.5.130) para $\varphi_0 = 0^\circ$, teniendo:

$$K = \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos \varphi \cos \Delta \lambda)}}{(\cos \varphi \cos \Delta \lambda)^2} \quad (2.5.135)$$

$$\left. \begin{aligned} a' = h_v &= \frac{1}{(\cos \varphi \cos \Delta \lambda)^2} \\ b' = k_a &= \frac{1}{\cos \varphi \cos \Delta \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.136)$$

Observando las expresiones para la deformación superficial, y lineal, se comprueba que dichas anamorfosis aumentarán rápidamente a medida que aumenta la distancia al punto de tangencia.

En las figuras 2.5.37, 2.5.38, y 2.5.39 se representan una proyección gnomónica horizontal, una polar y una transversa respectivamente, donde se han incluido los elipses indicatrices de deformaciones.

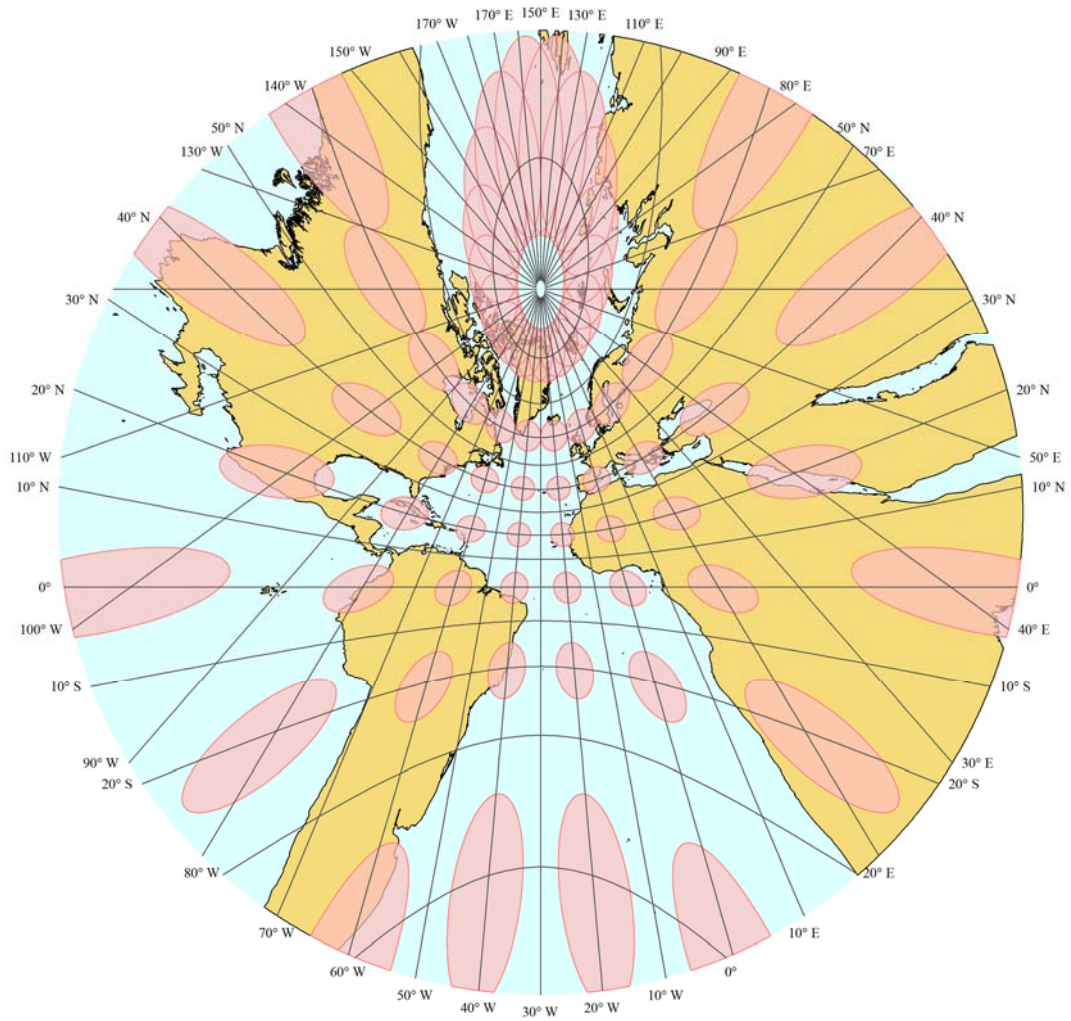


Figura 2.5.37. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección gnomónica horizontal con centro en: $\varphi_o = 30^\circ N$, $\lambda_o = 030^\circ W$

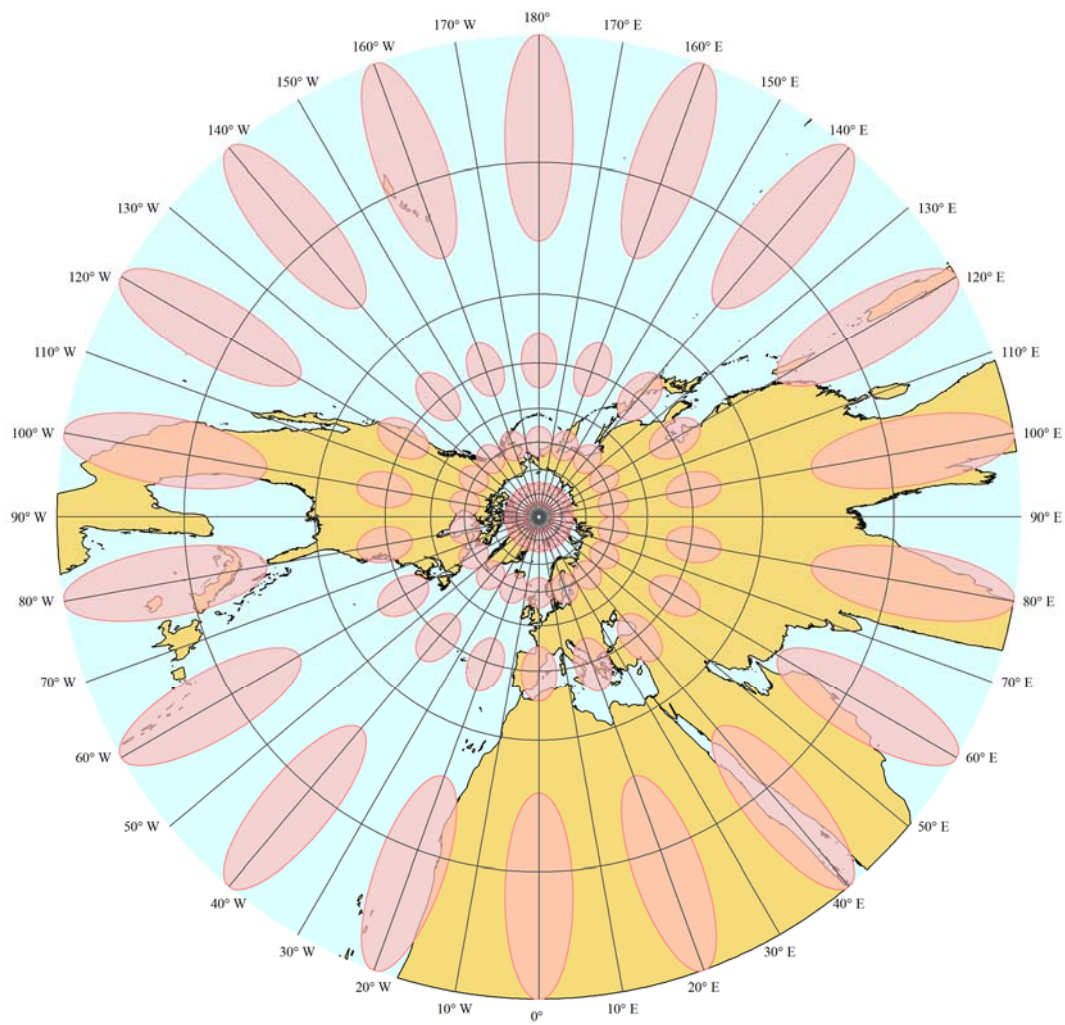


Figura 2.5.38. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección gnomónica polar con centro en: $\varphi_0 = 90^\circ N$.

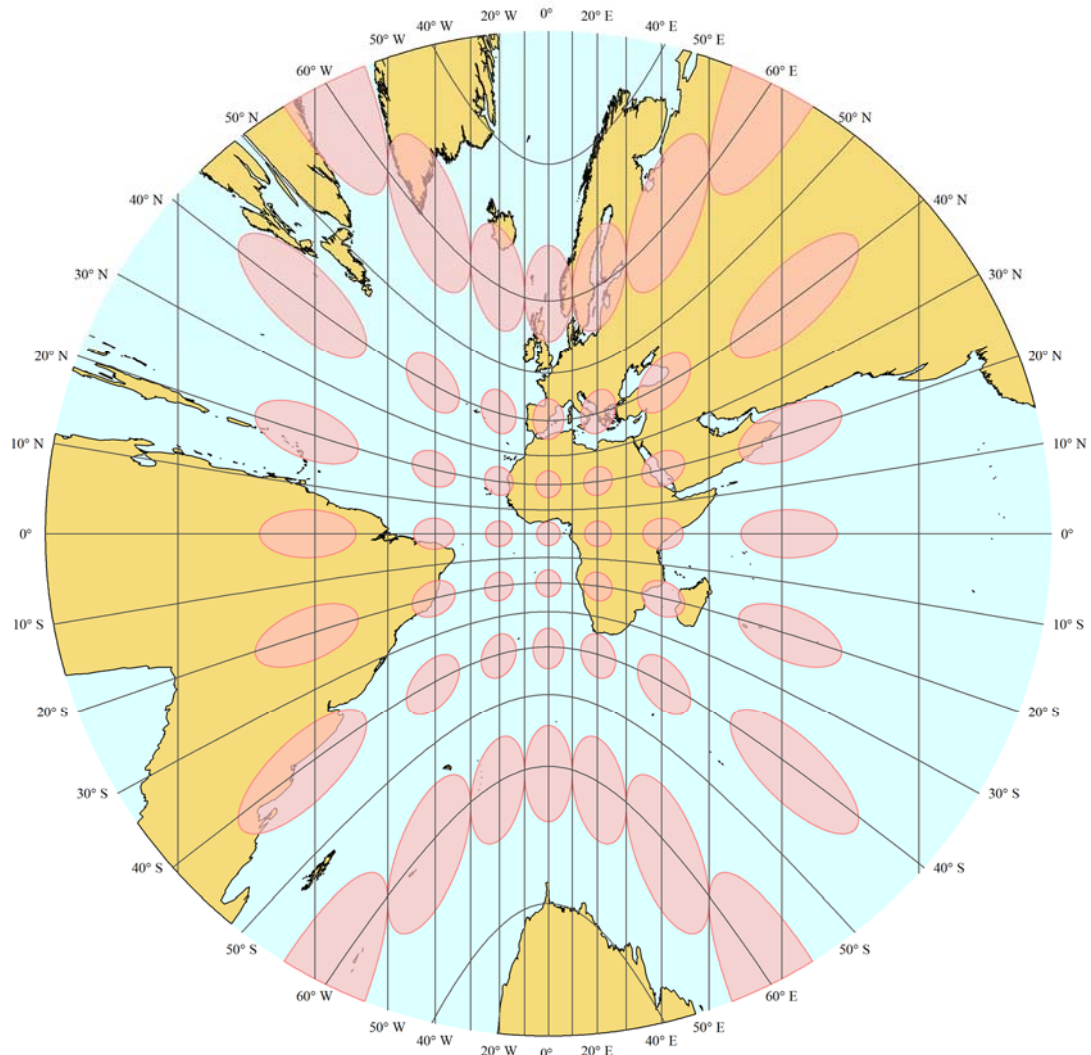


Figura 2.5.39. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección gnomónica transversa con centro en: $\varphi_0 = 00^\circ$, $\lambda_0 = 000^\circ$.

2.5.6.5. Usos de la proyección gnomónica

Ya en el siglo VI a.C. la proyección gnomónica era utilizada para indicar sobre la superficie terrestre la marcha de los astros y de otros fenómenos celestes, así como para la construcción de relojes de sol¹⁹⁰. Cuando se construye un reloj de sol, el elemento de sombra o gnomon se sitúa paralelo al eje de rotación de la Tierra, y el ángulo entre las líneas horarias se obtiene de los formados por los meridianos de diferencia de longitud de 15° en una proyección gnomónica centrada en la latitud para la cual se construye. Este uso hizo que la proyección se denominara horologium u horóscopo, no siendo hasta en el siglo XIX cuando recibió su nombre actual¹⁹¹.

¹⁹⁰ VV.AA.: *Apuntes de cartografía. Fascículo primero, Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales*, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970. Pp. 109 y 110.

¹⁹¹ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 164.

La proyección gnomónica fue empleada durante los siglos XVII y XVIII para realizar representaciones de la esfera celeste, sin embargo, la dificultad de su trazado y las grandes deformaciones que presenta hizo que su uso en cartografía terrestre no se extendiera hasta el siglo XVIII, aunque sin pasar de un empleo anecdótico. Tan solo a finales del siglo XIX la proyección gnomónica cobró cierta relevancia en la producción de cartas de navegación de punto menor (escala en torno a 1:10.000.000 o 1:5.000.000) para la navegación por ortodrómica, ya que en ellas los círculos máximos se representan como rectas¹⁹². La finalidad de este tipo de cartas no era de referenciar el movimiento del buque, sino únicamente la de obtener puntos intermedios de una derrota ortodrómica para trasladarla posteriormente a una carta de Mercator. Hoy en día con una calculadora científica, es posible calcular fácilmente las coordenadas geográficas de puntos intermedios de una derrota ortodrómica. Esto ha hecho que la demanda de este tipo de cartas haya disminuido paulatinamente.

Algunos institutos hidrográficos también emplearon la proyección gnomónica horizontal para la elaboración de cartas de punto mayor, portulanos y aproches, cubriendo normalmente zonas de entrada y salida de puertos siendo sustituidas actualmente por la proyección transversa de Mercator.

Otros campos en los que la proyección gnomónica tiene cierta repercusión (que no pasa de ser anecdótica) son aquellos en los que resulta útil la propiedad de representar como líneas rectas los círculos máximos de la esfera. Tal es el caso de la construcción de cartas celestes, las cuales presentan la ventaja de facilitar la identificación de estrellas, que se hallen en una misma alineación, o la elaboración de mapas geológicos destinados a la búsqueda de patrones de alineación de sistemas orográficos, focos sísmicos, filones de minerales, etc.¹⁹³

2.5.7. Proyección ortográfica

En la proyección ortográfica el punto de vista se encuentra en el infinito ($D = \infty$), con lo cual todas las visuales formarán un haz de líneas paralelas. El plano del cuadro se sitúa perpendicular a la dirección de las visuales, pudiendo emplearse indistintamente un plano tangente, secante, o exterior a la esfera de referencia, ya que el resultado será análogo.

2.5.7.1. Orígenes de la proyección ortográfica

Al parecer, fue desarrollada por los egipcios y los griegos en el siglo 2 a.C.¹⁹⁴, aunque el primer uso conocido se debe a Hiparco de Nicea, quién hacia el 130 a.C. trabajó con su aspecto ecuatorial para la realización de cálculos astronómicos¹⁹⁵.

Dentro del campo de la astronomía esta proyección fue empleada en la segunda mitad del siglo XVI por el español Juan de Rojas para la elaboración del astrolabio universal¹⁹⁶ que gozó de cierta popularidad en su época.

¹⁹² Snyder, John P.: *Flattening the Earth, Two thousand years of map projections*, The University of Chicago Press, Chicago, 1993. P. 169.

¹⁹³ VV.AA.: *Apuntes de cartografía. Fascículo primero, Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales*, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970. Pp. 105 y 106.

¹⁹⁴ Snyder, John P.; Voxland, Philip M.: *An Album of Map Projections*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, United States Government Printing Office, Washington, 1989. P. 124.

¹⁹⁵ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 145.

¹⁹⁶ García Franco, Salvador: *Instrumentos Náuticos en el Museo Naval*, Imprenta del Ministerio de Marina, Madrid 1959. P. 65.

Entre los muchos y fundamentales descubrimientos teóricos en el campo de la astronomía cabe destacar al prolífico Albattani, considerado el Ptolomeo del mundo árabe, quién halló soluciones muy hábiles para la resolución de los problemas de la trigonometría esférica recurriendo a la proyección ortográfica, las cuales posteriormente serían imitadas en parte por el famoso Regiomontanus (1436-1476)¹⁹⁷.

En el campo de la cartografía puede decirse que, aunque desde finales del siglo XVIII muchos geógrafos encomiaron sus ventajas, nunca llegó a establecerse una producción regular de mapas en ella¹⁹⁸.

2.5.7.2. Características principales de la proyección ortográfica

La ortográfica comparte propiedades con el resto de perspectivas, no siendo ésta una proyección conforme ni equiárea.

Las transformadas de los círculos máximos y círculos menores, incluyendo meridianos y paralelos, se muestran como arcos de elipse o líneas rectas. En el aspecto polar los meridianos se representarán como líneas rectas al igual que los paralelos en el aspecto transversal¹⁹⁹.

Esta proyección está limitada a una representación, que no exceda un ángulo de 90° desde el punto central, es decir, un hemisferio, decreciendo la escala radialmente en proporción a la distancia al centro, siendo cero en el borde. En cuanto a la deformación será mínima cerca del centro y máxima cerca del borde.

2.5.7.3. Transformación de coordenadas

2.5.7.3.1. Transformación de coordenadas polares en la esfera a polares en el plano

Particularizando las funciones de paso (2.5.45) y (2.5.46) de coordenadas esféricas polares (ϕ , Z) en la esfera de referencia, a planas polares (ρ , Z') en el plano del cuadro, obtenidas para la proyección escenográfica horizontal, se tiene que para la proyección ortográfica ($D = \infty$) dichas expresiones serán:

$$\rho = \frac{D \sin \phi + \sin \phi}{D + \cos \phi} = \frac{\sin \phi + \frac{\sin \phi}{D}}{1 + \frac{\cos \phi}{D}} = \sin \phi$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \sin \phi \\ Z = Z' \end{array} \right\} \quad (2.5.137)$$

Expresiones que podrían obtenerse de forma inmediata del planteamiento geométrico descrito en la siguiente figura:

¹⁹⁷ Gabers, Karl: *La matemática y la astronomía en la edad media islámica*, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Publicaciones del Instituto Jorge Juan de matemáticas, Madrid 1954. P. 25.

¹⁹⁸ VV.AA.: *Apuntes de cartografía. Fascículo primero, Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales*, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970. P.86.

¹⁹⁹ Snyder, John P.; Voxland, Philip M.: *An Album of Map Projections*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, United States Government Printing Office, Washington, 1989. P. 124.

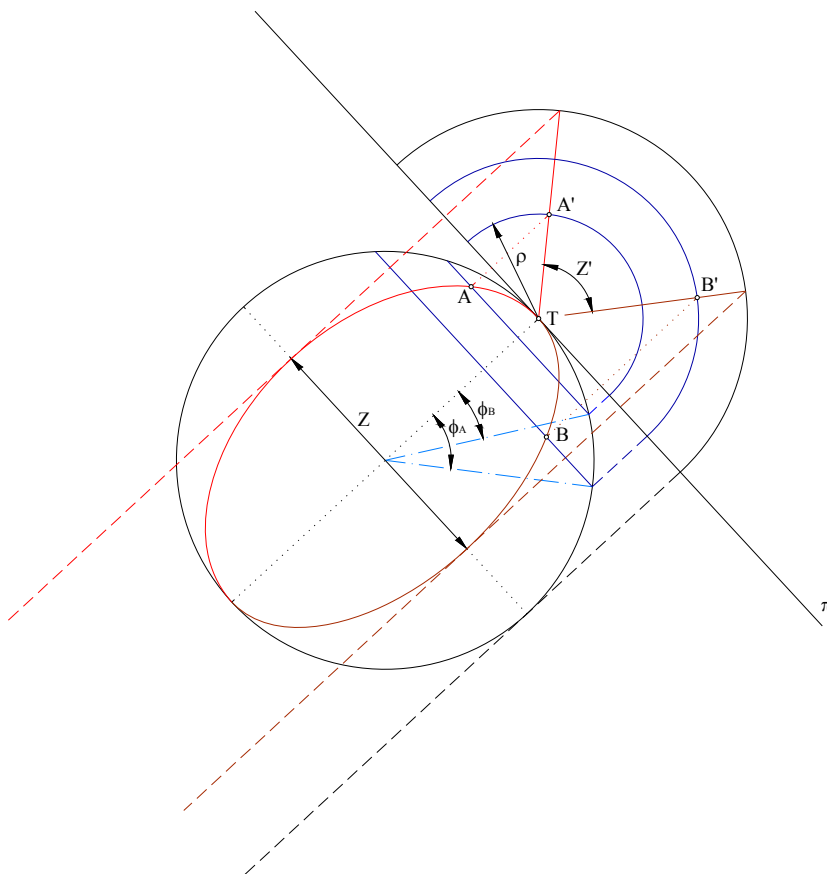


Figura 2.5.40. Planteamiento geométrico de la proyección ortográfica.

2.5.7.3.2. Transformación de coordenadas geográficas en la esfera a cartesianas en el plano

Sustituyendo el valor de ρ de (2.5.137) en (2.5.48), teniendo en cuenta las igualdades de (2.5.47), se obtienen las ecuaciones de transformación de coordenadas geográficas en la esfera terrestre de referencia a cartesianas en el plano del cuadro, para la proyección ortográfica.

- Para la proyección ortográfica horizontal:

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \varphi \sin \Delta \lambda \\ y &= \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta \lambda \end{aligned} \right\} \quad (2.5.138)$$

Un ejemplo de una proyección ortográfica horizontal puede verse en la siguiente figura:

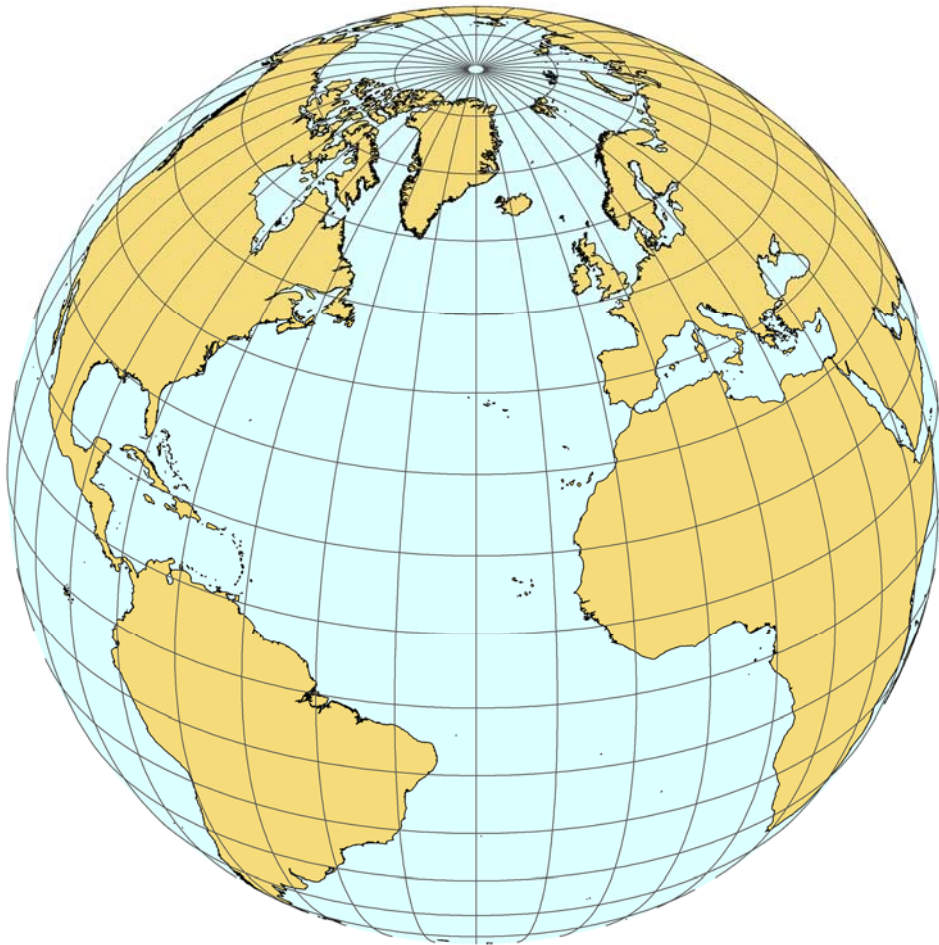


Figura 2.5.41. Proyección ortográfica horizontal con centro en: $\varphi_o = 30^\circ N$, $\lambda_o = 030^\circ W$.

- Para la proyección ortográfica polar, particularizando la expresión anterior para $\varphi_o = +90^\circ$ (Polo Norte), se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta\lambda \\ y &= -\cos \varphi \cos \Delta\lambda \end{aligned} \right\} \quad (2.5.139)$$

- Y para $\varphi_o = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta\lambda \\ y &= \cos \varphi \cos \Delta\lambda \end{aligned} \right\} \quad (2.5.140)$$

En la siguiente figura puede verse un ejemplo de una proyección ortográfica polar:

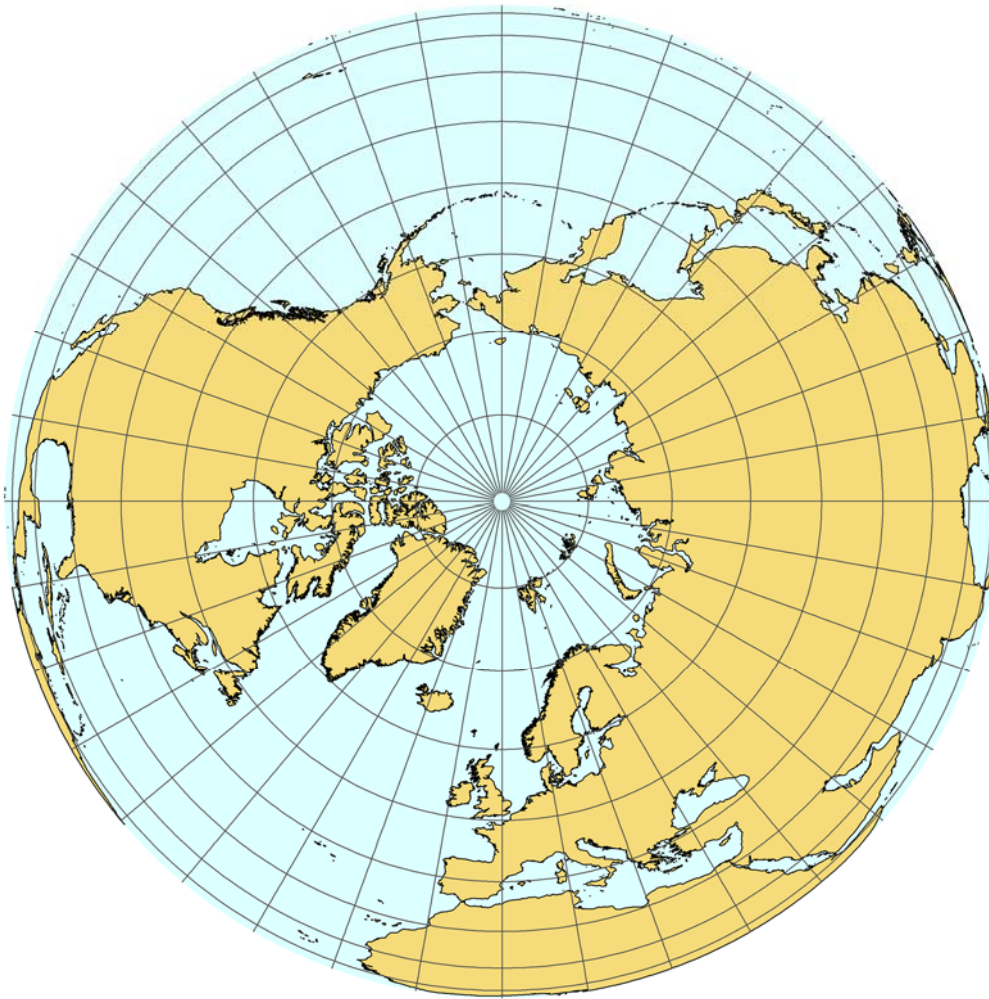


Figura 2.5.42. Proyección ortográfica polar con centro en: $\varphi_0 = 90^\circ N$.

- Para la proyección ortográfica transversa, de (2.5.138) se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} x = \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda \\ y = \operatorname{sen} \varphi \end{array} \right\} \quad (2.5.141)$$

Un ejemplo de una proyección ortográfica transversa puede verse en la siguiente figura:

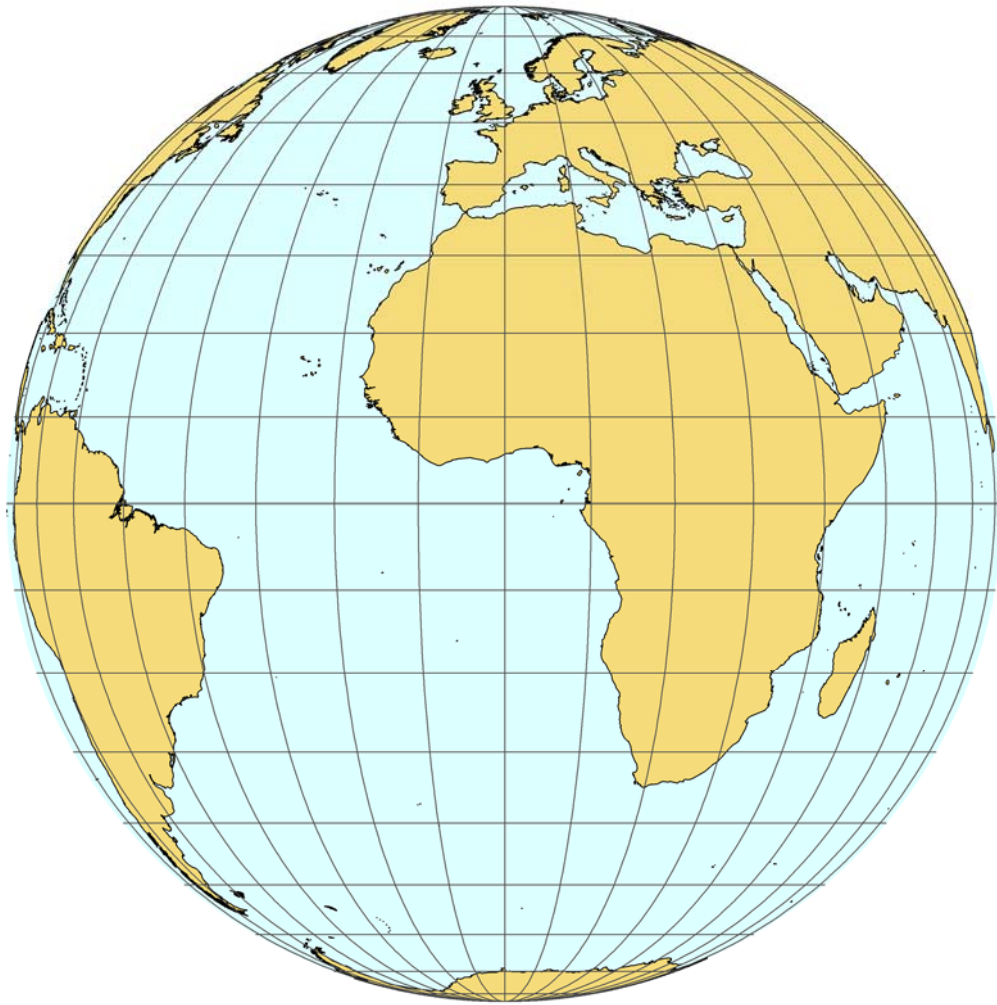


Figura 2.5.43. Proyección ortográfica transversa con centro en: $\varphi_o = 00^\circ$, $\lambda_o = 000^\circ$.

2.5.7.3.3. Transformación de coordenadas cartesianas en el plano a geográficas en la esfera

Las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a geográficas se obtendrán calculando previamente los valores del seno y el coseno de ϕ . De este modo, de (2.5.137):

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \phi &= \rho \\ \cos \phi &= \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \phi} \\ \cos \phi &= \sqrt{1 - \rho^2}\end{aligned}\tag{2.5.142}$$

Partiendo de las ecuaciones de paso de coordenadas cartesianas a geográficas (2.5.52) y (2.5.56), y sustituyendo en ellas los valores de (2.5.137) y (2.5.142), se obtiene:

- Para la proyección ortográfica horizontal:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen \left[\left(\sqrt{1-\rho^2} \right) \sen \varphi_o + y \cos \varphi_o \right] \\ \lambda &= \lambda_o + \arctg \left[\frac{x}{\left(\sqrt{1-\rho^2} \right) \cos \varphi_o - y \sen \varphi_o} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.5.143)$$

- Ortográfica polar, particularizando la expresión anterior para $\varphi_o = +90^\circ$ (Polo Norte):

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen \left(\sqrt{1-\rho^2} \right); \quad \varphi = 90^\circ - \arcsen \rho \\ \lambda &= \lambda_o + \arctg \left(-\frac{x}{y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.144)$$

- Y para $\varphi_o = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen \left(-\sqrt{1-\rho^2} \right); \quad \varphi = -90^\circ + \arcsen \rho \\ \lambda &= \lambda_o + \arctg \left(\frac{x}{y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.145)$$

- Para la ortográfica transversa, se particulariza la expresión (2.5.143) para $\varphi_o = 0^\circ$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen y \\ \lambda &= \lambda_o + \arctg \left(\frac{x}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.146)$$

Donde ρ (2.5.53):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2.5.7.4. Deformaciones en la proyección ortográfica

2.5.7.4.1. Deformación angular

Para la obtención del módulo de deformación angular, se partirá de la expresión (2.5.59):

$$A = \alpha' - \alpha = \arctg \frac{\rho dZ}{-d\rho} - \arctg \frac{dZ \sen \phi}{-d\phi}$$

Y en ella se sustituirá el valor de ρ por el proporcionado en (2.5.137), y el de $d\rho$ por el de su derivada:

$$d\rho = \cos \phi d\phi \quad (2.5.147)$$

$$A = \alpha' - \alpha = \arctg \left(-\tg \phi \frac{dZ}{d\phi} \right) - \arctg \left(-\sen \phi \frac{dZ}{d\phi} \right) \quad (2.5.148)$$

Tomando el cociente de las tangentes (2.5.57) y (2.5.58) y sustituyendo el valor de ρ (2.5.137) y $d\rho$ (2.5.147):

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{\rho dZ}{-d\rho}}{\frac{dZ \operatorname{sen} \phi}{-d\phi}} = \frac{\rho d\phi}{d\rho \operatorname{sen} \phi} = \frac{1}{\cos \phi} \quad (2.5.149)$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha \sec \phi \quad (2.5.150)$$

Se demuestra así que la proyección ortográfica no es conforme. Pero en el punto de tangencia $\phi = 0^\circ$ se observa que $\alpha = \alpha'$, esto es, en el punto de tangencia la proyección conserva los ángulos, lógico al tratarse de una proyección acimutal.

El módulo de deformación angular también puede expresarse en función de coordenadas geográficas, sustituyendo (2.5.47) en (2.5.150):

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \phi_0 + \cos \phi \cos \phi_0 \cos \Delta \lambda} \quad (2.5.151)$$

Para la ortográfica polar, se particulariza la expresión anterior para $\phi_0 = +90^\circ$ (Polo Norte):

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{sen} \phi} \quad (2.5.152)$$

Siendo para $\phi_0 = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\operatorname{tg} \alpha' = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{sen} \phi} \quad (2.5.153)$$

Y particularizando la expresión (2.5.151) para el supuesto transversal, $\phi_0 = 0^\circ$:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \phi \cos \Delta \lambda} \quad (2.5.154)$$

2.5.7.4.2. Deformación superficial

Tomando la expresión genérica del módulo de deformación superficial (2.5.65), y sustituyendo en ella el valor de ρ (2.5.137) y $d\rho$ (2.5.147):

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = \frac{\rho d\rho}{\operatorname{sen} \phi d\phi} = \frac{\operatorname{sen} \phi \cos \phi d\phi}{\operatorname{sen} \phi d\phi} = \cos \phi \quad (2.5.155)$$

$$dS' = dS \cos \phi \quad (2.5.156)$$

Queda demostrado por tanto que se trata de una proyección no equivalente, donde, si $\phi = 90^\circ$: $dS = dS'$, es decir, se mantienen las áreas en el centro de la proyección, produciéndose la máxima deformación en el círculo máximo de la esfera paralelo al plano del cuadro, $\phi = 90^\circ$, ya que $dS' = 0$ (como ya se ha visto, en ese caso la elipse indicatriz de Tissot degenera en un segmento, por lo que no tendrá superficie).

Para expresar el módulo de deformación superficial en función de las coordenadas geográficas, sustituyendo (2.5.47) en (2.5.148):

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \phi_0 + \cos \phi \cos \phi_0 \cos \Delta \lambda \quad (2.5.157)$$

Para el aspecto polar, se particulariza la expresión anterior para $\varphi_0 = +90^\circ$ (Polo Norte):

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = \sin \varphi \quad (2.5.158)$$

Y para $\varphi_0 = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = -\sin \varphi \quad (2.5.159)$$

Particularizando la expresión (2.5.57) para $\varphi_0 = 0^\circ$:

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = \cos \varphi \cos \Delta\lambda \quad (2.5.160)$$

2.5.7.4.3. Deformación lineal

Partiendo de la expresión (2.5.69), y sustituyendo en ella el valor de $d\rho$ (2.5.147):

$$K = \frac{ds'}{ds} = \frac{d\rho \sec \alpha'}{d\phi \sec \alpha} = \cos \phi \frac{\sec \alpha'}{\sec \alpha} \quad (2.5.161)$$

Y siendo:

$$\sec \alpha' = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha'}$$

La expresión (2.5.69) queda en la forma:

$$K = \frac{ds'}{ds} = \cos \phi \cos \alpha \sqrt{1 + \tan^2 \alpha'}$$

Y sustituyendo el valor de la tangente de α' de la deducida en (2.5.150):

$$K = \frac{ds'}{ds} = \cos \phi \sqrt{\cos^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha \sec^2 \phi)} = \cos \phi \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \sec^2 \phi} \quad (2.5.162)$$

$$ds' = ds \sqrt{\cos^2 \phi \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \quad (2.5.163)$$

La expresión anterior se corresponde con la ecuación de una elipse en coordenadas polares, en la forma establecida en (2.5.71), con lo cual se demuestra que toda circunferencia infinitesimal de radio ds sobre la esfera se transformara en una elipse sobre la carta. Para obtener el valor de los semiejes de dicha elipse deben calcularse los módulos de deformación lineal a lo largo de los almicantarats y de los verticales. Así, considerando $ds = 1$, de (2.5.156) se deduce que en el sentido del almicantarats, cuando $\alpha = 90^\circ$:

$$ds' = ds \Rightarrow k_a = 1 \quad (2.5.164)$$

Es decir, los almicantarats de la proyección (círculos de la esfera de plano paralelo al del cuadro) son líneas automecóicas.

Considerando ahora la dirección radial desde el centro de la proyección, es decir, la de los verticales, cuando $\alpha = 0^\circ$:

$$h_v = \cos \phi \quad (2.5.165)$$

Si además $\phi = 0^\circ$:

$$h_v = 1 \Rightarrow ds' = ds$$

Y si $\phi = 90^\circ$:

$$h_v = 0 \Rightarrow ds' = 0$$

Observando (2.5.164) y (2.5.165) se comprueba que la deformación lineal es máxima en la dirección del vertical (h_v) y mínima en la del almicantarat (k_a), con lo cual, los semiejes de la elipse indicatriz de Tissot serán:

$$\left. \begin{aligned} a' &= k_a = 1 \\ b' &= h_v = \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (2.5.166)$$

Además, la elipse se representará como una circunferencia para $\phi = 0^\circ$ ($a' = b'$) y degenerará en una recta para $\phi = 90^\circ$ ($a' = 1, b' = 0$).

El módulo de deformación lineal en función de las coordenadas geográficas, al igual que en la deformación angular y superficial, se obtiene sustituyendo (2.5.47) en (2.5.156):

$$K = \frac{ds'}{ds} = \sqrt{(\sin \phi \sin \phi_o + \cos \phi \cos \phi_o \cos \Delta\lambda)^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \quad (2.5.167)$$

Del mismo modo, las expresiones de los semiejes para la elipse indicatriz de Tissot (de (2.5.167)):

$$\left. \begin{aligned} a' &= k_a = 1 \\ b' &= h_v = \sin \phi \sin \phi_o + \cos \phi \cos \phi_o \cos \Delta\lambda \end{aligned} \right\} \quad (2.5.168)$$

Para la ortográfica polar, se particularizan las expresiones anteriores (2.5.167) y (2.5.168) para $\phi_o = +90^\circ$ (Polo Norte):

$$K = \frac{ds'}{ds} = \sqrt{\sin^2 \phi \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \quad (2.5.169)$$

$$\left. \begin{aligned} a' &= k_a = 1 \\ b' &= h_v = \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (2.5.170)$$

Y para la ortográfica polar, $\phi_o = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$K = \frac{ds'}{ds} = \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \phi \cos^2 \alpha} \quad (2.5.171)$$

$$\left. \begin{aligned} a' &= k_a = 1 \\ b' &= h_v = -\sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (2.5.172)$$

Particularizando (2.5.167) y (2.5.168) para el supuesto transversal, $\phi_o = 0^\circ$:

$$K = \frac{ds'}{ds} = \sqrt{\cos^2 \phi \cos^2 \Delta\lambda \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \quad (2.5.173)$$

$$\left. \begin{aligned} a' &= k_a = 1 \\ b' &= h_v = \cos \phi \cos \Delta\lambda \end{aligned} \right\} \quad (2.5.166)$$

En las figuras 2.5.44, 2.5.45, y 2.5.46 se representan una proyección ortográfica horizontal, una polar y una transversa respectivamente, donde se han incluido las elipses indicatrices de deformaciones.

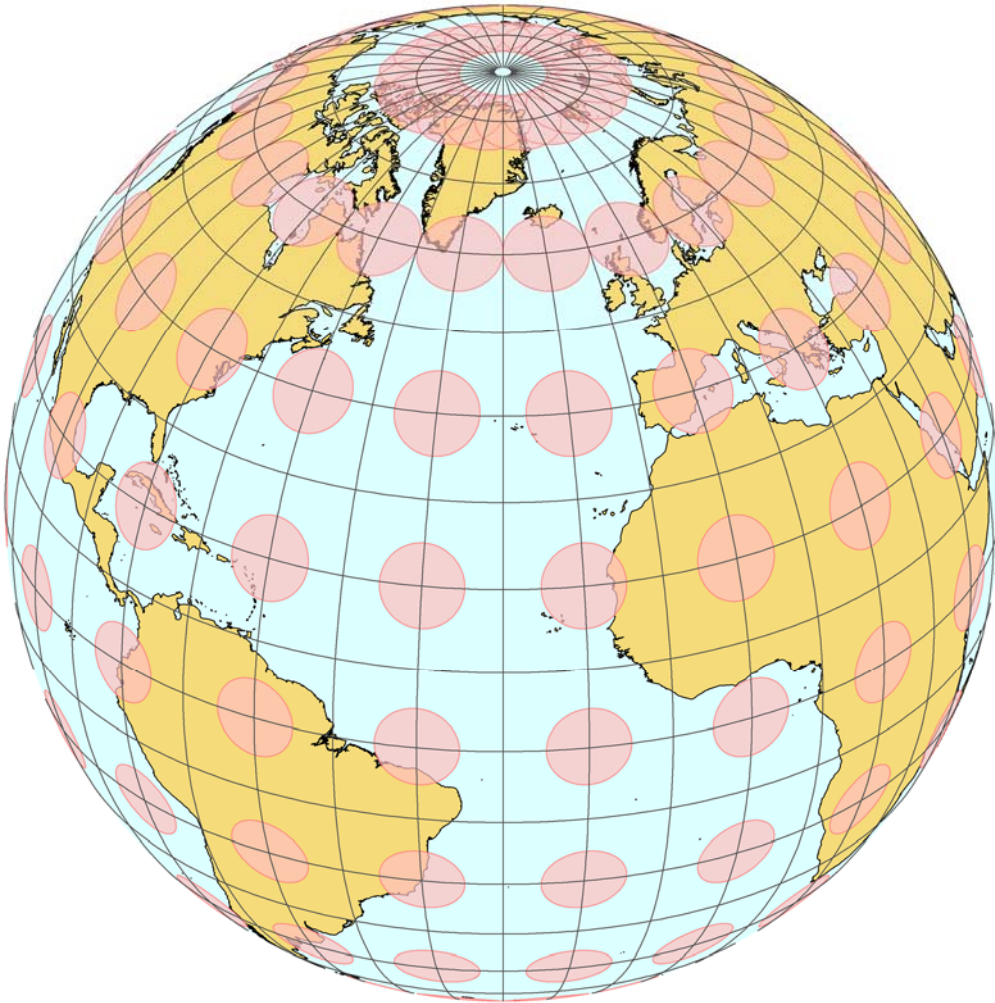


Figura 2.5.44. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección ortográfica horizontal con centro en: $\varphi_o = 30^\circ N$, $\lambda_o = 030^\circ W$

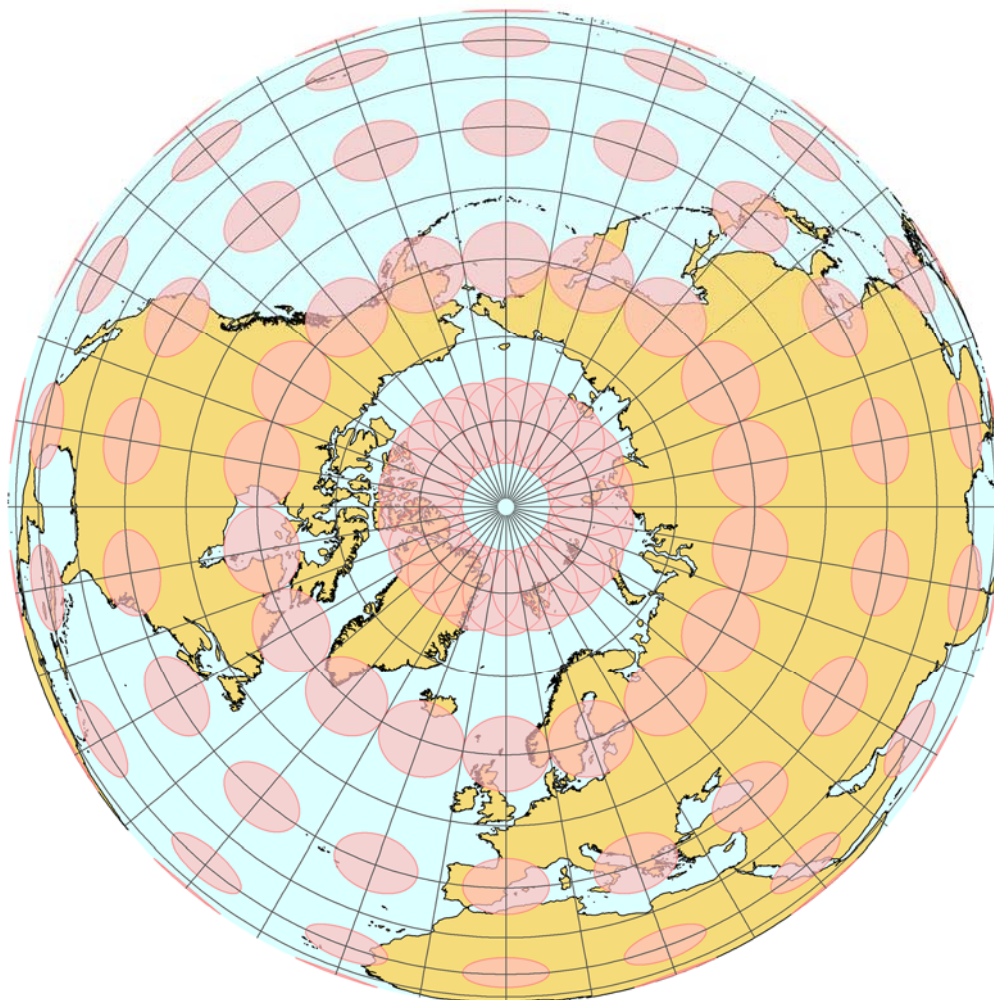


Figura 2.5.45. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección ortográfica polar con centro en: $\varphi_0 = 90^\circ \text{N}$.

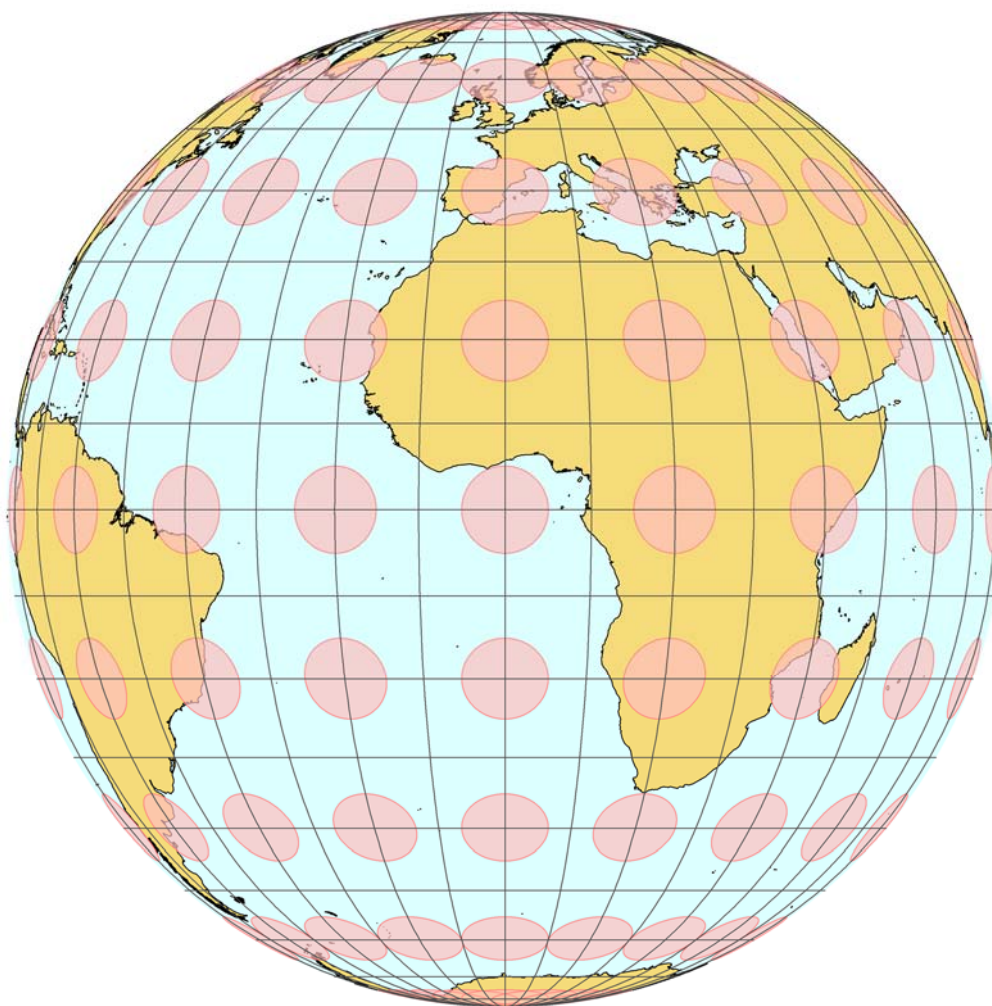


Figura 2.5.46. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección ortográfica transversa con centro en: $\varphi_0 = 00^\circ$, $\lambda_0 = 000^\circ$.

2.5.7.5. Usos de la proyección ortográfica

La proyección ortográfica aparece vinculada a la resolución de cálculos astronómicos. Es en este aspecto donde la proyección ortográfica logró un mayor uso, llegando a emplearse en la construcción de astrolabios universales en el siglo XVI²⁰⁰.

En cartografía, nunca llegó a establecerse una producción regular de mapas en ella²⁰¹. Tan solo a partir de la década de 1960 logró cierta importancia en las representaciones de cuerpos celestes, así como de la Tierra vista desde el espacio²⁰².

En la actualidad el uso de esta proyección para la confección de cartas de navegación es inexistente. Su empleo está restringido a representaciones astronómicas, mapas de estrellas y

²⁰⁰ García Franco, Salvador: *Instrumentos Náuticos en el Museo Naval*, Imprenta del Ministerio de Marina, Madrid, 1959. P. 65.

²⁰¹ Apuntes de cartografía. Fascículo primero, Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970. P. 86.

²⁰² Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 148.

demostraciones teóricas referentes al triángulo de posición, así como su resolución gráfica²⁰³. Sin embargo, ofrece la ventaja de resultar más intuitiva que el resto de proyecciones perspectivas, con lo cual puede llegar a ser muy útil en el campo de la docencia.

2.5.8. Proyección acimutal equidistante

Es una proyección en la cual la escala de distancias a lo largo de las transformadas de los círculos máximos, que pasan por el centro de proyección, es constante, siendo por tanto líneas rectas automecoicas.

Esta proyección puede admitir todas las orientaciones: horizontal, polar y transversal. Si el punto de tangencia estuviera situado en uno de los polos, los meridianos aparecerían como líneas radiales y los paralelos como círculos concéntricos igualmente espaciados. Si el plano fuera tangente en cualquier otro punto, tanto meridianos como paralelos vendrían representados por curvas, siendo los círculos concéntricos, que pudieran aparecer sobre la proyección, únicamente indicadores de distancias al punto de tangencia (almicantarats). Se podría emplear la proyección acimutal equidistante para representar toda la superficie de la esfera terrestre, de modo que el punto antípoda del de tangencia vendría representado por el mayor de los círculos concéntricos.

2.5.8.1. Orígenes de la proyección acimutal equidistante

Del mismo modo que las proyecciones ortográfica, estereográfica, gnomónica, se cree que fueron los egipcios los inventores de esta proyección, la cual emplearían para la elaboración de mapas estelares en su forma polar. La primera muestra conocida del empleo intencional de esta proyección es una carta celeste polar realizada en 1426 por Conrad de Dyffenbach²⁰⁴.

A lo largo del siglo XVI el aspecto polar de la proyección alcanzó cierta repercusión en la producción cartográfica, tanto de la superficie terrestre como de la esfera celeste. Como ejemplo, puede citarse, que el célebre Gerardus Mercator empleó la proyección acimutal equidistante polar, para representar las regiones polares dentro de su célebre mapa de 1569²⁰⁵. Durante los siglos XVII y XVIII la proyección polar continuó empleándose, sin embargo, sus aspectos transversal y oblicuo todavía se consideraban demasiado complicados de trazar, ya que las curvas representativas de meridianos y paralelos no siguen formas geométricas estándar.

2.5.8.2. Características principales de la proyección acimutal equidistante

La proyección acimutal equidistante combina tres características fundamentales de gran utilidad:

- Las distancias a partir del punto de tangencia se conservan.

²⁰³ Moreu Curbera; Martínez Jiménez: *Astronomía y Navegación. Tomo II*, Artes Gráficas Galicia – Librería San José, Vigo 1975. Pp. 261 y 262.

²⁰⁴ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 191.

²⁰⁵ Snyder, John P.: *Flattening the Earth, Two thousand years of map projections*, The University of Chicago Press, Chicago, 1993. P.29

- Las direcciones a partir del punto de tangencia (acimuts) son representadas en verdadera magnitud.
- Permite representar toda la superficie terrestre en una carta.

2.5.8.3. Transformación de coordenadas

Para la transformación de coordenadas geográficas en la esfera a cartesianas en el plano y viceversa, en una proyección azimutal equidistante, se seguirá el mismo planteamiento que para las proyecciones perspectivas.

2.5.8.3.1. Transformación de coordenadas polares en la esfera a polares en el plano

En la construcción de esta proyección no intervienen fundamentos geométricos directos, se trata por tanto de una proyección analítica, y estará condicionada al cumplimiento de dos leyes matemáticas contempladas en la figura 2.5.47:

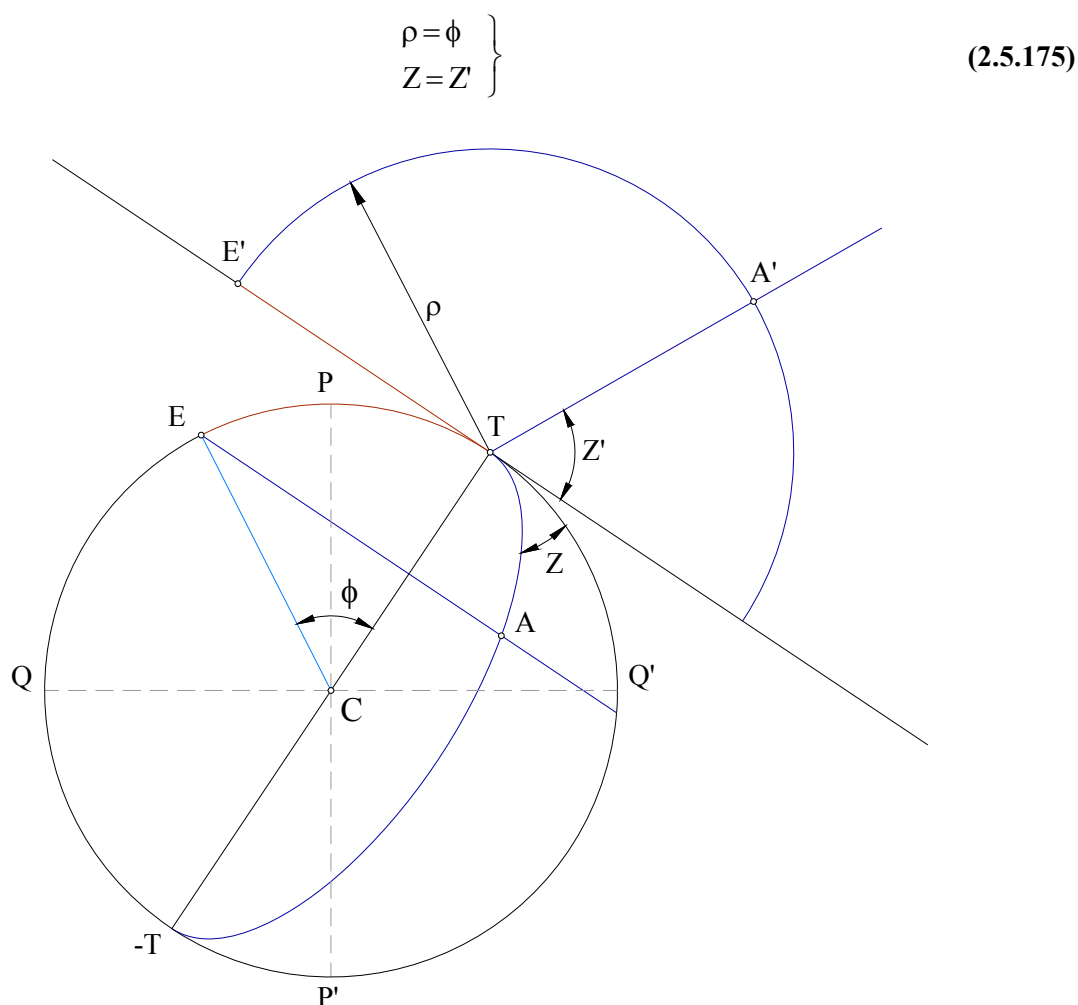


Figura 2.5.47. Proyección acimutal equidistante horizontal.

Pudiéndose ver que las coordenadas cartesianas en el plano de proyección del punto A' (x_A, y_A) se pueden expresar en función de sus correspondientes polares (ρ, Z), de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} x_A &= TA' \sin Z = \rho \sin Z \\ y_A &= TA' \cos Z = \rho \cos Z \end{aligned} \right\} \quad (2.5.177)$$

Donde sustituyendo el valor de ρ de (2.5.175) en las expresiones anteriores:

$$\left. \begin{aligned} x_A &= \phi \sin Z \\ y_A &= \phi \cos Z \end{aligned} \right\} \quad (2.5.178)$$

Sustituyendo las expresiones (2.5.176) en (2.5.178) generalizadas para cualquier punto, se tienen las fórmulas generales de transformación de las coordenadas geográficas en la esfera a cartesianas en el plano para una proyección acimutal equidistante horizontal:

$$\left. \begin{aligned} x &= \phi \frac{\cos \varphi \sin \Delta\lambda}{\sin \phi} \\ y &= \phi \frac{\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta\lambda}{\sin \phi} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.179)$$

Un ejemplo de una proyección acimutal equidistante horizontal puede verse en la siguiente figura:

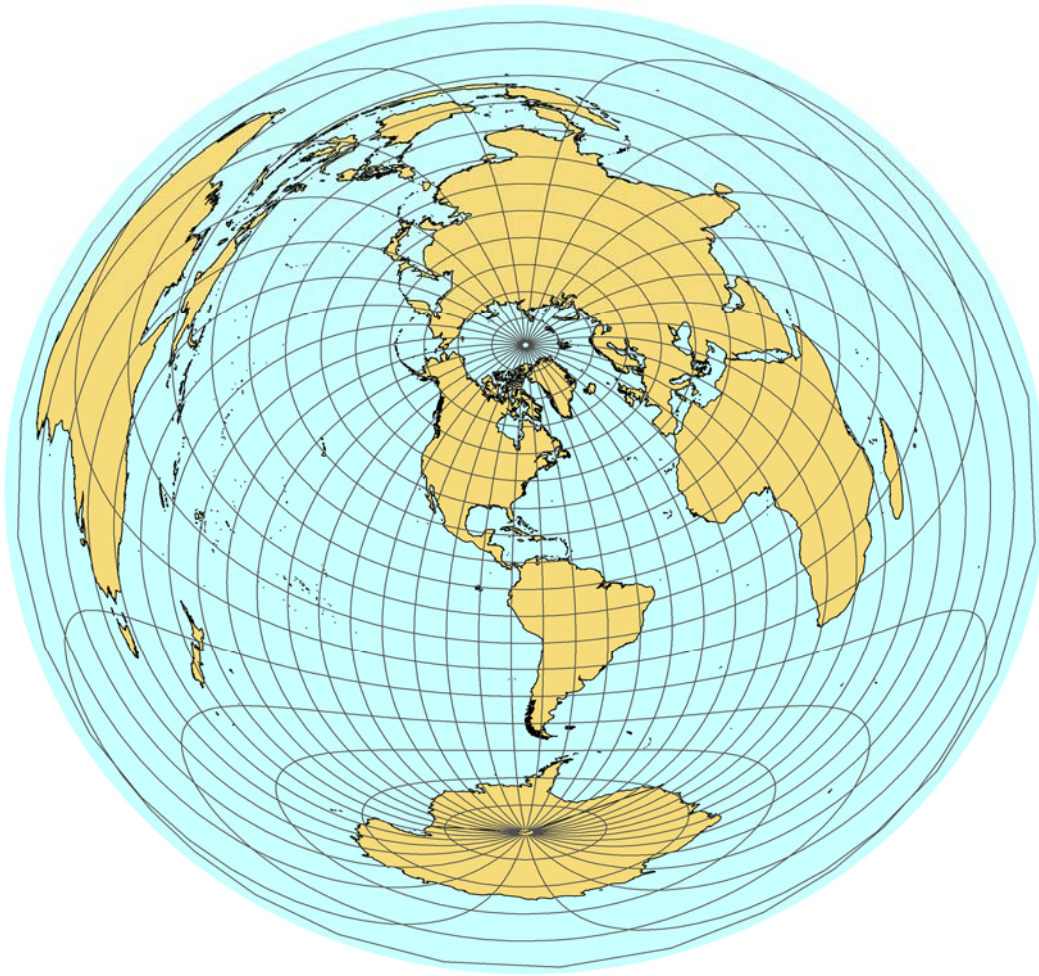


Figura 2.5.50. Proyección acimutal equidistante horizontal, centrada en Norfolk.

- Para la proyección acimutal equidistante polar, se particulariza la expresión (2.5.179) para $\phi_0 = +90^\circ$ (Polo Norte); se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} x &= \phi \frac{\cos \phi \sin \Delta\lambda}{\sin \phi} \\ y &= -\phi \frac{\cos \phi \cos \Delta\lambda}{\sin \phi} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.180)$$

- Y para $\phi_0 = -90^\circ$ (Polo Sur); se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} x &= \phi \frac{\cos \phi \sin \Delta\lambda}{\sin \phi} \\ y &= \phi \frac{\cos \phi \cos \Delta\lambda}{\sin \phi} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.181)$$

Un ejemplo de una proyección acimutal equidistante con centro en el Polo Norte puede verse en la siguiente figura:

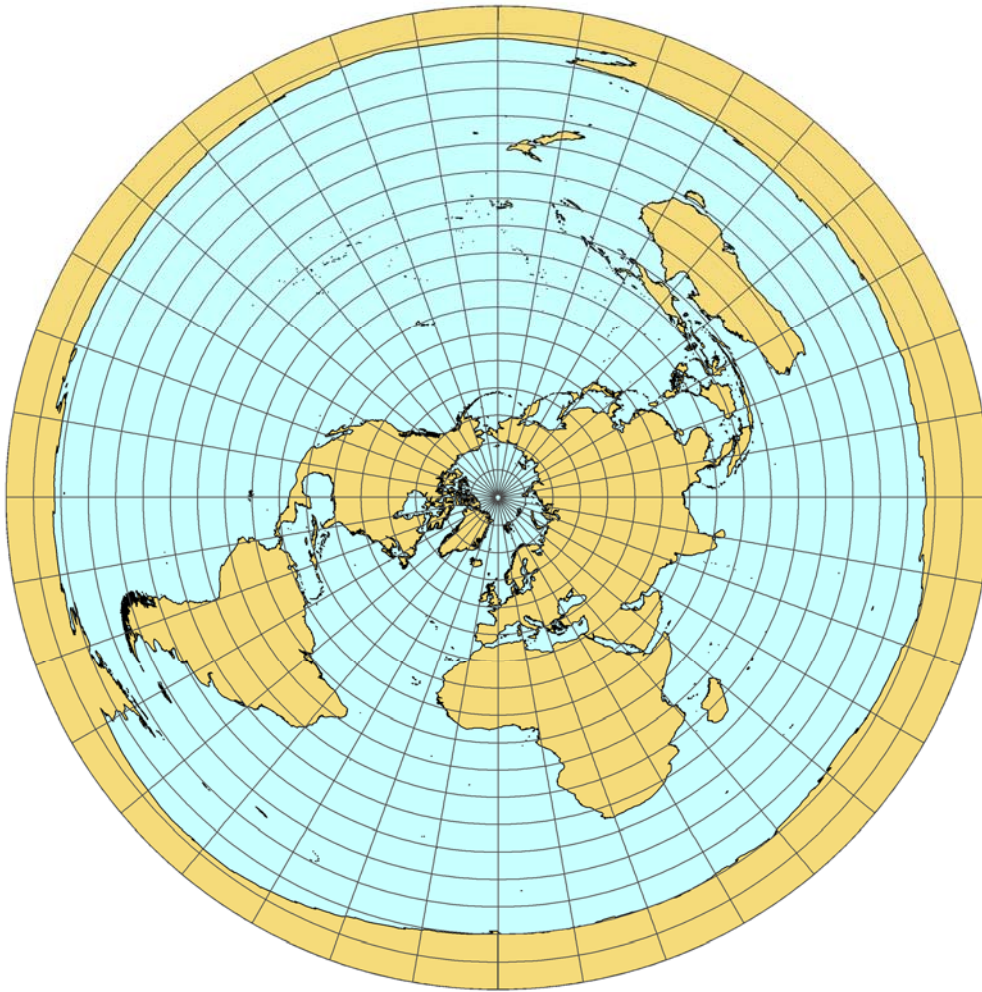


Figura 2.5.51. Proyección acimutal equidistante polar, centrada en el Polo Norte.

- Para la proyección acimutal equidistante transversa, se particulariza la expresión (2.5.179) para $\phi_0 = 00^\circ$; se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} x &= \phi \frac{\cos \phi \operatorname{sen} \Delta \lambda}{\operatorname{sen} \phi} \\ y &= \phi \frac{\operatorname{sen} \phi}{\operatorname{sen} \phi} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.182)$$

En la siguiente figura puede verse una proyección acimutal equidistante transversa:

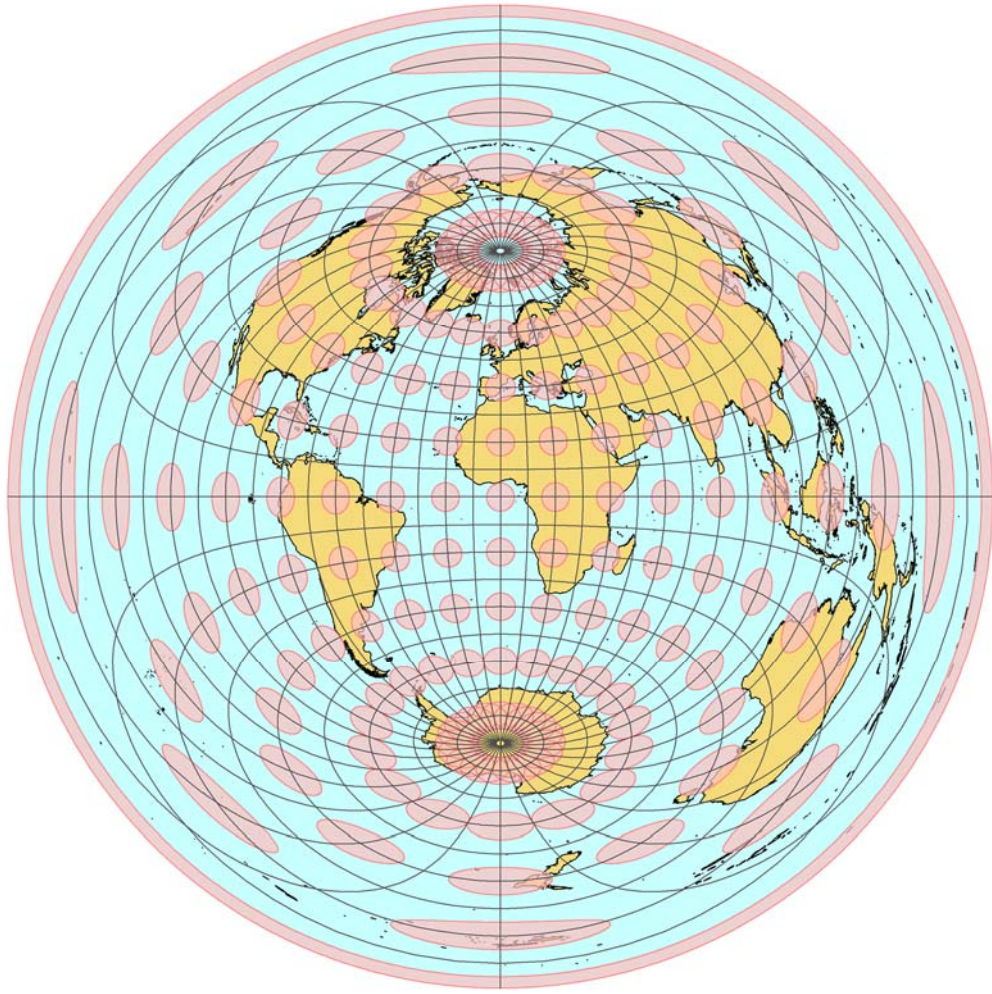


Figura 2.5.52. Proyección acimutal equidistante transversa, centrada en $\phi_o = 00^\circ$.

2.5.8.3.3. Transformación de coordenadas cartesianas en el plano a geográficas en la esfera

Partiendo del planteamiento establecido en la figura 2.5.48, en este caso se obtendrán las coordenadas geográficas de un punto genérico A (ϕ_A, λ_A) a partir de sus correspondientes cartesianas (x_A, y_A).

Teniendo en cuenta la expresión de (2.5.176):

$$\sin \phi_A = \cos \phi \sin \phi_o + \cos \phi_o \sin \phi \cos Z$$

Y las siguientes igualdades obtenidas de la figura 2.5.49:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} Z &= \frac{x_A}{y_A} \\ \sin Z &= \frac{x_A}{\phi} \\ \cos Z &= \frac{y_A}{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.183)$$

Se tendrá el valor de la latitud (ϕ_A) sustituyendo la última expresión de (2.5.183) en (2.5.176):

$$\sin \varphi_A = \cos \phi \sin \varphi_o + \frac{y_A}{\phi} \cos \varphi_o \sin \phi$$

$$\varphi_A = \arcsen \left(\cos \phi \sin \varphi_o + \frac{y_A}{\phi} \cos \varphi_o \sin \phi \right)$$

Generalizando la expresión anterior para cualquier punto:

$$\varphi = \arcsen \left(\cos \phi \sin \varphi_o + \frac{y}{\phi} \cos \varphi_o \sin \phi \right) \quad (2.5.184)$$

Para obtener ahora la ecuación correspondiente al cálculo de la longitud, se parte de la fórmula de la cotangente en el triángulo esférico PTA definido en la figura 2.5.48:

$$\cotg \phi \cos \varphi_o = \sin \varphi_o \cos Z + \sin Z \cotg \Delta \lambda$$

De donde:

$$\tg \Delta \lambda = \frac{\sin Z}{\cos \varphi_o \cotg \phi - \sin \varphi_o \cos Z}$$

$$\Delta \lambda = \lambda_A - \lambda_o = \arctg \left(\frac{\sin Z}{\cos \varphi_o \cotg \phi - \sin \varphi_o \cos Z} \right)$$

$$\lambda_A = \lambda_o + \arctg \left(\frac{\sin Z}{\cos \varphi_o \cotg \phi - \sin \varphi_o \cos Z} \right) \quad (2.5.185)$$

Y sustituyendo los valores de $\sin Z$ y $\cos Z$ del grupo (2.5.183) en la expresión anterior:

$$\lambda_A = \lambda_o + \arctg \left(\frac{x_A}{\phi \cos \varphi_o \cotg \phi - y_A \sin \varphi_o} \right)$$

Generalizando la expresión anterior para cualquier punto:

$$\lambda = \lambda_o + \arctg \left(\frac{x}{\phi \cos \varphi_o \cotg \phi - y \sin \varphi_o} \right) \quad (2.5.186)$$

- Particularizando las expresiones (2.5.184) y (2.5.186) para $\varphi_o = +90^\circ$ (Polo Norte); se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen(\cos \phi) \\ \lambda &= \lambda_o + \arctg \left(-\frac{x}{y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.187)$$

- Y para $\varphi_o = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen(-\cos \phi) \\ \lambda &= \lambda_o + \arctg \left(\frac{x}{y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.188)$$

- Para el aspecto transverso, se particularizan las expresiones (2.5.184) y (2.5.186) para $\phi_0 = 00^\circ$, teniendo:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen\left(\frac{y}{\phi} \sen \phi\right) \\ \lambda &= \lambda_0 + \arctg\left(\frac{x}{\phi \cotg \phi}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.189)$$

2.5.8.4. Deformaciones de la proyección acimutal equidistante

Se analizarán las deformaciones que presenta, con lo cual quedarán demostradas las propiedades enunciadas con anterioridad. Para ello se parte de considerar una superficie diferencial sobre la esfera y su homóloga sobre el plano:

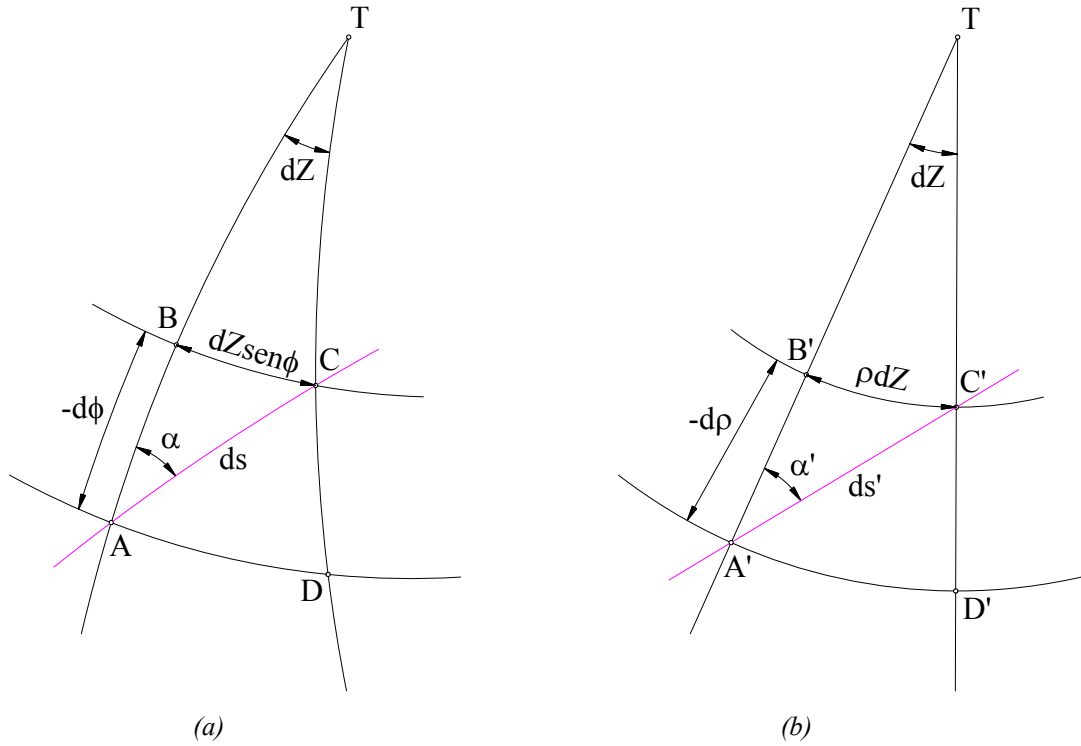


Figura 2.5.53. Estudio de las deformaciones en la proyección acimutal equidistante.

2.5.8.4.1. Deformación angular

Considerando un triángulo infinitesimal en la esfera (figura 2.5.53.a), se comprueba que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dZ \sen \phi}{-d\phi} \quad (2.5.190)$$

Mientras que su transformada en el plano (figura 2.5.53.b):

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\rho dZ}{-d\rho} \quad (2.5.191)$$

Por tanto, el módulo de deformación angular (2.3.8) vendrá dado por la expresión:

$$A = \alpha' - \alpha = \arctg \frac{\rho dZ}{-d\rho} - \arctg \frac{\sen \phi dZ}{-d\phi}$$

Siendo $\rho = \phi$ y su derivada:

$$d\rho = d\phi \quad (2.5.192)$$

Se obtiene:

$$A = \arctg \frac{\phi dZ}{-d\phi} - \arctg \frac{\sen \phi dZ}{-d\phi} \quad (2.5.193)$$

Tomando el cociente de las tangentes, sustituyendo el valor de ρ (2.5.175) y el de su derivada $d\rho$ (2.5.192), se tiene:

$$\frac{\text{tg}\alpha'}{\text{tg}\alpha} = \frac{\frac{\rho dZ}{-d\rho}}{\frac{dZ \sen \phi}{-d\phi}} = \frac{\rho d\phi}{d\rho \sen \phi} = \frac{\phi d\phi}{d\phi \sen \phi} = \frac{\phi}{\sen \phi} \quad (2.5.194)$$

Por tanto:

$$\text{tg}\alpha' = \text{tg}\alpha \frac{\phi}{\sen \phi} \quad (2.5.195)$$

En la ecuación anterior se observa que $\text{tg}\alpha \neq \text{tg}\alpha'$, lo que demuestra que se trata de una proyección no conforme: $\alpha \neq \alpha'$.

Sin embargo, en el punto de tangencia, para $\phi = 0$:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\phi}{\sen \phi} = 1 \quad (2.5.196)$$

Con lo cual, en el centro de la proyección ($\phi = 0$): $\alpha = \alpha'$, quedando demostrada la condición de acimutal.

2.5.8.4.2. Deformación superficial

Para al cálculo del módulo de deformación superficial se considerarán los triángulos infinitesimales establecidas en la figura 2.5.53.

Para la esfera, según la figura 2.5.53.a:

$$dS = \frac{1}{2} AB \ BC = -\frac{1}{2} d\phi dZ \sen \phi \quad (2.5.197)$$

Para su transformada en el plano, según la figura 2.5.53.b:

$$dS' = \frac{1}{2} A'B' \ B'C' = -\frac{1}{2} d\rho \rho dZ \quad (2.5.198)$$

Tomando el módulo de deformación superficial (2.3.9), sustituyendo ρ (2.5.175) y $d\rho$ (2.5.192) por sus valores, se tiene:

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = \frac{\rho d\rho}{\sin \phi d\phi} = \frac{\phi}{\sin \phi} \quad (2.5.199)$$

Por tanto:

$$dS' = dS \frac{\phi}{\sin \phi} \quad (2.5.200)$$

Quedando demostrado la no equivalencia de la proyección acimutal equidistante.

2.5.8.4.3. Deformación lineal

Tomando los elementos lineales diferenciales ds sobre la esfera y ds' sobre el plano según lo establecido en la figura 2.5.53:

$$ds = d\phi \sec \alpha \quad (2.5.201)$$

$$ds' = d\rho \sec \alpha' \quad (2.5.202)$$

El módulo de deformación lineal (2.3.10) vendrá dado por el cociente entre las expresiones anteriores:

$$K = \frac{ds'}{ds} = \frac{d\rho \sec \alpha'}{d\phi \sec \alpha} = \frac{d\rho}{d\phi} \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha'}}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

Sustituyendo en la expresión anterior los valores de ρ (2.5.175) y $\tan \alpha'$ (2.5.195):

$$K = \frac{ds'}{ds} = \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \alpha \frac{\phi^2}{\sin^2 \phi}}{1 + \tan^2 \alpha}} = \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{\phi^2}{\sin^2 \phi} \sin^2 \alpha} \quad (2.5.203)$$

Por tanto:

$$ds' = ds \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{\phi^2}{\sin^2 \phi} \sin^2 \alpha} \quad (2.5.204)$$

De esta última expresión puede concluirse que cuando: $\alpha = 0^\circ$ o $180^\circ \Rightarrow ds' = ds$. Por tanto, los círculos máximos que pasan por el punto de tangencia son líneas automecóicas en la proyección.

$$\text{Y cuando } \alpha = 90^\circ \text{ o } 270^\circ \Rightarrow ds' = ds \frac{\phi}{\sin \phi}$$

Como puede comprobarse observando las expresiones anteriores la deformación es máxima en la dirección del almicantrat y mínima en la del vertical, con lo cual, los semiejes de la elipse indicatriz de Tissot serán:

$$\left. \begin{aligned} a' &= k_a = \frac{\phi}{\sin \phi} \\ b' &= h_v = 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.5.205)$$

En resumen, esta proyección no es conforme, ni equivalente, ni perspectiva. Próximo al punto de tangencia las distorsiones son pequeñas, aumentando con la distancia a éste hasta llegar al punto antípoda, donde la deformación es máxima, volviéndose las formas irreconocibles.

En las figuras 2.5.54, 2.5.55, 2.5.56 se representan una proyección azimutal equidistante horizontal, una polar y una transversa, donde se han incluido las elipses de Tissot.

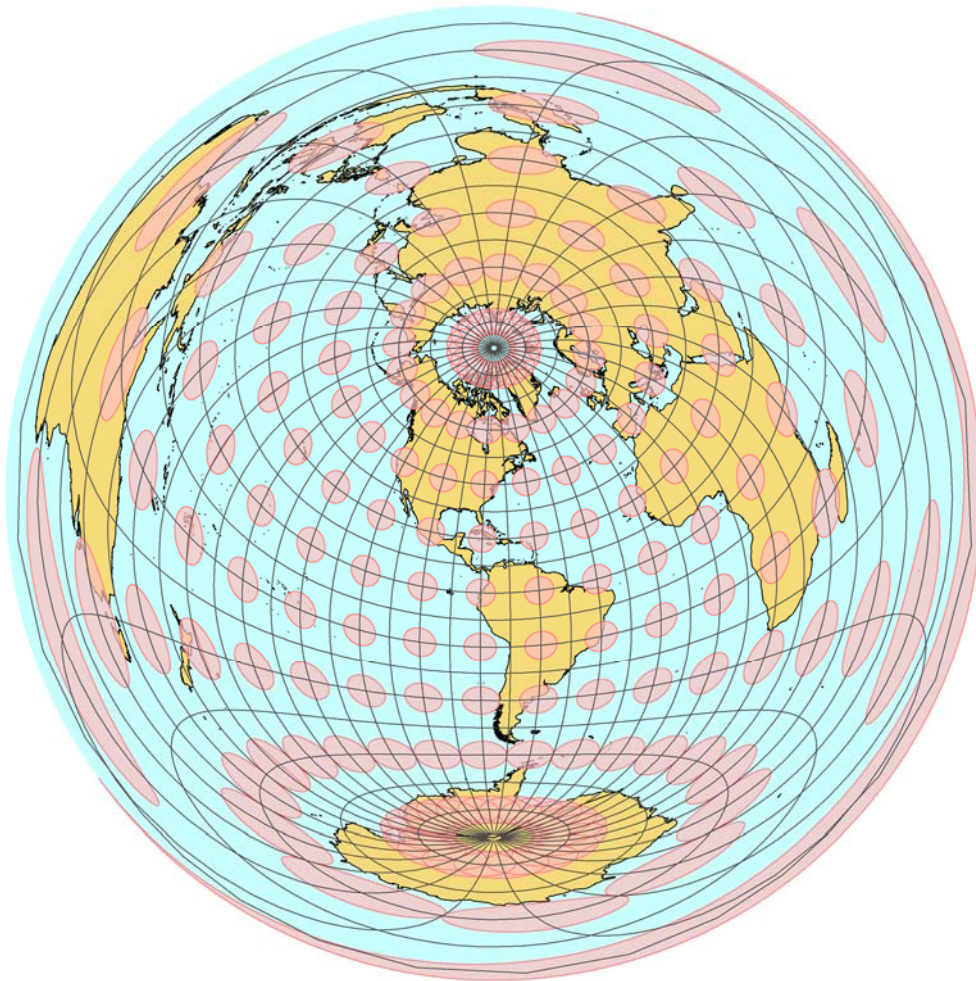


Figura.2.5.54. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección acimutal equidistante horizontal con centro en Norfolk.

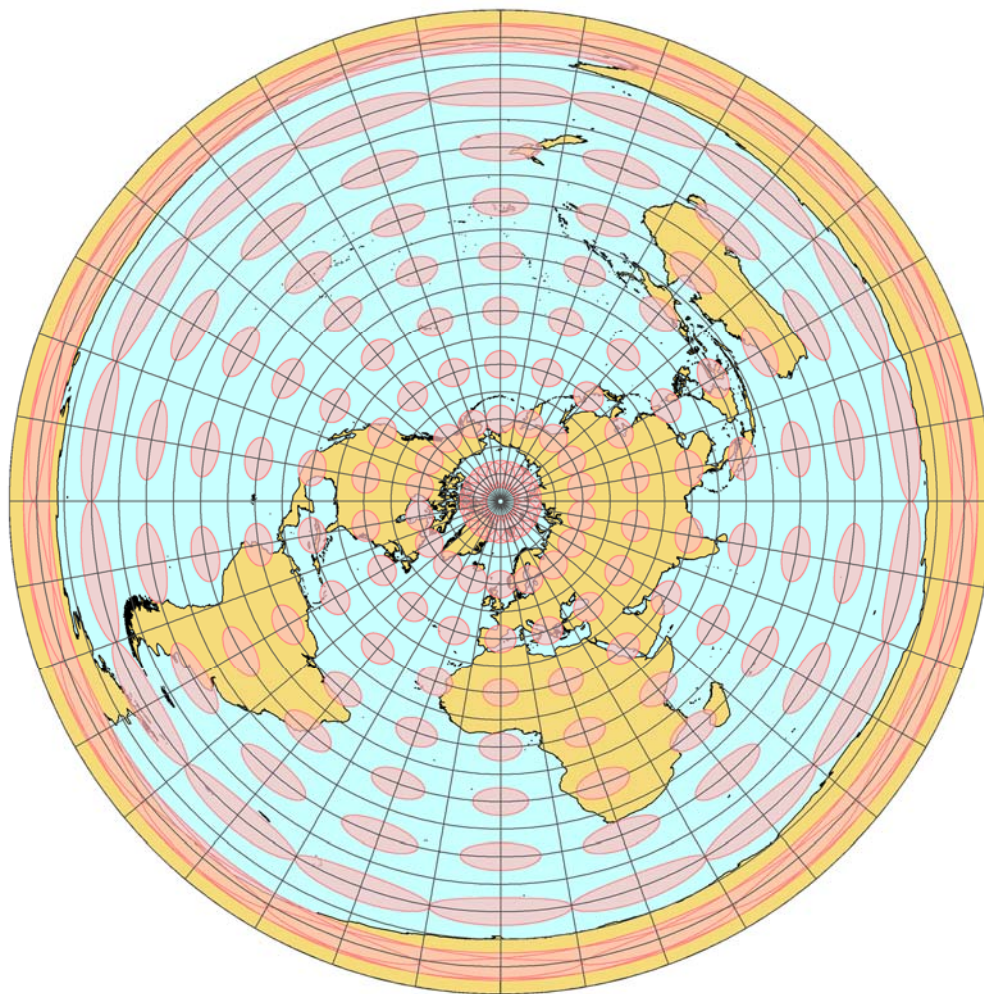


Figura.2.5.55. Representación de las elipses indicatrices de Tissot con centro en el Polo Norte.

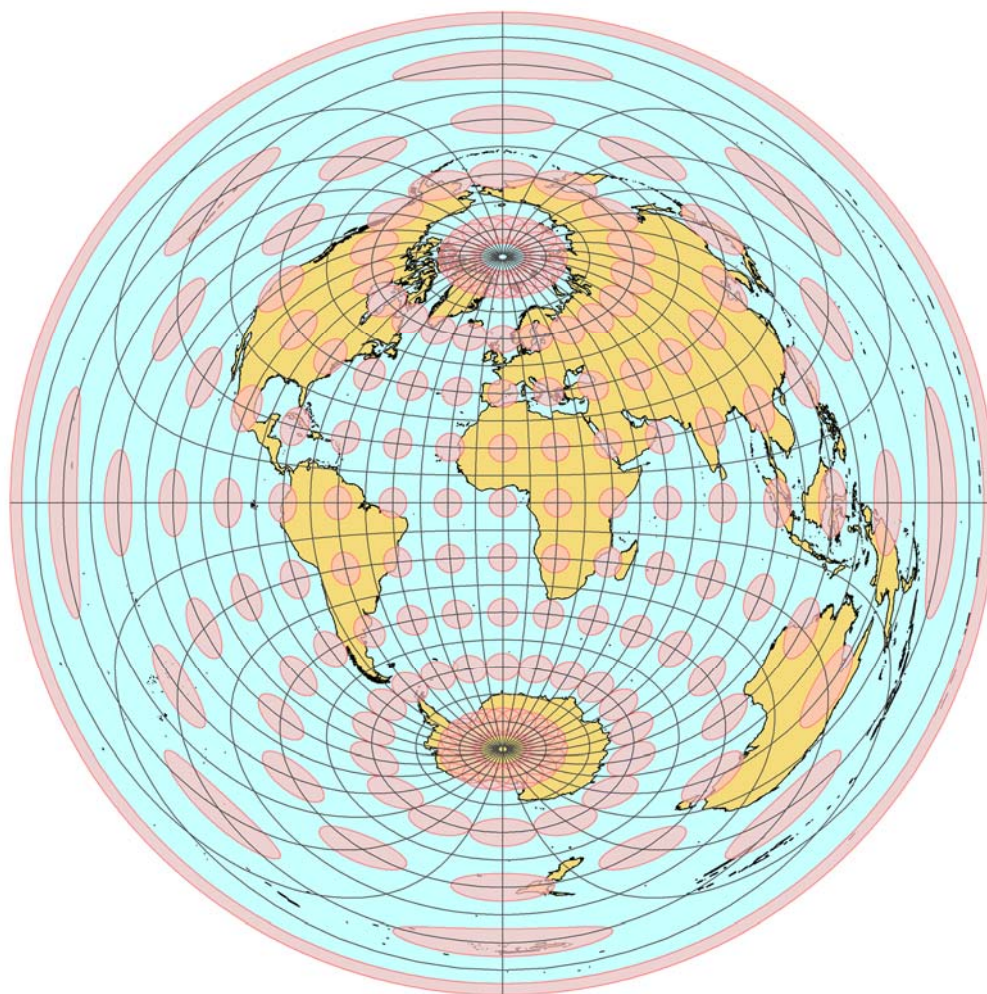


Figura.2.5.56. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección acimutal equidistante transversa con centro en $\varphi_0 = 00^\circ$, $\lambda_0 = 000^\circ$.

2.5.8.5. Usos de la proyección acimutal equidistante

La proyección acimutal equidistante en su aspecto polar fue la más comúnmente empleada para mapas de las regiones polares la elaboración de atlas comerciales, uso que en la actualidad tiene carácter anecdótico²⁰⁶.

En rutas de navegación marítimas y aéreas, dadas las características de equidistancia que tiene esta proyección, pueden usarse estos mapas de forma puntual, centrándose en una ubicación importante cómo su punto central y utilizan una orientación adecuada. Por ejemplo, en su aspecto ecuatorial, en ubicaciones situadas en el Ecuador o cerca de él, como Singapur; en su aspecto oblicuo, en ubicaciones situadas entre los polos y el Ecuador; por ejemplo cartografía a gran escala de Micronesia y en su aspecto polar, en regiones polares o navegación polar.

Respecto al uso náutico de esta proyección puede decirse que su empleo está restringido a la construcción de identificadores de estrellas (“Star Finder and Identifier”), aunque bien es cierto, que

²⁰⁶ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 194.

también es empleada en el trazado de ciertas cartas polares²⁰⁷, así como en cartografía náutica militar y navegación electrónica haciendo coincidir el centro de la proyección con un centro operativo o una estación receptora respectivamente²⁰⁸.

2.5.9. Proyección de Mollweide

La proyección de Mollweide es la única proyección equiárea objeto de estudio en este trabajo, basada en un modelo esférico de la Tierra.

Al igual que el fundamento de la proyección de Mercator es la alteración de la distancia entre los paralelos para que sea conforme (procedimiento analítico), Mollweide altera la distancia entre paralelos, para que la propiedad de equivalencia de área se mantenga (procedimiento geométrico)²⁰⁹.

2.5.9.1. Orígenes de la proyección de Mollweide

Esta proyección pseudo-cilíndrica fue presentada por Carl B. Mollweide²¹⁰ en 1805 y estuvo relativamente inactiva hasta que J. Babinet la popularizó en 1857 bajo el nombre de homográfica. Apareció en algunos atlas del siglo XIX para numerosas características temáticas²¹¹, teniendo auge como mapamundi en el siglo XX, sobre todo como una inspiración para otras proyecciones importantes²¹².

2.5.9.2. Características principales de la proyección de Mollweide

Es una proyección pseudo-cilíndrica equiárea que representa el mundo en una elipse con su eje mayor, el Ecuador, dos veces la longitud del meridiano central, su eje menor²¹³.

El meridiano central es una línea recta, siempre y cuando el Ecuador, junto con los meridianos que distan 90° al E y al W del meridiano central, formen una circunferencia. Otros meridianos son semielipses igualmente espaciadas teniendo su concavidad hacia el meridiano central. Los paralelos son líneas rectas desigualmente espaciadas perpendiculares al meridiano central.²¹⁴

2.5.9.3. Transformación de coordenadas

Para la transformación de coordenadas geográficas en la esfera a cartesianas en el plano, en una proyección de Mollweide, se seguirá el siguiente planteamiento²¹⁵:

²⁰⁷ Bowditch, Nathaniel: *The American Practical Navigator*, National Imagery and mapping Agency, Bethesda, Maryland, 2002 bicentennial edition. P.31.

²⁰⁸ Moreu Curbera; Martínez Jiménez: *Astronomía y Navegación. Tomo III*, Librería San José, Vigo 1972. P. 243.

²⁰⁹ Frederick Pearson, II, M.S., P.D.D.: *Map Projections: Theory and Applications*, CRC Press, Florida 1990. Pp. 138 y 139.

²¹⁰ (1774-1825), matemático y astrónomo alemán.

²¹¹ Delmelle, Eric M.: *Map Projection Properties: considerations for small-scale GIS applications*, thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Arts, Department of Geography, State University of New York, Buffalo, septiembre 2001. P. 62.

²¹² Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 249.

²¹³ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 251.

²¹⁴ Snyder, John P.; Voxland, Philip M.: *An Album of Map Projections*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, United States Government Printing Office, Washington 1989. P.54.

²¹⁵ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. Pp. 251 y 252.

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{8}}{\pi} R(\lambda - \lambda_o) \cos \theta \\ y &= \sqrt{2} R \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.5.206)$$

Al igual que en el resto de proyecciones ya estudiadas se considerará $R=1$ y $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o$, teniendo así:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{8}}{\pi} \Delta\lambda \cos \theta \\ y &= \sqrt{2} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.5.207)$$

Donde:

$$2\theta + \sin 2\theta = \pi \sin \varphi \quad (2.5.208)$$

En la figura 2.5.57 puede verse un mapamundi en proyección de Mollweide y en la figura 2.5.58 una proyección de Mollweide del Atlántico Norte:

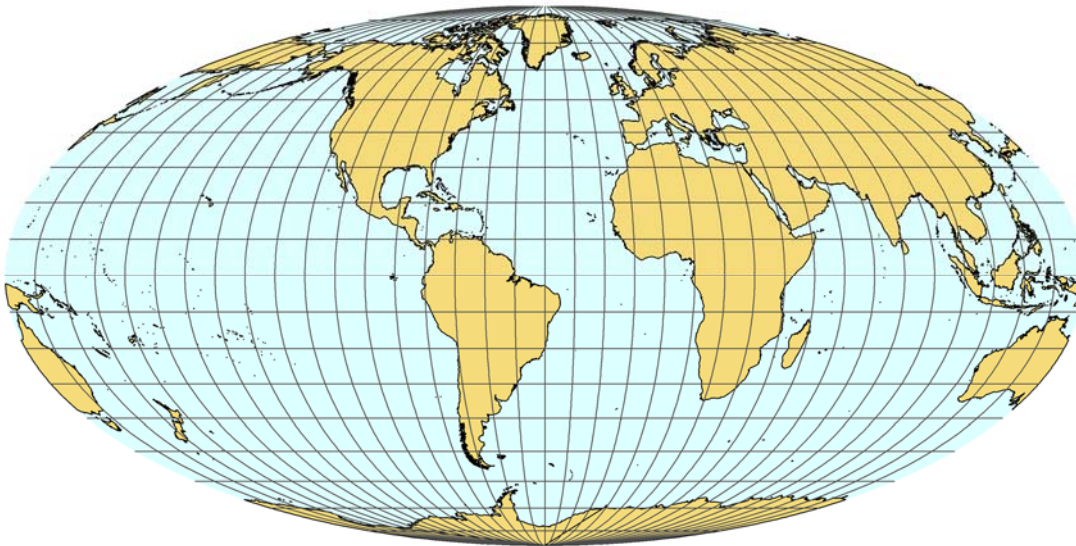


Figura 2.5.57. Proyección de Mollweide con meridiano central en $\lambda_o = 040^\circ W$.

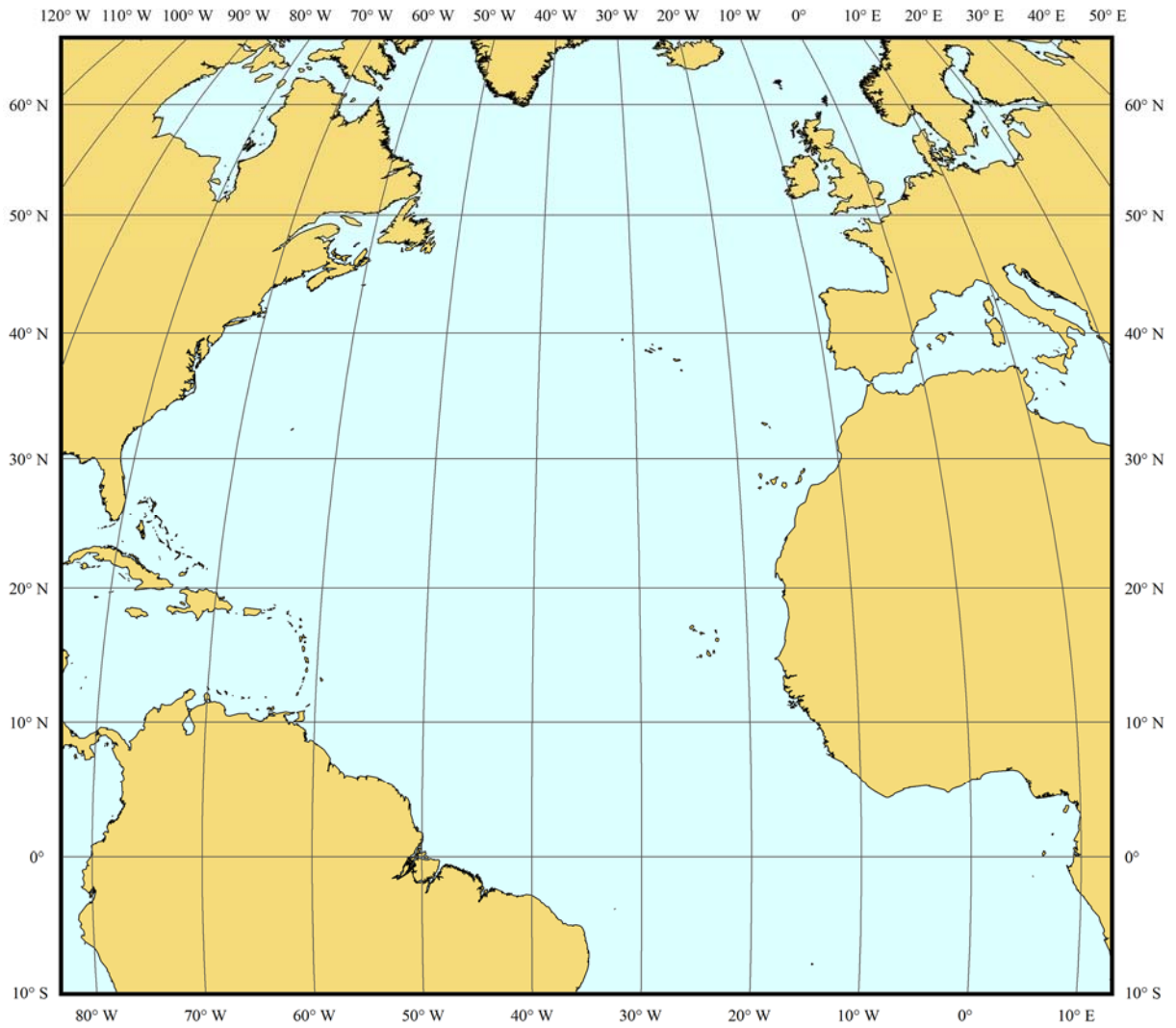


Figura 2.5.58. Proyección de Mollweide del Atlántico Norte con meridiano central en $\lambda_o = 035^\circ W$.

Las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas en el plano a geográficas en la esfera, en una proyección de Mollweide, serán²¹⁶:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen\left(\frac{2\theta + \sen 2\theta}{\pi}\right) \\ \lambda &= \lambda_o + \frac{\pi x}{\sqrt{8R} \cos \theta} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.209)$$

Donde:

$$\theta = \arcsen\left(\frac{y}{\sqrt{2R}}\right) \quad (2.5.210)$$

²¹⁶ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. Pp. 251 y 252.

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{\sqrt{2}R} \quad (2.5.211)$$

Sustituyendo (2.5.210) y (2.5.211) en (2.5.209) y simplificando, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen \left[\frac{2 \arcsen \left(\frac{y}{\sqrt{2}} \right) + y \sqrt{2 - y^2}}{\pi} \right] \\ \lambda &= \lambda_o + \frac{\pi x}{2 \sqrt{2 - y^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.212)$$

2.5.9.4. Deformaciones de la proyección de Mollweide

La proyección de Mollweide no presenta deformación de área, dado que, se parte de la condición de equiárea para su desarrollo²¹⁷.

Como ninguna proyección que es equivalente puede ser conforme a la vez, se verá a continuación la máxima deformación angular que presenta la proyección en un punto (A_{\max})²¹⁸.

Siendo²¹⁹:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{\pi} \lambda \quad (2.5.213)$$

Y los módulos de deformación lineal que se obtendrían en la dirección de los meridianos (h) y de los paralelos (k):

$$h = \frac{\pi \cos \varphi}{2 \sqrt{2} \cos \theta \cos \varepsilon} \quad (2.5.214)$$

$$k = \frac{2 \sqrt{2} \cos \theta}{\pi \cos \varphi} \quad (2.5.215)$$

Se tiene que la máxima deformación angular en un punto será:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{tg} \frac{A_{\max}}{2} &= \sqrt{h^2 + k^2 - 2} \\ A_{\max} &= 2 \arctg \left(\frac{\sqrt{h^2 + k^2 - 2}}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.5.216)$$

Los únicos puntos en los cuales no hay deformación son en la intersección de los paralelos estándar de 40° 44' 12" N y S.

²¹⁷ Frederick Pearson, II, M.S., P.D.D.: *Map Projections: Theory and Applications*, CRC Press, Florida 1990. Pp. 138 a 141.

²¹⁸ Lapaine, Miljenko: "Mollweide Map Projection", *KoG*, Vol.15, N°15, pp. 7 a 16, 2011.

²¹⁹ $\varepsilon = \alpha - \frac{\pi}{2}$, siendo α el ángulo entre un meridiano y un paralelo en el plano de proyección

En la figura 2.5.59 puede verse como las elipses de Tissot tienden a una circunferencia en los puntos de corte del meridiano central 040°W con los paralelos de 40°N y 40°S ; también puede verse que a medida que nos alejamos de estos puntos la deformación va en aumento siendo máxima en los bordes de la proyección.

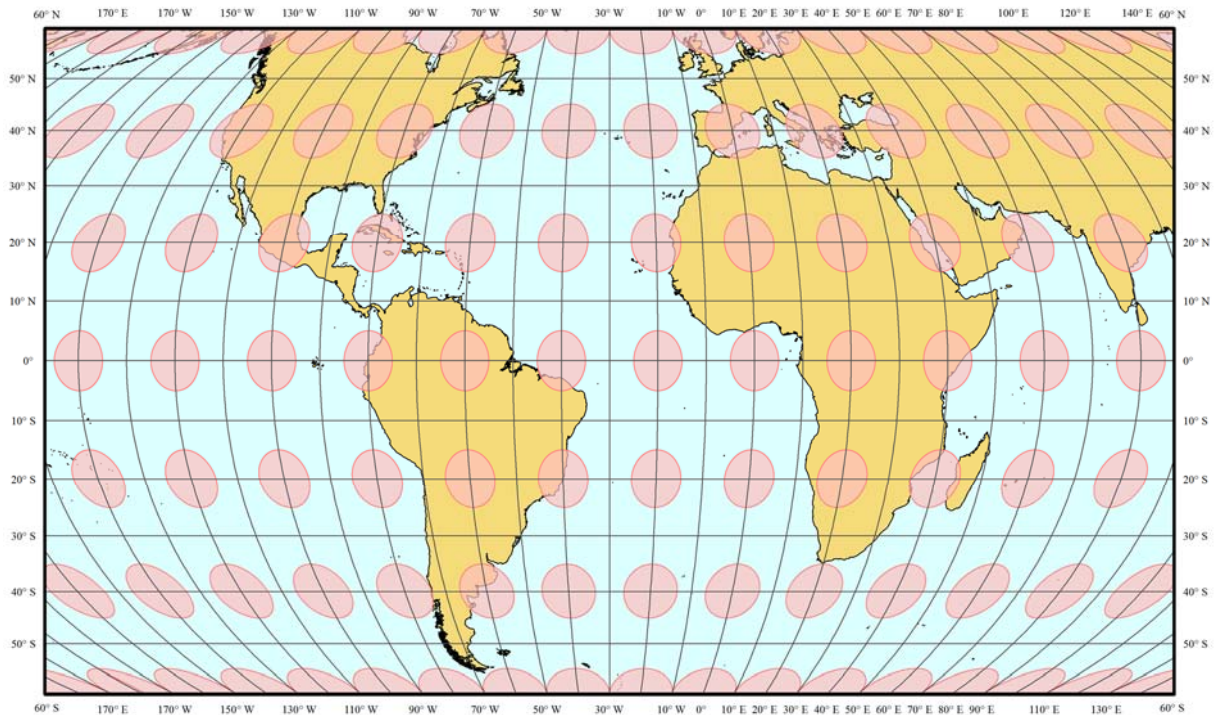


Figura 2.5.59. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección de Mollweide con meridiano central en 040°W .

En la siguiente figura puede verse la representación de las elipses de Tissot sobre una proyección de Mollweide con meridiano central en 000° :

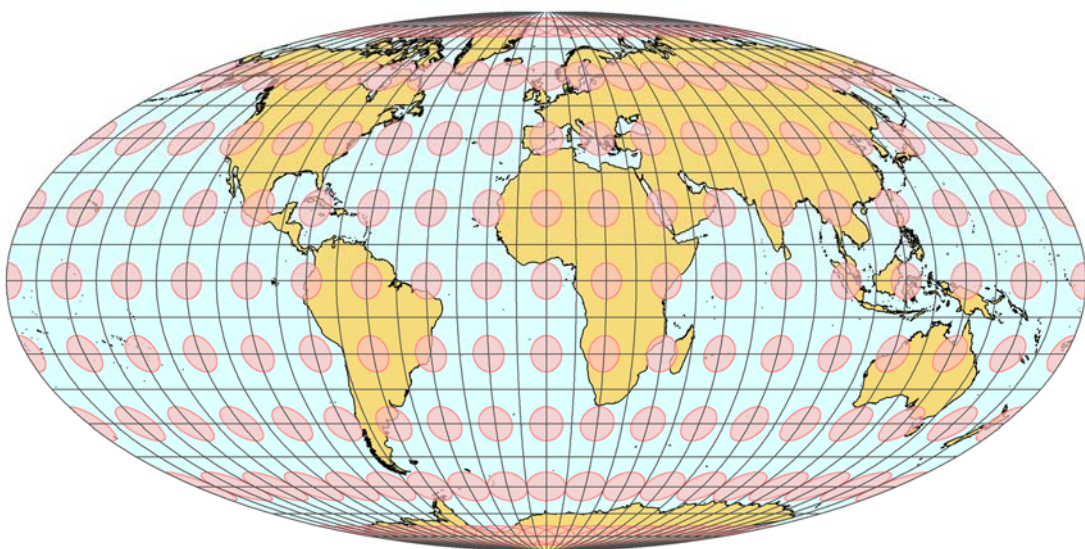


Figura 2.5.60. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección de Mollweide con meridiano central en 000° .

2.5.9.5. Usos de la proyección de Mollweide

La proyección de Mollweide es normalmente usada para mapamundis, especialmente en mapas temáticos, y ocasionalmente para regiones de larga extensión tales como el Océano Pacífico. Esto es debido a que sólo dos puntos (puntos de latitud 40°44'12" N y S sobre el meridiano central) están completamente libres de deformación, a menos que, la proyección sea interrumpida para minimizar así la deformación en los océanos o continentes²²⁰. Combinada con la proyección Sinusoidal se desarrollaron otras proyecciones tales como proyección de Goode (1916) y proyección de Boggs (1929)²²¹.

La proyección Atlantis es el caso de la proyección oblicua de Mollweide. La proyección está disponible en la mayoría de los SIG como un mapa base para datos estadísticos²²².

Otro uso de esta proyección puede verse en el logotipo de la Asociación Cartográfica Internacional, que tiene desde que se fundó en 1959²²³.

²²⁰ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P. 249.

²²¹ Snyder, John P.; Voxland, Philip M.: *An Album of Map Projections*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, United States Government Printing Office, Washington 1989. P.54.

²²² Delmelle, Eric M.: *Map projection properties: considerations for small-scale GIS applications*, A Project submitted to the Faculty of the Graduate School of State University of New York at Buffalo in partial fulfillments of the requirements for the degree of Master of Arts, Department of Geography, september 2001. P. 62.

²²³ Lapaine, Miljenko: "Mollweide Map Projection", *KoG*, Vol.15. N°15, pp. 7 a 16, 2011.

CAPÍTULO III. ANÁLISIS Y ESTABLECIMIENTO DE LOS REQUISITOS A CUMPLIR POR UNA CARTA DE NAVEGACIÓN

3. ANÁLISIS Y ESTABLECIMIENTO DE LOS REQUISITOS A CUMPLIR POR UNA CARTA DE NAVEGACIÓN

Las cartas de navegación son una herramienta fundamental para planificar y presentar visualmente la derrota de un buque o avión para el viaje previsto y verificar la situación durante el viaje.

Haciendo hincapié en las cartas de navegación marítima, todo buque independientemente de su tamaño está obligado a llevar cartas según la Regla 19, Capítulo V del Convenio SOLAS y éstas han de cumplir la normativa de la IHO²²⁴; Organización en la que delega la IMO²²⁵ para su construcción tanto en cartas de navegación impresa como electrónica.

En vista de la infinidad de sistemas de proyección posibles, la elección del más conveniente a la hora de realizar una determinada carta náutica es una decisión cuando menos complicada, y obviamente será función de la finalidad que se persiga. Las exigencias a cumplir resultan en muchos casos incompatibles con un solo sistema de representación, así, una loxodrómica se trazará cómodamente sobre una carta de Mercator, mientras que una ortodrómica tendrá un trazado óptimo sobre una carta gnomónica. E incluso existirán casos particulares en los que ninguna de las dos soluciones anteriores sea la más adecuada, como es el caso de la navegación loxodrómica en regiones polares²²⁶. También deberá tenerse en cuenta, que las necesidades para una carta de navegación impresa no tienen por qué coincidir con las de una carta de navegación electrónica.

Una vez delimitado el estado del arte respecto a cartografía náutica en el capítulo dos, llega el momento de analizar el potencial de los sistemas de carta de navegación electrónica y realizar propuestas de mejora en lo referente a la infrautilización de los sistemas de proyección a la hora de visualizar ENC²²⁷ en la pantalla de un ECDIS. Para ello, se comenzará por analizar y establecer los requisitos que debe cumplir una carta de navegación impresa, para poder extrapolar posteriormente los resultados a la metodología propia de la cartografía electrónica. A priori, esta labor puede parecer un asunto manido, ya que las cartas de navegación en papel llevan utilizándose a bordo de los buques desde hace siglos, y poco nuevo se puede aportar a su estudio. La producción de cartografía impresa y el establecimiento de rutinas y métodos de trabajo sobre las cartas de papel vienen optimizándose desde la aparición de los primeros portulanos y puede decirse que ha llegado a una optimización total, pero en ningún caso puede decirse lo mismo de los sistemas de información y visualización de cartas electrónicas. Los ECDIS son una tecnología reciente, y si bien se ha alcanzado una gran fiabilidad en cuanto a normativización y calidad de producción, no ocurre lo mismo respecto a representación en pantalla y establecimiento en la rutina de a bordo de metodologías operacionales eficientes. En estos dos aspectos los ECDIS se han limitado a adoptar los criterios de representación y metodología de uso tradicionales de las cartas de Mercator impresas, despreciando el potencial, que estos sistemas ofrecen, especialmente si se comparan con las posibilidades, que se pueden encontrar en los actuales programas de GIS²²⁸. Este es el motivo principal por el que resulta interesante comenzar por establecer los requisitos esenciales y metodología, que una carta de navegación impresa debe cumplir, para poder así analizar su extrapolación a la cartografía electrónica.

²²⁴ Se optará por el acrónimo inglés IHO (International Hydrographic Organization) frente al español OHI.

²²⁵ Al igual que en el caso anterior se optará por el acrónimo inglés IMO (International Maritime Organization) frente al español OMI.

²²⁶ Joly, Fernand: *La cartografía*, Ariel S.A., Barcelona, 1982. Pp. 66 y 67.

²²⁷ Se optará por el acrónimo inglés ENC (Electronic Nautical Chart) frente al español CNE.

²²⁸ Al igual que en el caso anterior se optará por el acrónimo inglés GIS (Geographic Information System) frente al español GIS.

3.1. ANÁLISIS DE LOS REQUISITOS A CUMPLIR POR UNA CARTA DE NAVEGACIÓN IMPRESA

La implantación de la cartografía electrónica en los buques mercantes es una realidad global, y posiblemente, en menos de una década ya no será posible encontrar cartas de navegación tradicionales a bordo salvo, tal vez, en algún buque de cabotaje, o para fines decorativos. El motivo se encuentra en la Resolución MSC.282(86)²²⁹, adoptada el 5 de julio de 2009, que modifica el Convenio SOLAS estableciendo un calendario para la progresiva obligatoriedad de que los buques que efectúen viajes internacionales, lleven un ECDIS a bordo.

Ningún sistema electrónico puede ser completamente seguro; por tanto, los estándares de funcionamiento de la IMO, requieren, que el sistema completo incluya tanto un ECDIS principal como un medio de apoyo adecuado independiente; aceptando dos opciones: un segundo ECDIS conectado a una fuente de alimentación independiente y con una entrada de posición por GPS independiente o una carpeta adecuada de cartas náuticas de papel actualizadas suficientes para el viaje previsto²³⁰. Resulta evidente que hoy en día ya se encuentran buques con dos ECDIS, no llevando así cartas de papel, ya que de seguir en ellos, los oficiales de guardia todavía estarían obligados a mantenerlas actualizadas, trabajo sumamente tedioso y que consume una buena cantidad de tiempo.

Sin embargo, como se ha dicho anteriormente, todavía resulta interesante el estudio de la metodología de uso y de las características que deben cumplir las cartas de navegación, para su aplicación a la nueva cartografía electrónica. Para ello, en este epígrafe se expondrán los requisitos que deben cumplir una proyección cartográfica para la elaboración de cartas de navegación impresas, sin limitarse a la proyección de Mercator, en función de la tarea particular que se desea realizar. Así, puede comenzarse con establecer que sobre una carta de papel, el navegante realiza tres operaciones básicas:

- Trazar la derrota que ofrezca la mayor seguridad para la navegación.
- Realizar el seguimiento de la derrota trazada llevando periódicamente sobre la carta la posición geográfica del buque.

²²⁹ La Resolución MSC.282(86), adoptada el 5 de julio de 2009, incluye dos nuevos párrafos 2.9 y 2.10, a la regla V/19 del SOLAS, sobre obligatoriedad de llevar un ECDIS a bordo de determinados buques. A continuación se recoge el texto de estos párrafos:

2.10 Los buques que efectúen viajes internacionales llevarán un sistema de información y visualización de cartas náuticas electrónicas (SIVCE), tal como se indica a continuación:

.1 Los buques de pasaje de arqueo bruto igual o superior a 500 construidos el 1 de julio de 2012 o posteriormente;
.2 Los buques tanque de arqueo bruto igual o superior a 3.000 construidos el 1 de julio de 2012 o posteriormente;
.3 Los buques de carga que no sean buques tanque, de arqueo bruto igual o superior a 10.000, construidos el 1 de julio de 2013 o posteriormente;
.4 Los buques de carga que no sean buques tanque, de arqueo bruto igual o superior a 3.000 pero inferior a 10.000, construidos el 1 de julio de 2014 o posteriormente;
.5 Los buques de pasaje de arqueo bruto igual o superior a 500 construidos antes del 1 de julio de 2012, a más tardar en la fecha del primer reconocimiento que se efectúe el 1 de julio de 2014 o posteriormente;
.6 Los buques tanque de arqueo bruto igual o superior a 3 000 construidos antes del 1 de julio de 2012, a más tardar en la fecha del primer reconocimiento que se efectúe el 1 de julio de 2015 o posteriormente;
.7 Los buques de carga que no sean buques tanque, de arqueo bruto igual o superior a 50.000, construidos antes del 1 de julio de 2013, a más tardar en la fecha del primer reconocimiento que se efectúe el 1 de julio de 2016 o posteriormente;
.8 Los buques de carga que no sean buques tanque, de arqueo bruto igual o superior a 20.000 pero inferior a 50.000, construidos antes del 1 de julio de 2013, a más tardar en la fecha del primer reconocimiento que se efectúe el 1 de julio de 2017 o posteriormente; y
.9 Los buques de carga que no sean buques tanque, de arqueo bruto igual o superior a 10.000 pero inferior a 20.000, construidos antes del 1 de julio de 2013, a más tardar en la fecha del primer reconocimiento que se efectúe el 1 de julio de 2018 o posteriormente.

²³⁰ Según el Estándar S-66 de la IHO. P.19

- Estudiar el espacio geográfico mostrado por la carta.

Estas tres operaciones se analizarán a continuación, estableciendo para cada una de ellas las características que debiera cumplir la carta.

3.1.1. Planificación y trazado de derrotas.

A la hora de planificar y trazar una derrota sobre una carta de navegación, debería buscarse que el lugar geométrico que la represente sea de fácil trazado y visualizable mentalmente de forma intuitiva. Es decir, no solo ha de ser posible dibujar la derrota sobre la carta mediante material de dibujo simple, sino también debe ser posible, aun antes de su trazado, su visualización mental por parte del navegante sobre el espacio geográfico representado. Es evidente, que si la derrota puede trazarse como una línea recta, ambos requisitos se cumplirán óptimamente. Sin embargo, un buque puede seguir dos tipos de derrotas sobre la superficie terrestre: loxodrómicas u ortodrómicas, y resulta imposible obtener una proyección cartográfica donde ambas trayectorias, salvo casos particulares, se representen como líneas rectas.

También resultará de especial interés a la hora del trazado de derrotas que la proyección sea conforme, ya que, de este modo, los ángulos de rumbo pueden medirse y trazarse directamente con un transportador de ángulos, y que la escala de distancias varíe en la extensión de la carta de forma homogénea, para que puedan medirse distancias con ayuda de escalas locales o mediante procedimientos geométricos sencillos.

3.1.1.1. La derrota loxodrómica en la carta de Mercator

Si la derrota a trazar fuera una loxodrómica, la elección es inequívoca, la proyección de Mercator. En ella cualquier loxodrómica se representa como una línea recta y la medición de ángulos puede realizarse directamente, ya que se trata de una proyección conforme. La medición de distancias aún condicionada por la variación del módulo de deformación lineal en función de la latitud (2.5.11), también puede realizarse de forma gráfica fácilmente.

3.1.1.1.1. Trazado de derrotas loxodrómicas

Para trazar una línea de rumbo sobre la carta a partir de un punto A, se colocará el centro del transportador coincidiendo con dicho punto; si el transportador es rectangular debe estar paralelo a los meridianos y paralelos (la línea 000°/180° del transportador que debe coincidir con la dirección del meridiano). Una vez colocado por su parte externa se pondrá la punta de un lápiz coincidiendo con la graduación del rumbo a trazar, teniendo que la línea que une el punto A con el punto indicado por la punta del lápiz será el rumbo a seguir.

Esta operación será más sencilla, si se hace con una regla paralela graduada o con un transportador triangular, ya que, con la ayuda del meridiano más próximo al punto, se colocará la regla o transportador en dirección al rumbo que se desea trazar. En estas condiciones la regla o transportador se trasladará paralelamente a si mismo hasta que pase por el punto A para trazar la línea de rumbo.

Como puede verse en la siguiente figura con el uso de un lápiz y un transportador o unas reglas paralelas, se puede trazar fácilmente una derrota sobre una carta mercatoriana.

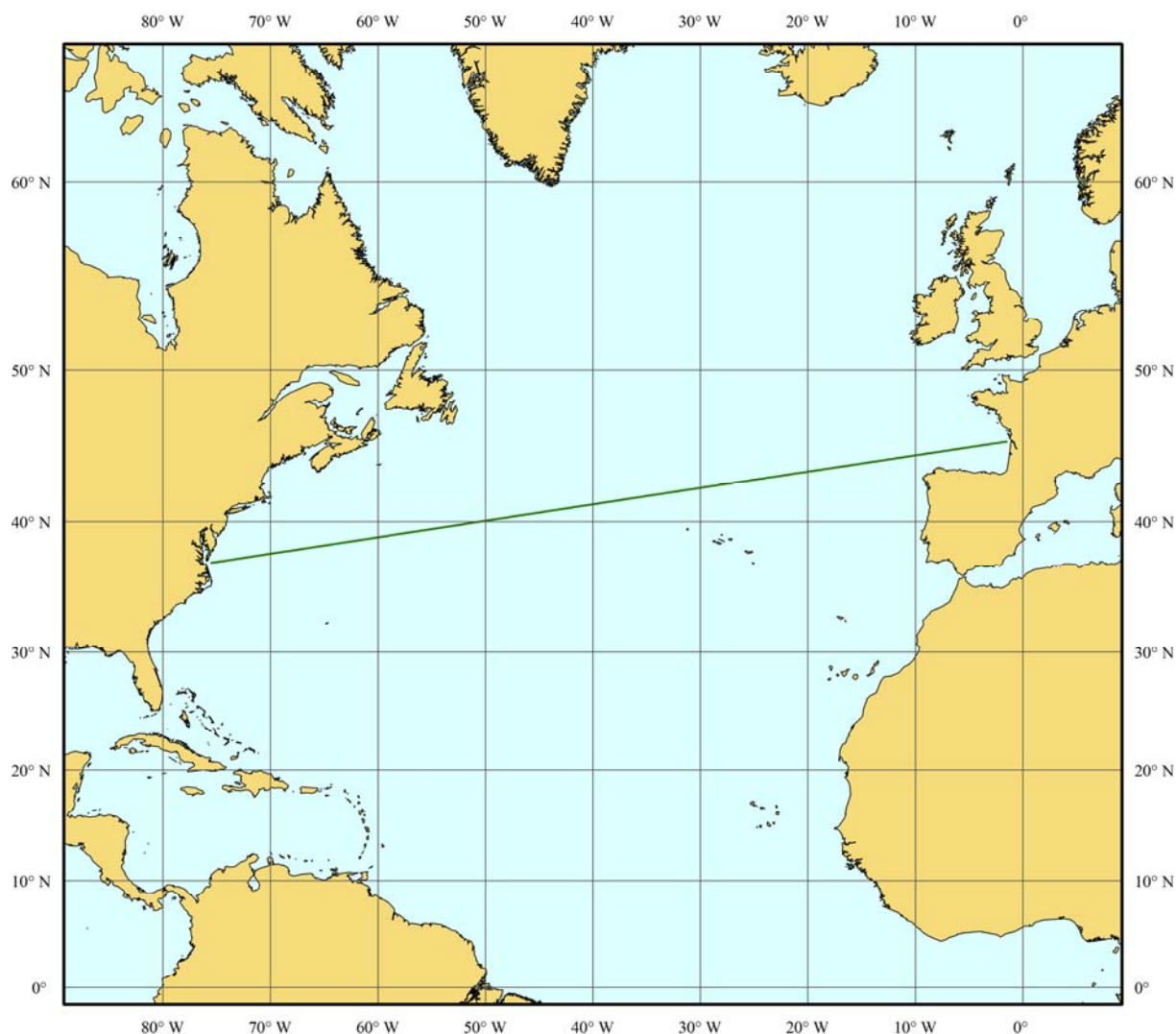


Figura 3.1.1. Trazado de un rumbo loxodrómico entre los puertos de Norfolk y Burdeos sobre una carta de Mercator

3.1.1.1.2. Medición de distancias loxodrómicas

Para medir distancias sobre en la carta mercatoriana hay dos procedimientos, el aproximado y el exacto.

En la práctica se emplea el aproximado y consiste en llevar a la escala de latitudes una abertura de compás a la que están separados los puntos que se desean conocer la distancia que hay entre ellos. La diferencia en latitud entre los puntos coincidentes con las puntas del compás es la distancia pedida. Se mide siempre a la altura de la latitud media de ambos puntos. Cuando se desea medir la distancia entre dos puntos que están en el mismo paralelo también se lleva la abertura del compás sobre el meridiano para determinar la distancia que están separados los puntos citados.

A la hora de medir distancias loxodrómicas, por el método exacto, sobre una carta de Mercator, pueden contemplarse tres casos:

- Que la derrota siga la dirección de los meridianos ($R = 000^\circ$ o 180°).
- Que la derrota siga la dirección de los paralelos ($R = 090^\circ$ o 270°).

- Que la derrota siga una dirección intermedia entre los dos supuestos anteriores.

Si la derrota sigue la dirección de los meridianos, la deformación que presente será la misma que la del meridiano con el que coincide, entre el mismo rango de latitudes. Por tanto, la distancia en millas se corresponderá con la diferencia de latitud entre los puntos de origen y destino expresada en minutos, es decir, la distancia puede medirse directamente sobre la escala de los meridianos en la carta, entre los paralelos de salida y llegada²³¹.

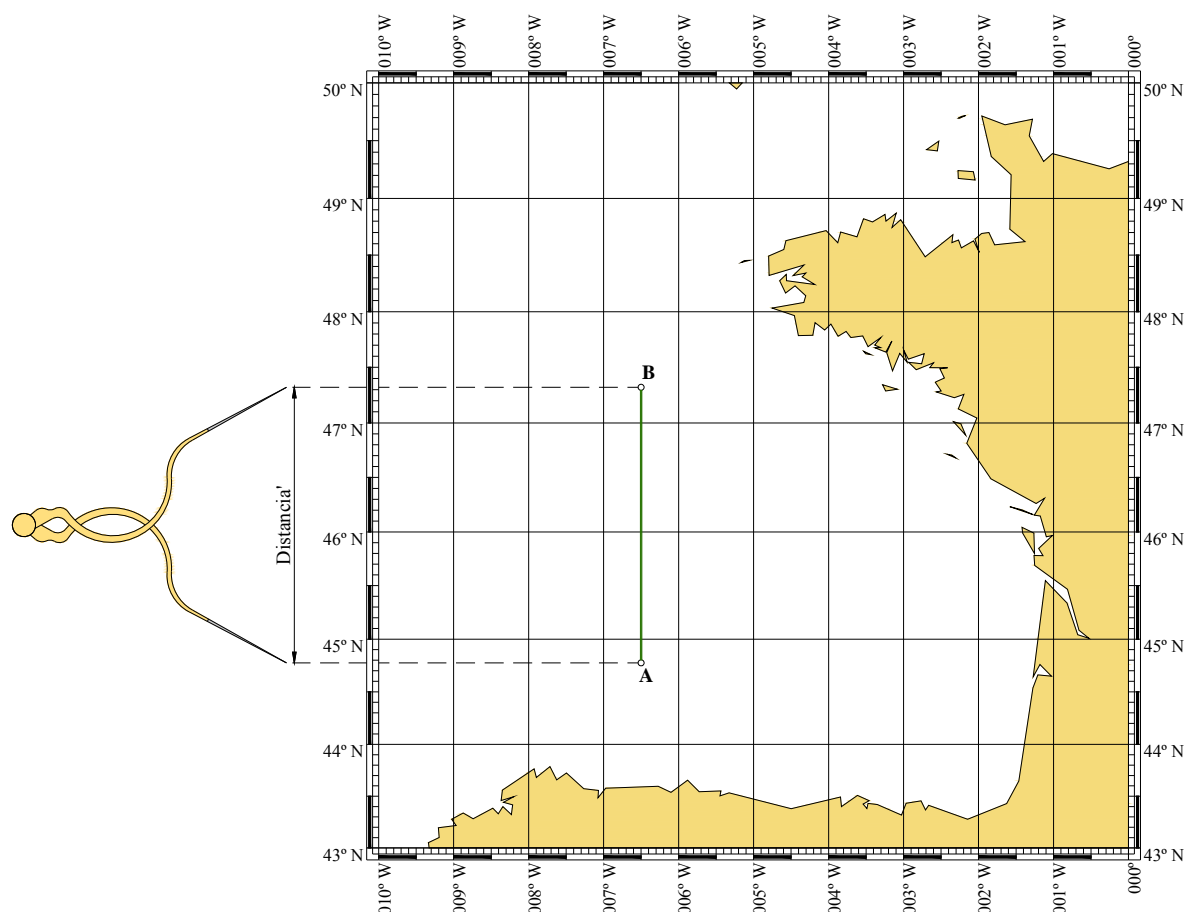


Figura 3.1.2. Medición de la distancia cuando la derrota loxodrómica sigue la dirección del meridiano.

Si el rumbo de la derrota no es exactamente norte o sur, pero se aproxima en unos pocos grados, se puede abatir el segmento de derrota a medir sobre un meridiano y medir la distancia de la forma descrita sin que ello introduzca un error apreciable.

Si la derrota coincide con la dirección de un paralelo, es decir, el rumbo es este u oeste, la distancia entre el punto de salida y llegada coincidirá con su apartamiento, término empleado en navegación para referirse al arco de paralelo entre dos meridianos, y cuya relación con el arco de Ecuador correspondiente puede verse gráficamente en la siguiente figura para una superficie de referencia esférica de radio unitario:

²³¹ Figueroa, Fernando: *Apuntes de cartografía aplicados a la navegación aérea*, Editorial Aeronáutica SUMAAS, Madrid, 1977. P. 62.

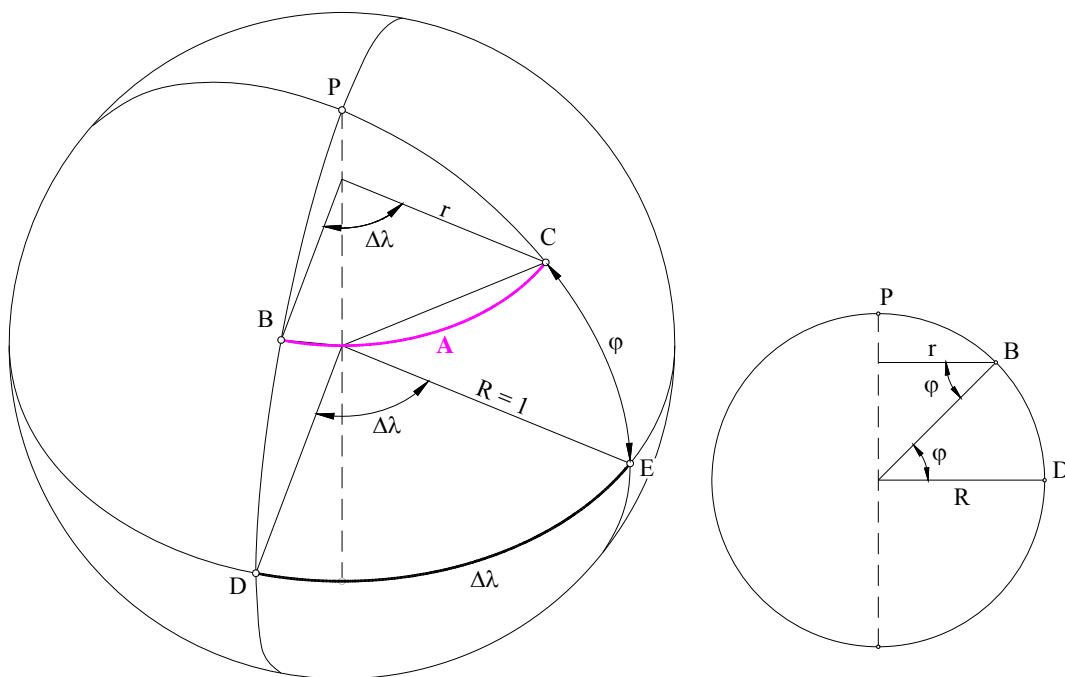


Figura 3.1.3. Navegación por paralelo.

En la figura anterior se comprueba como en una derrota por paralelo entre los puntos B y C, la distancia navegada equivale al arco de meridiano entre ambos. De igual modo, resulta inmediata la relación geométrica entre dicho arco y el arco de Ecuador comprendido entre los meridianos de B y C. Así, la distancia en millas será igual al número de minutos de diferencia de longitud geográfica multiplicada por el coseno de la latitud²³²:

$$\text{Distancia} = A = \Delta\lambda \cos \phi$$

Esta medición puede hacerse directamente de forma gráfica sobre la carta:

²³² Ministry of Defence: *Admiralty Manual of Navigation. Volume I*, Her Majesty's Stationery Office, London, Revised edition 1987. Pp. 23 y 24.

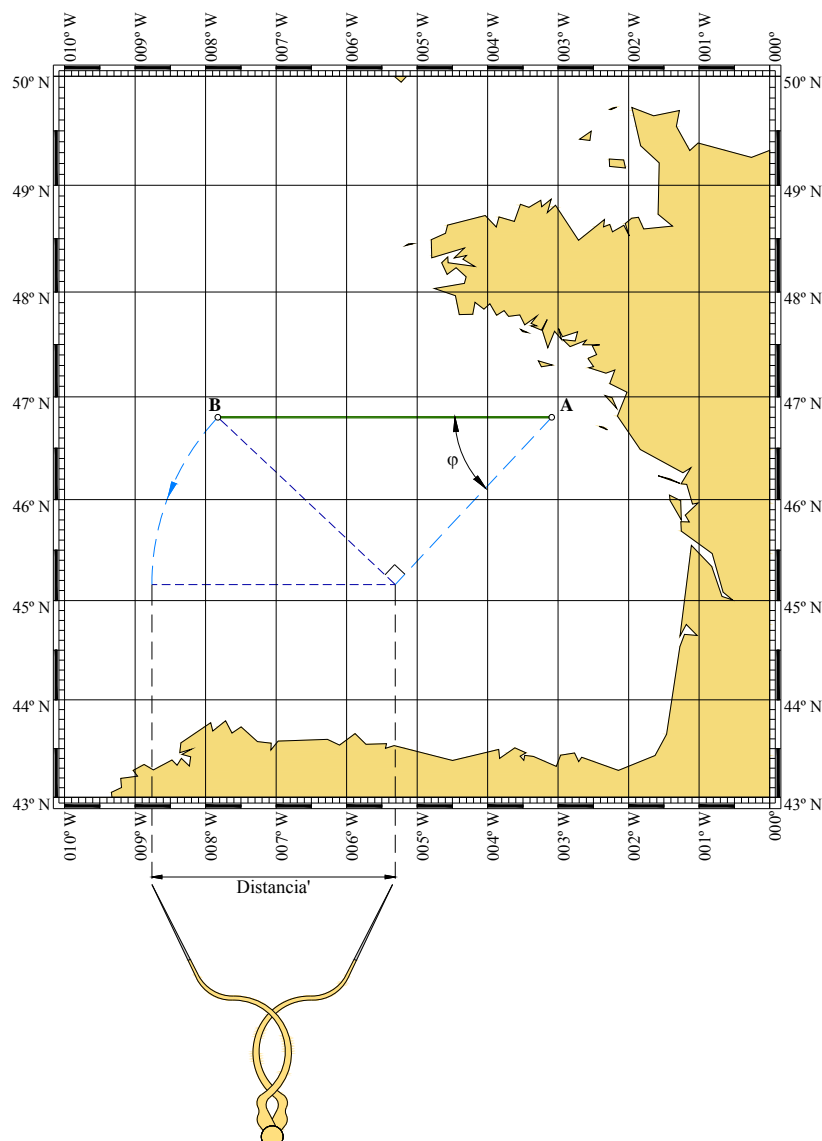


Figura 3.1.4. Medición de la distancia cuando la derrota loxodrómica sigue la dirección del paralelo.

En la figura anterior puede verse como la distancia medida en la escala ecuatorial (escala de longitudes) corresponde al segmento AP, cumpliéndose de este modo con lo expuesto anteriormente:

$$AP = AB \cos \varphi$$

También en este caso cuando la línea de rumbo no coincide exactamente con la dirección de un paralelo pero se le aproxima, bastará con abatir el segmento de derrota a medir hasta hacerlo coincidir con el paralelo medio y medir su distancia de la forma descrita.

Cuando la derrota loxodrómica se separa sensiblemente de la dirección de los paralelos o meridianos, para medir su distancia, deberá reducirse ésta a la escala ecuatorial de la carta, de modo que pueda medirse directamente sobre ella. La construcción geométrica de ésta operación sobre una carta de Mercator puede verse en la siguiente figura.



- Se lleva sobre el meridiano de A la diferencia de latitud entre A y B referida al Ecuador, es decir, tomada sobre la escala de longitudes (se mide la diferencia en la escala de latitudes y se toma este valor en la de longitudes), obteniendo con ello el punto C'.
- Se traza una paralela al Ecuador desde el punto C' obteniéndose el punto B' sobre la derrota. De este modo la derrota a medir se ve reducida en proporción a la escala de longitudes.
- La magnitud AB' medida sobre la escala ecuatorial (en minutos) se corresponderá a la distancia buscada (en millas).

²³³ Figueroa, Fernando: *Apuntes de cartografía aplicados a la navegación aérea*, Editorial Aeronáutica SUMAAS, Madrid, 1977. P. 64.

El procedimiento geométrico descrito se comprueba mediante la relación:

$$\frac{\text{escala local de latitudes}}{\text{escala ecuatorial}} = \frac{AC}{AC'} = \frac{AB}{AB'}$$

No obstante lo explicado hasta aquí referente a la medición de distancias loxodrómicas sobre la carta de Mercator, y basándose en que la deformación lineal no varía de forma sensible para pequeños cambios de latitud, en derrotas de unas pocas millas de longitud, la medida de distancias podría realizarse de forma directa sobre la escala de latitudes (por ejemplo, girando la derrota por su punto medio hasta situarla paralela a un meridiano), sin que ello introduzca un error apreciable.

3.1.1.1.3. Medición de rumbos loxodrómicos

Medir la dirección de una línea de rumbo es la operación inversa al método de trazado, pero más sencilla debido a que ya está trazada la derrota y colocado el transportador en el punto indicado según se ha especificado anteriormente, solo quedará leer en la graduación el rumbo que corresponde a la dirección de dicha línea. Para mayor rapidez en la colocación del transportador, cuando la línea, cuya dirección se desea conocer, cruza un meridiano, se colocará sobre él el transportador, coincidiendo el centro con el meridiano y línea de rumbo.

3.1.1.2. La derrota ortodrómica en la carta de Mercator

Para trazar una derrota ortodrómica sobre una carta de Mercator, se tendrá el inconveniente de que sobre esta proyección la derrota quedaría representada por una curva, salvo en los casos particulares de navegación por meridiano y por paralelo, siendo por lo tanto de difícil trazado con material de dibujo sencillo.

En la siguiente puede verse la representación de una ortodrómica sobre una proyección de mercator:

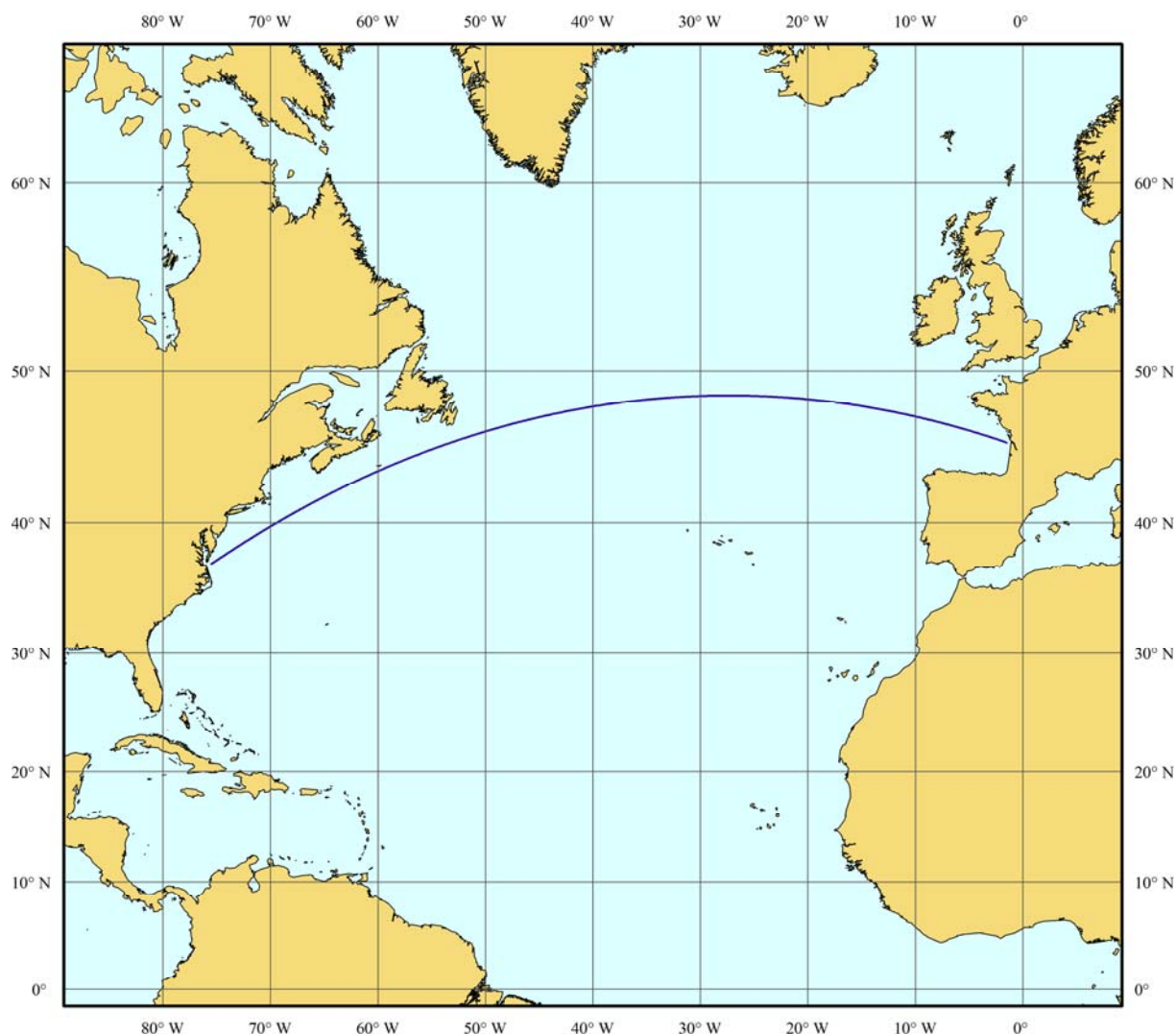


Figura 3.1.6. Trazado de un rumbo ortodrómico entre los puertos de Norfolk y Burdeos sobre una carta de Mercator

3.1.1.3. La derrota ortodrómica en la carta gnomónica

En el caso de querer representar una derrota ortodrómica de forma sencilla sobre una carta de navegación, la decisión podría pasar a recurrir a una proyección gnomónica, donde se representará como una línea recta. Si bien, este tipo de cartas no sería útil para gestionar el control de la navegación, si podría emplearse para la obtención de variables y de las coordenadas de puntos pertenecientes a la derrota, para luego su traslado a otro tipo de proyecciones.

3.1.1.3.1. Trazado de derrotas ortodrómicas

En la práctica resultará imposible desarrollar derrotas ortodrómicas por la necesidad permanente de ir variando el rumbo en valores muy pequeños, ya que los rumbos loxodrómicos serán instantáneos y resultarán diferentes para dos meridianos por próximos que ellos estén.

Por ello, se buscará una aproximación adecuada, navegando sobre una poligonal inscrita en la ortodrómica constituida por sucesivos arcos de loxodrómica, lo que permitirá resolver el problema de la variación constante del rumbo haciéndolo en su lugar a intervalos más amplios.

En la carta gnomónica se situarán los puntos de salida y de destino por sus coordenadas geográficas y se trazará la recta que los une, la que será la derrota ortodrómica. Se tomarán las coordenadas geográficas de los puntos en que la ortodrómica corta a los meridianos seleccionados, con el intervalo de diferencia de longitud que se desee, teniendo en cuenta que, cuanto menor sea el intervalo, más próximo será la poligonal a la ortodrómica²³⁴.

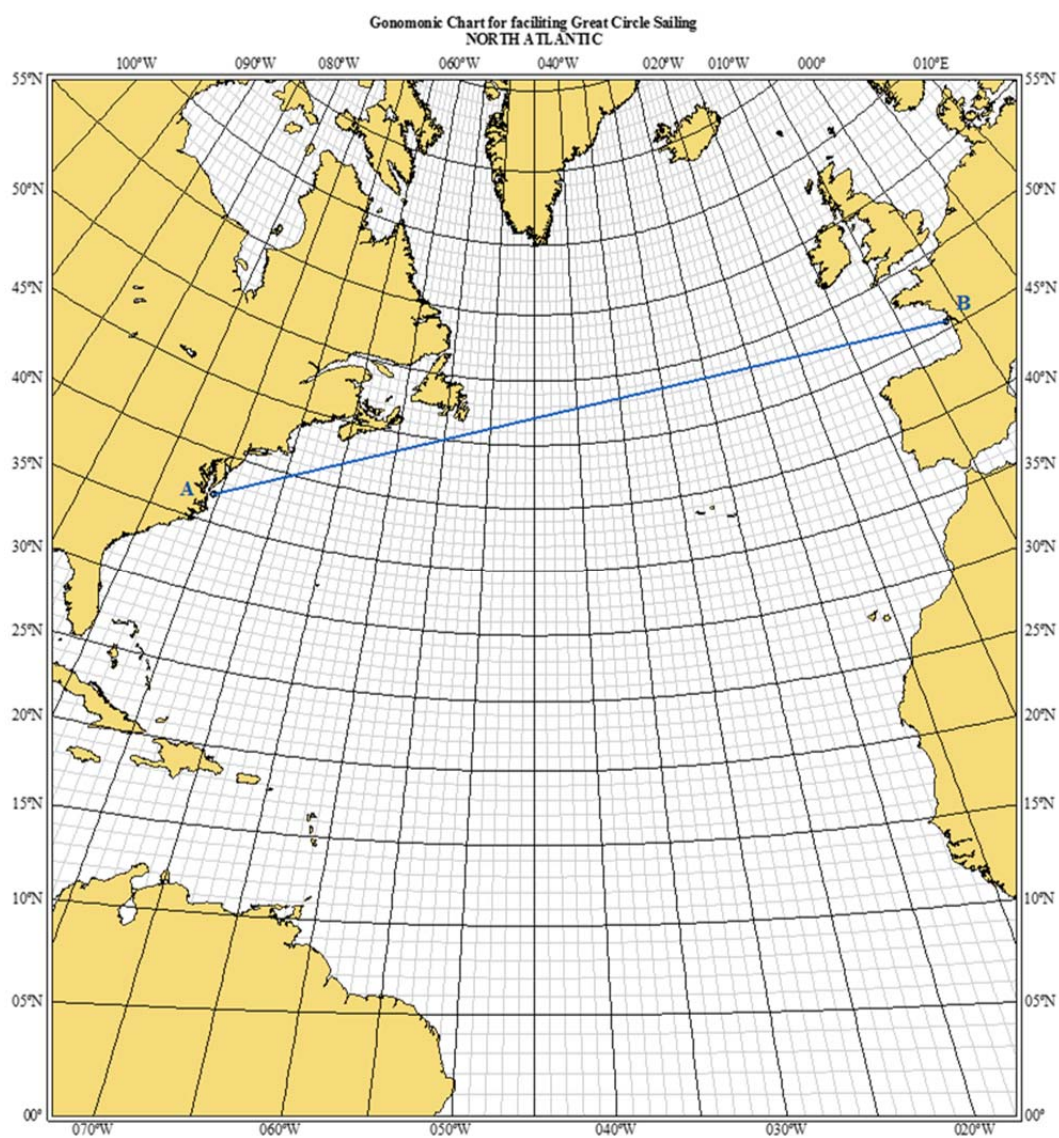


Figura 3.1.7. Trazado de una derrota ortodrómica sobre una carta gnomónica entre los puertos de Norfolk y Burdeos.

Los puntos determinados, salida, destino e intermedios se volcarán sobre una carta de Mercator estarán unidos por segmentos de recta obteniéndose así la derrota aproximada a la ortodrómica que se desarrollará.

²³⁴ Gonzalez Bethencourt: *Navegación*, Escuela Nacional de Náutica de Manuel Belgrano, 3ª edición 1985. P.166.

3.1.1.3.2. Casos particulares en el trazado de derrotas ortodrómicas sobre cartas gnomónicas

En determinados casos puede darse la circunstancia de que uno de los extremos de la ortodrómica quede fuera de los límites de la carta con que se trabaja. En una gnomónica polar la solución vendría dada por el cálculo del radio del paralelo buscado, sin embargo, para los casos horizontal y transversal deberá seguirse un razonamiento geométrico, siendo la metodología similar para ambos supuestos.

- Representación de la derrota ortodrómica sobre cartas gnomónicas horizontales y transversas cuando la longitud del punto de salida o llegada no está contenida en la carta

En este caso la solución pasa por aplicar una corrección a las longitudes de los puntos de salida y llegada, de forma que ambos se sitúen dentro de los límites de la carta, es decir, desplazar ambos puntos, pero manteniendo sus latitudes y la diferencia de longitud entre ambos²³⁵. El efecto producido con ello sería similar, al que ocurriría si se variara la longitud del centro de la proyección.

- Representación de la derrota ortodrómica sobre cartas gnomónicas horizontales y transversas cuando la latitud del punto de salida o llegada no está contenida en la carta

Este problema suele darse cuando la carta comprende un solo hemisferio y la derrota entre los puntos de salida y llegada cruza el Ecuador. La metodología a seguir se recoge en la figura 3.1.8.

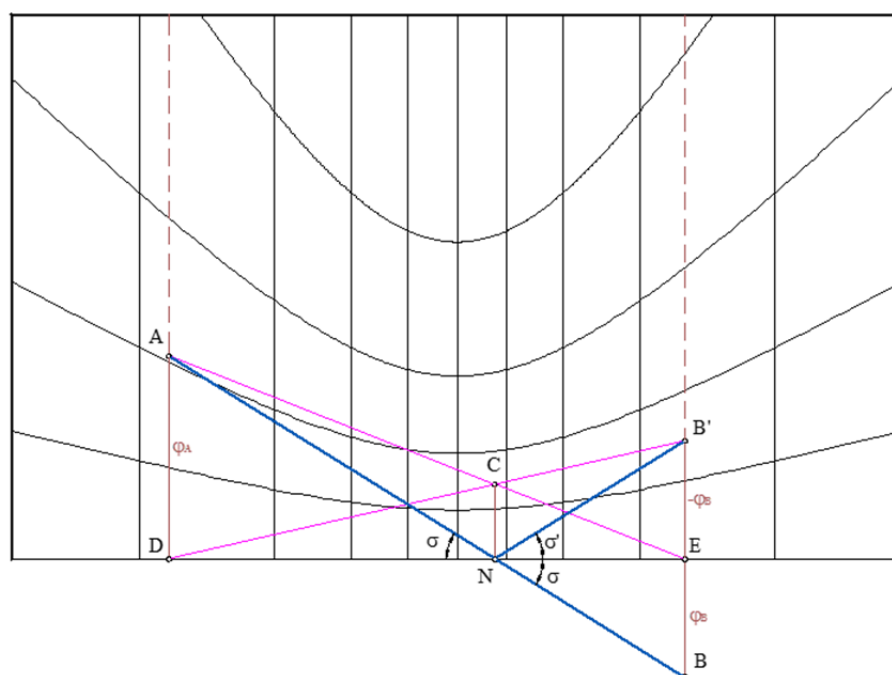


Figura 3.1.8. Representación de una derrota ortodrómica en proyección gnomónica transversal, cuando la latitud de uno de sus extremos no está contenida en la carta.

Suponiendo la ortodrómica representada en la figura anterior entre los puntos A y B, tal que uno de sus extremos, el B en este caso, se encuentre en el hemisferio opuesto al representado, la

²³⁵ Moreu Curbera; Martínez Jiménez: *Astronomía y Navegación. Tomo II*, Artes Gráficas Galicia – Librería San José, Vigo 1975. Pp. 261 y 262.

solución pasará por situar un punto B' sobre el mismo meridiano que B y con la misma latitud que éste pero de signo opuesto. El siguiente paso será representar el nodo N de la derrota, cuyo meridiano pasará por la intersección de las rectas que unen los puntos A con E (corte del meridiano de B con el Ecuador) y B' con D (corte del meridiano de A con el Ecuador)²³⁶, ya que tanto los triángulos ADC y CEB' serán semejantes y, por ende, también lo serán ADN y NEB' . De este modo, la ortodrómica ANB es sustituida por la suma de AN y NB' .

Este mismo caso puede presentarse en una carta gnomónica horizontal, solucionándose de igual manera que la descrita para la transversa, tal y como se muestra en la figura 3.1.9.

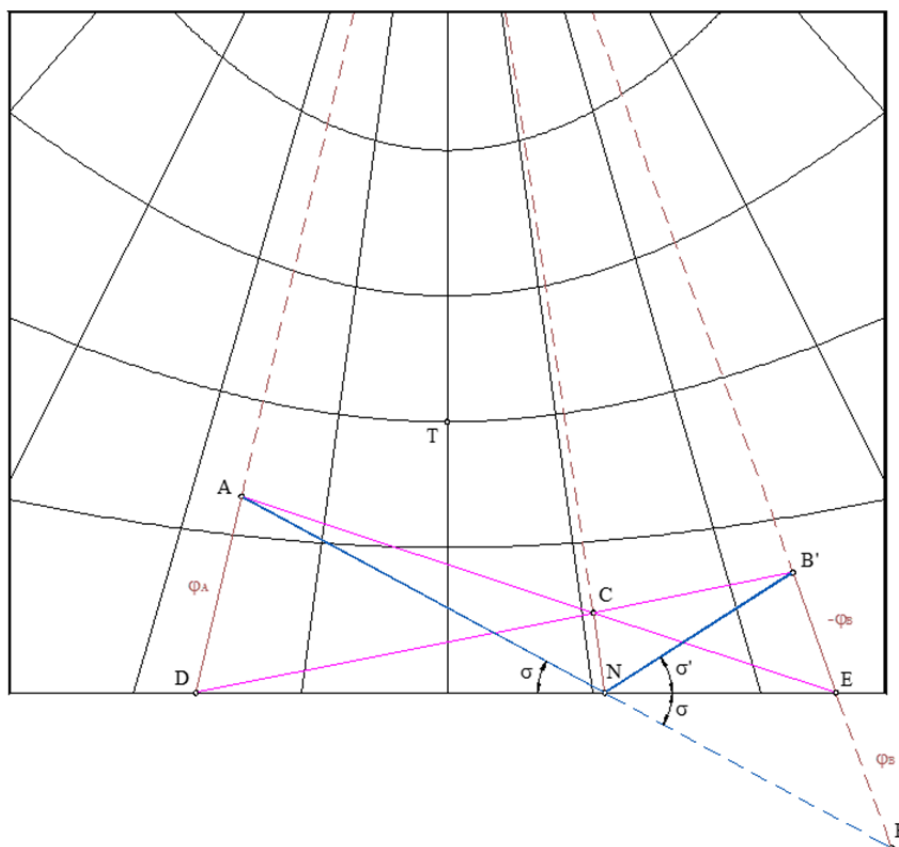


Figura 3.1.9. Representación de una derrota ortodrómica en proyección gnomónica horizontal, cuando la latitud de uno de sus extremos no está contenida en la carta.

3.1.1.3.3. Medición de distancias ortodrómicas

Las cartas de navegación realizadas en esta proyección suelen acompañarse de varios nomogramas y construcciones auxiliares para el cálculo de rumbos y distancias. A continuación se detallará la construcción y uso de algunos de ellos para la medición de distancias.

²³⁶ Capasso, Ideale; Fede, Sergio: *Navigazione. Volume Primo*, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 7ª edizione 1981. Pp. 254 y 255.

- Medición de distancias por diferencia en latitud en cartas gnomónicas horizontales

En el estudio de las deformaciones en los sistemas gnomónicos, se estableció que la deformación lineal es función de la distancia al centro de la proyección (ϕ) y del acimut sobre la superficie de referencia (α), es decir, la deformación lineal será la misma para todos los puntos que equidisten del centro de la proyección, considerando la misma dirección en cada uno de ellos.

Basándose en la propiedad enunciada, si se llevara a coincidir la transformada de un arco de círculo máximo sobre uno de los meridianos de la carta, de forma que la distancia de todos sus puntos al centro de la proyección se mantenga (respecto a su posición original), la distancia ortodrómica de dicho arco (en millas) coincidirá con la diferencia de latitud entre sus extremos (en minutos), ya que la deformación será la misma para el arco de ortodrómica a medir que para el meridiano sobre el que se sitúe.

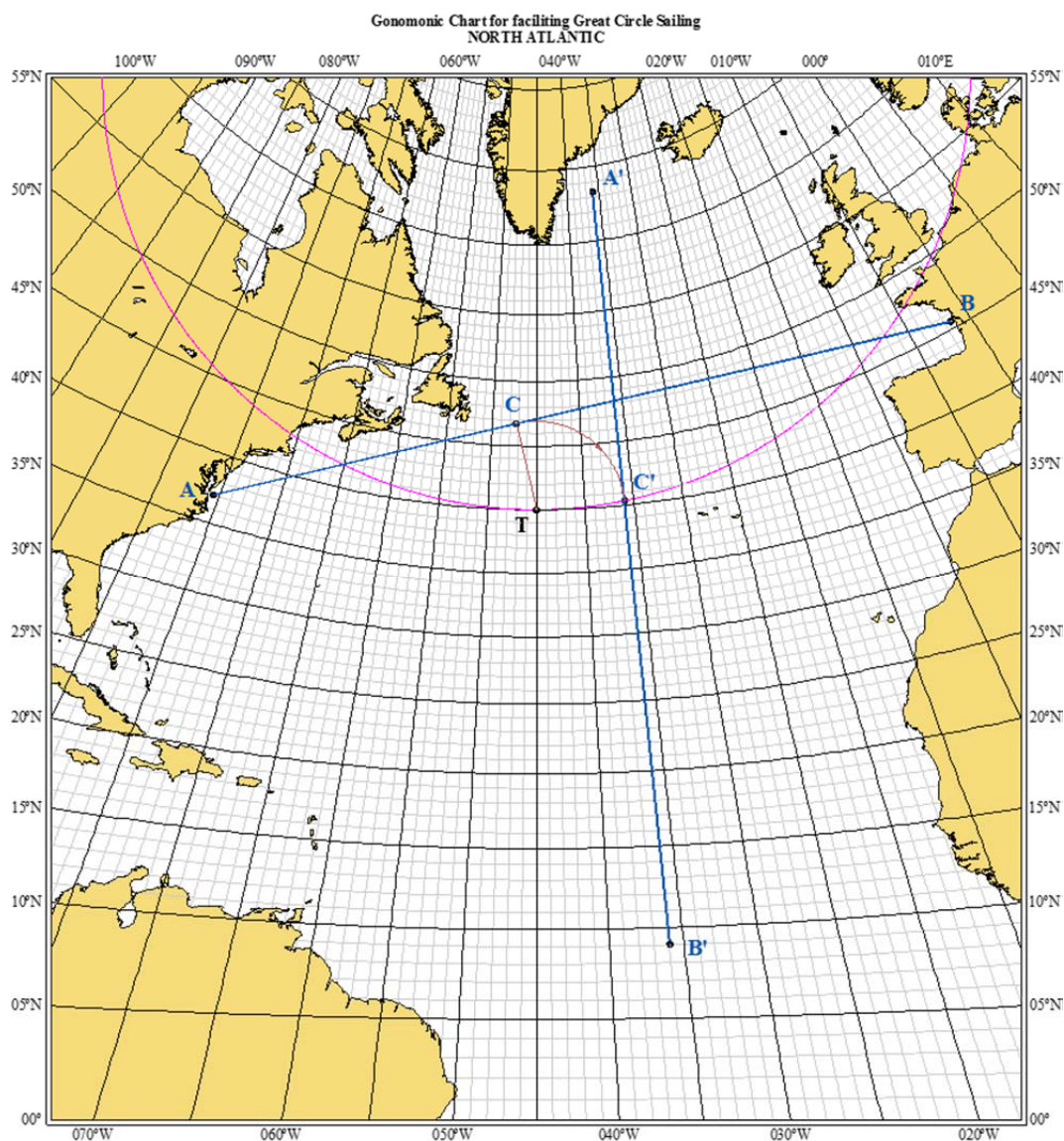


Figura 3.1.10. Medición de la distancia ortodrómica por diferencia de latitudes entre los puertos de Norfolk (A: $\phi = 37^{\circ}\text{N}$, $\lambda = 075,5^{\circ}\text{W}$) y Burdeos (B: $\phi = 45,5^{\circ}\text{N}$, $\lambda = 001,5^{\circ}\text{W}$) en una proyección gnomónica horizontal.

Para exponer la metodología de este caso, seguida en la figura 3.1.10, considérese un arco de ortodrómica representado por un segmento AB sobre una carta gnomónica horizontal de centro en un punto T. Si se traza la perpendicular a dicho segmento desde T, de modo que se interseque en el punto C con el segmento o su prolongación, y se hace girar la ortodrómica AB alrededor de T con radio TC, las distancias desde T a todos los puntos del segmento se mantendrán constantes. Así, girando el segmento hasta una posición A'B', coincidente con la dirección de un meridiano, se obtendrá directamente la distancia ortodrómica AB por la medición de la diferencia de latitud entre A' y B'²³⁷.

Para poder situar la representada de la ortodrómica sobre la dirección de un meridiano debe recurrirse al trazado previo (algunas de estas cartas ya lo traen impreso) del arco de círculo correspondiente al lugar de los pies de las perpendiculares trazadas desde el centro de la proyección T, a los meridianos del mapa²³⁸. La intersección de éste con la circunferencia de radio TC, permite situar el punto C', y con él el segmento A'B' de forma perpendicular a TC'²³⁹. En virtud del espacio disponible sobre la carta, una vez situado el punto C' (habrá dos posibles situaciones para él, simétricas respecto al meridiano central) será indiferente llevar las magnitudes CA y CB hacia el polo o el Ecuador, y en caso de llevar ambas hacia el mismo sentido, la distancia ortodrómica será igual a la suma de las diferencias de latitud entre cada uno de los dos extremos del segmento y la latitud de C'. En el caso expuesto en la figura 3.1.10, el punto C se sitúa sobre el segmento a medir, sin embargo, en caso de que dicho punto se encontrara sobre su prolongación, la metodología no variaría en absoluto.

- Medición de distancias por diferencia en latitud en cartas gnomónicas transversas

El procedimiento anterior se simplifica considerablemente para la gnomónica transversa, ya que en este caso para situar la representada del arco de ortodrómica cuya distancia se desea medir sobre la dirección de un meridiano, bastará con girarla, de la forma descrita para el supuesto horizontal, hasta situarla perpendicularmente a la transformada del Ecuador. Este razonamiento se verifica al considerar que el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares desde el centro de la proyección coincide con la transformada del Ecuador, siendo todos los meridianos ortogonales a ésta.

Una vez situada la derrota en la posición descrita, la distancia ortodrómica corresponderá a la diferencia de latitud entre sus extremos.

En la figura 3.1.11 puede verse la medición de la distancia ortodrómica por diferencia de latitudes entre los puertos de Rio de Janeiro (A: $\phi = 23^{\circ}\text{S}$, $\lambda = 043^{\circ}\text{W}$) y Luanda (B: $\phi = 09^{\circ}\text{S}$, $\lambda = 013^{\circ}\text{E}$), sobre una carta gnomónica transversa. En este caso la distancia en millas corresponderá a la diferencia de latitud entre los puntos A' y B' en minutos.

²³⁷ Pires Miguens, Altineu: *Navegação: A Ciência e a Arte. Volume II, Navegação astronômica e derrotas*, Ministerio da Marinha do Brasil, Diretoria de Hidrografia e Navegação, Rio de Janeiro 1999. Pp.1197 y 1198.

²³⁸ El lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde el centro de la proyección T a los meridianos del mapa, se corresponde con una circunferencia de diámetro definido por dicho centro y la representada del polo, ya que en él se cumplirá que para todos sus puntos el ángulo entre los extremos de este diámetro será igual a 90° , verificándose la condición de perpendicularidad respecto a las transformadas de los meridianos.

²³⁹ Figueroa, Fernando: *Apuntes de cartografía aplicados a la navegación aérea*, Editorial Aeronáutica SUMAAS, Madrid 1977. P.56.

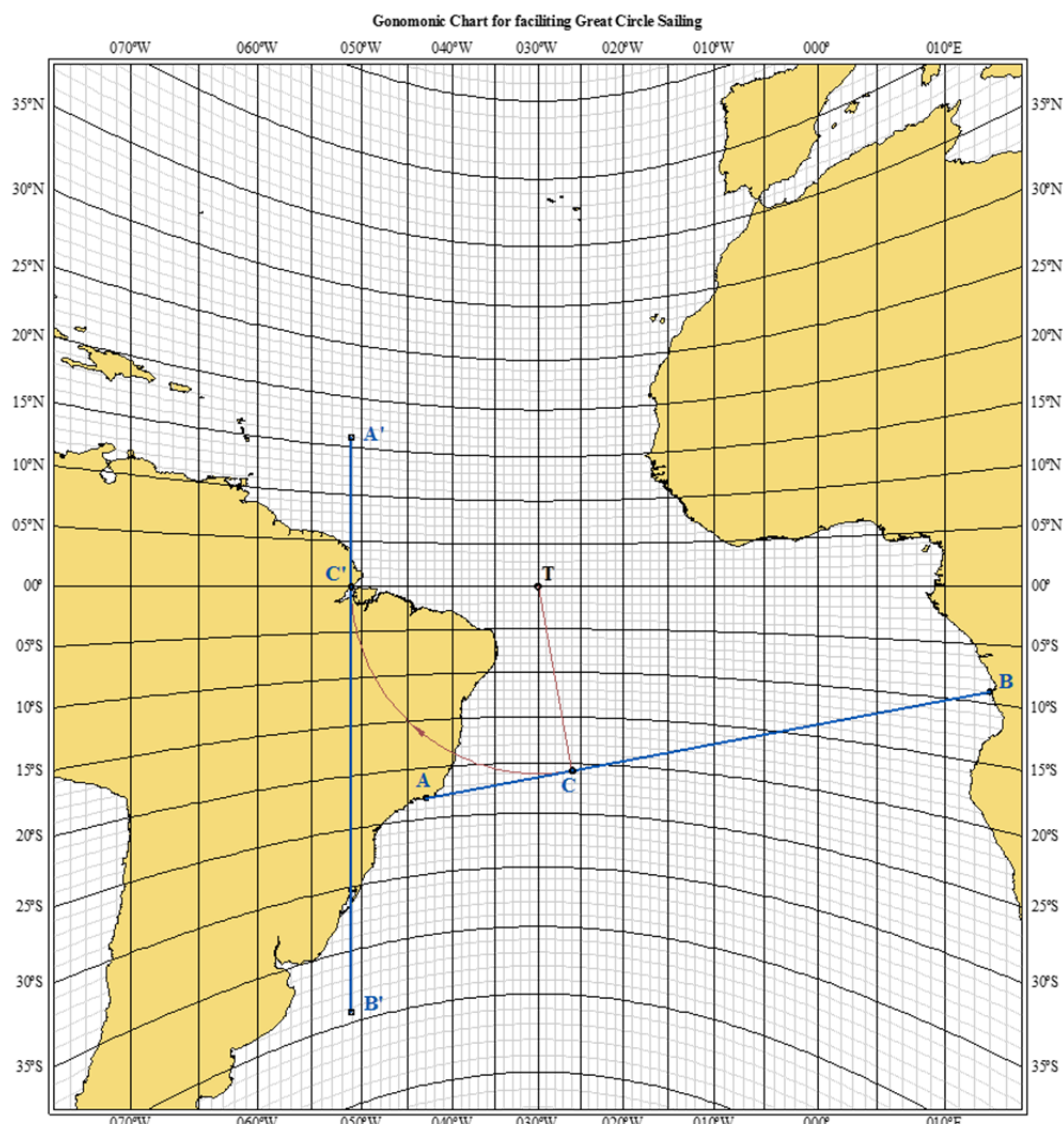


Figura 3.1.11. Medida de la distancia ortodrómica entre los puertos de Rio de Janeiro y Luanda por diferencia de latitudes.

- Medición de distancias por diferencia en longitud en cartas gnomónicas horizontales

Para la medición de la distancia ortodrómica entre dos puntos A y B con este método, se trazará la perpendicular desde el centro de la proyección T hasta la representada de la derrota (o su prolongación), definiendo con ello un punto C. Este punto se abate, con centro en el de la proyección y radio TC, sobre el meridiano central en dirección opuesta al Ecuador, obteniéndose un nuevo punto C'. Las cartas gnomónicas preparadas para este método traen impresas en los márgenes laterales una o dos (una en cada lado) escalas graduadas²⁴⁰, comprendiendo desde el número de grados de latitud del centro de proyección hasta la máxima latitud del mapa²⁴¹. Sobre una de estas escalas se lleva la latitud del punto C', y se traza desde la posición resultante una paralela a la transformada del Ecuador, línea que se denomina "línea de medida". Situando el segmento a medir AB sobre dicha línea de modo que coincida su punto C con el meridiano central, el número de minutos de longitud entre los extremos A''

²⁴⁰ En ocasiones también suele situarse una de estas escalas sobre el meridiano central de la proyección.

²⁴¹ Figueroa, Fernando: *Apuntes de cartografía aplicados a la navegación aérea*, Editorial Aeronáutica SUMAAS, Madrid 1977. P.56 y 57.

y B'', de la derrota abatida sobre la línea de medida, será la distancia ortodrómica entre A y B expresada en millas²⁴².

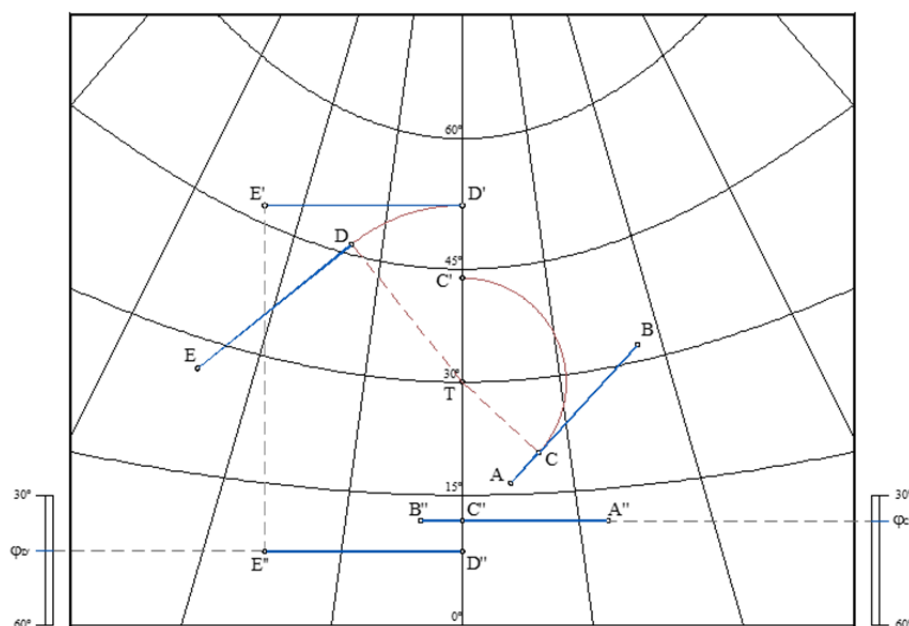


Figura 3.1.12. Medición de la distancia ortodrómica por diferencia de longitudes en una proyección gnomónica horizontal.

La metodología de la medición de distancias ortodrómicas por diferencia de longitudes puede observarse en la figura 3.1.12, no obstante, se hace necesaria una explicación analítica de dicho procedimiento. Para ello considérese sobre una carta gnomónica horizontal una ortodrómica DE, tal que uno de sus extremos (D) coincida con el pie de la perpendicular desde el centro de la proyección T. Girando esta derrota en torno a T con radio TD, hasta una posición ortogonal al meridiano central en la dirección opuesta al Ecuador, se obtiene el segmento D'E', tal y como se representa en la figura 3.1.12.

Puede parecer que la ortodrómica DE sea un caso muy particular, sin embargo, cualquier otro supuesto podrá reducirse a éste. Por ejemplo, la derrota AB de la figura 3.1.12 podría considerarse como la suma de dos tramos de ortodrómica AC y CB, ambos con un extremo coincidente con el pie de sus perpendiculares a T. E incluso si dicho pie fuera externo al segmento, la ortodrómica podría tomarse como la diferencia entre los tramos de ortodrómica definidos por los extremos de la derrota original y el pie de la perpendicular mencionada.

- Medición de distancias en cartas gnomónicas polares

En algunas cartas gnomónicas polares la medida de distancias ortodrómicas se ve facilitada por la inclusión de una serie de hipérbolas graduadas (en kilómetros o millas), y que no son más que la proyección sobre la carta de una serie de círculos menores de la esfera cuyos planos son paralelos al del meridiano considerado como central, y separados de modo equidistante respecto a la longitud del arco de meridiano cuyo plano sea perpendicular a estos. En la figura 3.1.12 puede verse la medición de

²⁴² Pires Miguens, Altineu: *Navegação: A Ciência e a Arte. Volume II, Navegação astronômica e derrotas*, Ministerio da Marinha do Brasil, Diretoria de Hidrografia e Navegação, Rio de Janeiro 1999. P. 1198.

la distancia ortodrómica entre Strait of Belle Isle (A: $\phi = 52^{\circ}\text{N}$, $\lambda = 055^{\circ}\text{W}$) y Inishtrahull Sound (B: $\phi = 55,5^{\circ}\text{N}$, $\lambda = 007,5^{\circ}\text{W}$), sobre una carta gnomónica polar, donde se incluyen las hipérbolas correspondientes a distancias de 500 en 500 millas.

Gonometric Chart for facilitating Great Circle Sailing

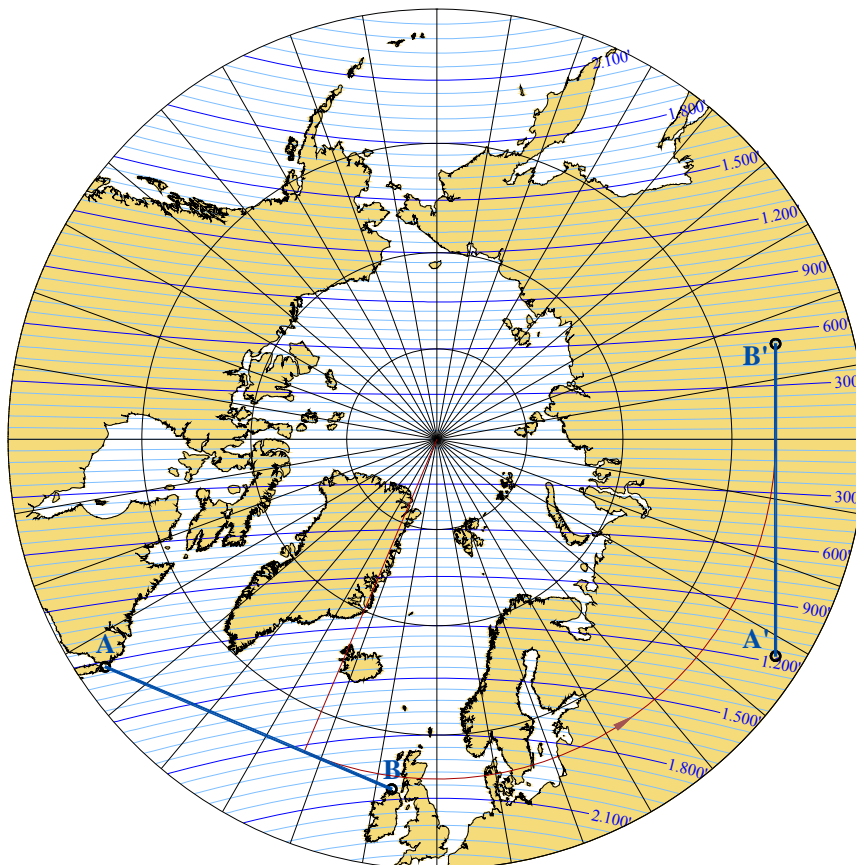


Figura 3.1.13. Medida de la distancia ortodrómica entre Strait of Belle Isle y Inishtrahull sobre una carta gnomónica polar.

El empleo de estas hipérbolas de distancias constantes es sencillo, basta con girar la traza de la derrota a medir de forma semejante a como se ha hecho en los procedimientos anteriores (esto es, trazando una perpendicular a la derrota desde el polo), y situarla de forma paralela al eje de las hipérbolas (meridiano central), tal y como se representa en la figura 3.1.13 respecto a la derrota AB. Hecho esto no habrá más que sumar los valores de las hipérbolas correspondientes a los extremos de la derrota abatida, si es que ambos quedan en lados opuestos del meridiano perpendicular al central, de no ser así, los valores indicados en las hipérbolas correspondientes deberán restarse²⁴³ (en el caso representado en la figura 3.1.13, la distancia entre A y B sería de 3.500 millas).

El principal problema que presenta este tipo de construcción auxiliar radica en que tan solo en casos muy puntuales los extremos de la derrota abatida coincidirán con dos hipérbolas de las trazadas en la carta (como es el caso ejemplificado en la figura 3.1.13), y de no ser así el valor de distancia debería interpolarse, lo que hace que se pierda en exactitud.

²⁴³ Figueroa, Fernando: *Apuntes de cartografía aplicados a la navegación aérea*, Editorial Aeronáutica SUMAAS, Madrid 1977. Pp. 41 a 43.

Algunas cartas gnomónicas incluyen un ábaco para la medición de distancias de forma geométrica, consistente en un cuadrante graduado de igual radio que la esfera de referencia, en uno de cuyos extremos se incluye una recta tangente representativa del plano del cuadro.

Para su uso se llevaría el vértice de la derrota sobre la línea del ábaco representativa del plano de proyección, y abatiendo a partir de él la derrota sobre el plano del dibujo. En la figura 3.1.14 se ilustra este procedimiento para la derrota AB trazada en la figura 3.1.13. En primer lugar se determina la latitud del vértice C de la ortodrómica (pie de la perpendicular a la derrota AB por el centro de la proyección T), y se lleva sobre el cuadrante del ábaco, de modo que la prolongación de ésta (desde el centro del cuadrante V, representativo del vértice de la proyección) sobre la línea representativa del plano del cuadro determine el punto C', transformada del vértice C sobre el ábaco, cumpliéndose que la distancia TP en la carta sea igual a la PC', en el ábaco. Desde esta posición habrá que llevar sobre el ábaco las distancias CA y CB de la carta, de forma perpendicular a la línea VC', obteniéndose con ello la derrota abatida sobre el plano del gráfico A'B', y siendo la distancia buscada el valor del ángulo entre los segmentos VA' y VB'.²⁴⁴

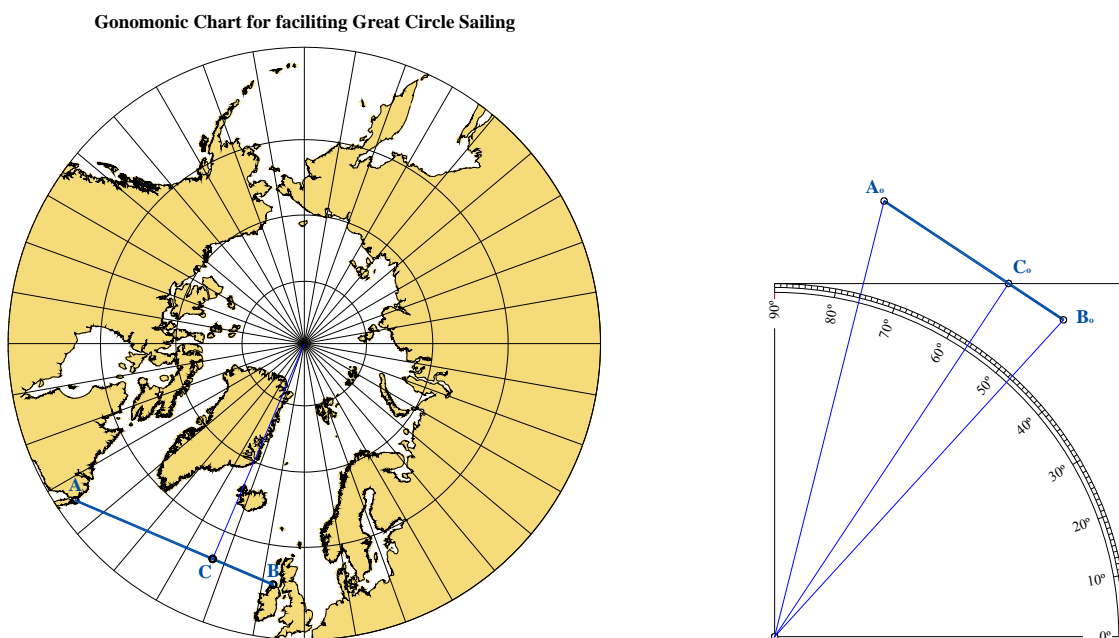


Figura 3.1.14. Medida de la distancia ortodrómica entre Strait of Belle Isle y Inishtrahull sobre una carta gnomónica polar (método del ábaco).

3.1.1.3.4. Medición de rumbos ortodrómicos

La mayoría de cartas gnomónicas para navegación por círculo máximo incluyen un diagrama destinado a la medición de rumbos. Éstos se componen de una rosa graduada de 0° a 360°, en cuyo diámetro definido por los valores de 0° y 180° se sitúa el eje del diagrama, y a cuyos lados se encuentran dos curvas simétricas respecto al eje. Tanto el eje, como ambas curvas, se encuentran graduados de 0° hasta la latitud máxima abarcada por la carta.²⁴⁵

²⁴⁴ Fossi Gutierrez, Ignacio: *Tratado de Náutica. Libro II: navegación astronómica y radionavegación*, Editorial Dossat S.A., Madrid 1949. P. 659.

²⁴⁵ Figueroa, Fernando: *Apuntes de cartografía aplicados a la navegación aérea*, Editorial Aeronáutica SUMAAS, Madrid 1977. Pp. 57 y 58.

Para determinar con ayuda de uno de estos diagramas el rumbo en un punto A de una derrota ortodrómica, se debe obtener en primer lugar un punto A₁ tal que diste de A una diferencia de longitud correspondiente a aquella para la cual está construido el diagrama, valor que suele ser de 20° ($\Delta\lambda = 20^\circ$). Posteriormente se lleva sobre la escala de la línea central del diagrama el valor de la latitud del punto A₁, y sobre una de las ramas laterales el valor de la latitud del punto donde se desea conocer el rumbo, con la particularidad de que si se navega en dirección leste, la latitud de A se llevará sobre la curva de la izquierda, y si se navega con dirección oeste, sobre la de la derecha. Por último se unen los valores de ambas escalas mediante una línea recta, que se traslada paralelamente hasta hacer coincidir su extremo correspondiente a la rama lateral del diagrama con el centro de la rosa, leyéndose el rumbo buscado sobre su graduación²⁴⁶. La metodología descrita puede verse en la figura 3.1.15, donde en el diagrama del lado derecho se calcula el rumbo de Norfolk (A), de la ortodrómica representada a la izquierda.

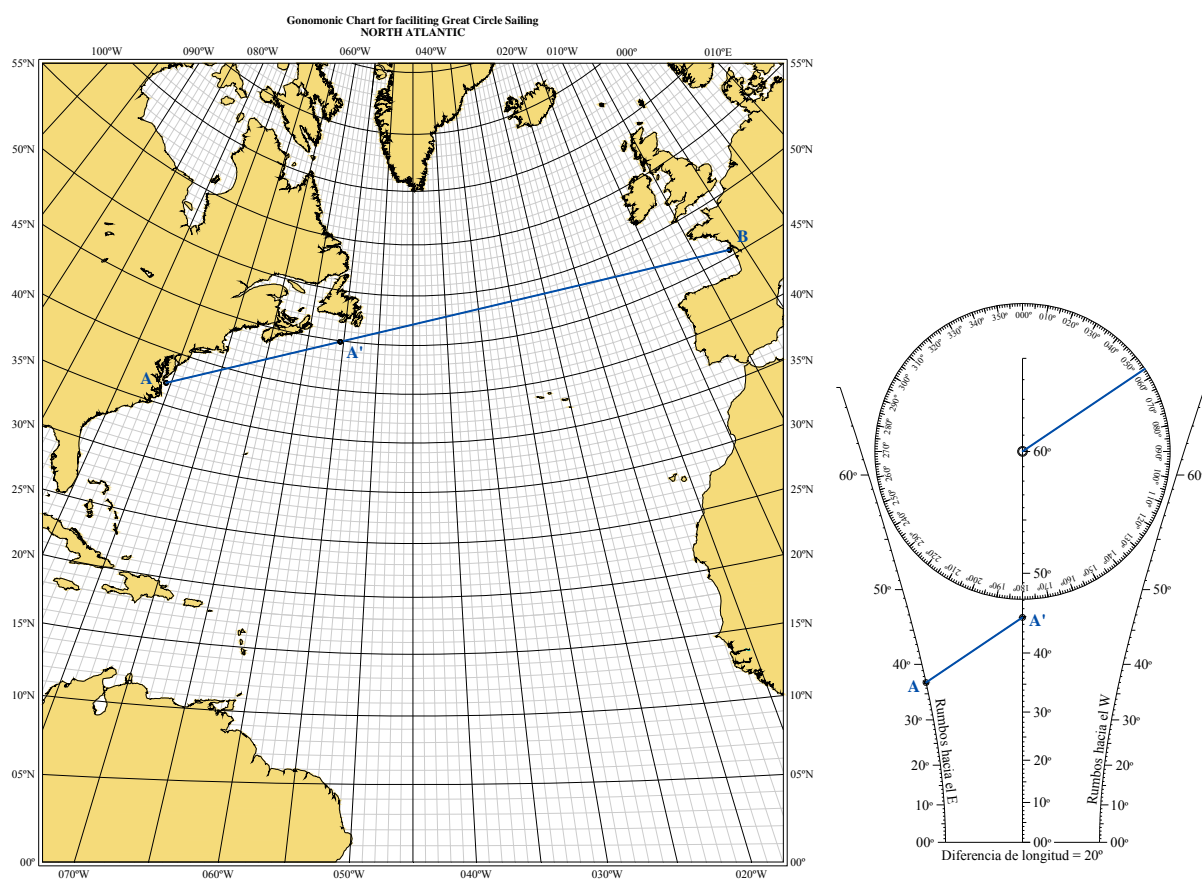


Figura 3.1.15. Determinación del rumbo inicial de la ortodrómica entre Norfolk y Burdeos con ayuda de un diagrama auxiliar en una proyección gnomónica

²⁴⁶ Moreu Curbera; Martínez Jiménez: *Astronomía y Navegación. Tomo II*, Artes Gráficas Galicia – Librería San José, Vigo 1975. Pp. 258 y 259.

3.1.1.4. La derrota ortodrómica en la proyección estereográfica

El hecho de que todo círculo máximo de la esfera se transforme sobre una proyección estereográfica en una circunferencia (a excepción de aquellos círculos máximos que pasen por el centro de la proyección que se proyectarán según líneas rectas), unido a la condición de conformidad de este sistema proyectivo y a su origen geométrico, hace que la proyección estereográfica permita una determinación gráfica rápida y de considerable precisión (evidentemente la precisión vendrá limitada por la escala y el soporte empleado) de las constantes y rumbos de las derrota ortodrómica.

Para el trazado de la derrota ortodrómica en cartas estereográficas de papel se tendría el inconveniente de que se necesitaría un compás muy grande, y además, si el centro de la derrota no cuadra dentro de la carta (figura 3.1.16), el procedimiento resultaría muy engorroso. Todo lo contrario sucedería si se emplea un programa de CAD, o de dibujo vectorial, donde la resolución gráfica del problema de la ortodrómica resultaría sencillo y de una exactitud impecable²⁴⁷.

²⁴⁷ López Varela, Pablo; García Fernández, Jose Manuel; Pita Porta, Antonio: “Resolución de las variables de la derrota ortodrómica en las proyecciones perspectivas”, *Revista del Instituto de Navegación de España*, Nº16, pp. 61 a 73, 2002.

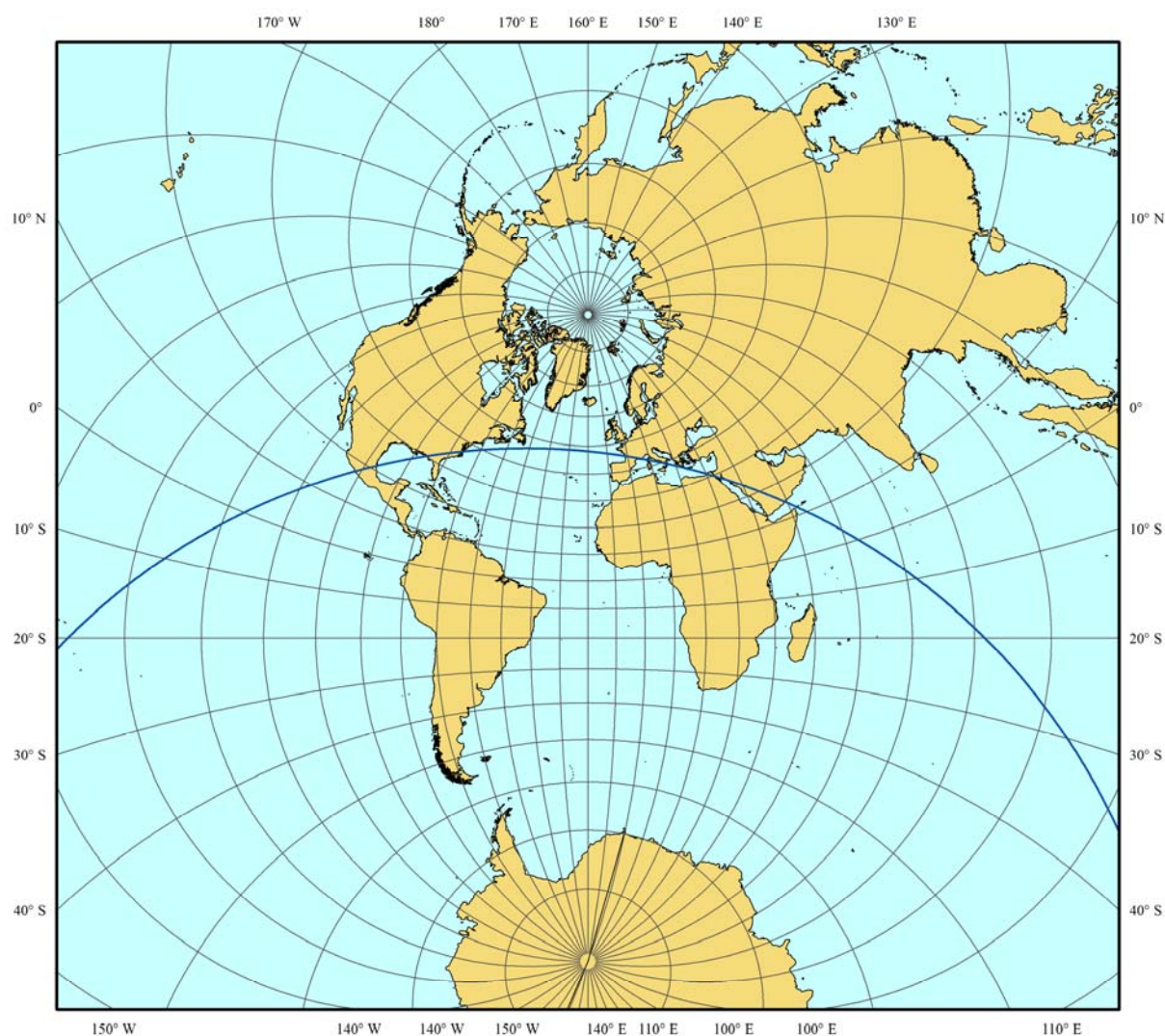


Figura 3.1.16. Representación de una ortodrómica en una proyección estereográfica con centro en: $\phi = 20^{\circ}\text{N}$, $\lambda_0 = 020^{\circ}\text{W}$.

3.1.1.5. La derrota ortodrómica en la proyección cónica conforme de Lambert

La derrota ortodrómica en la proyección cónica conforme de Lambert visualmente se confunde como una línea recta en las proximidades del paralelo estándar, tal y como puede verse en la figura 3.1.17, pero a la hora de trazar la derrota gráficamente en una carta de papel introduciría un error considerable.

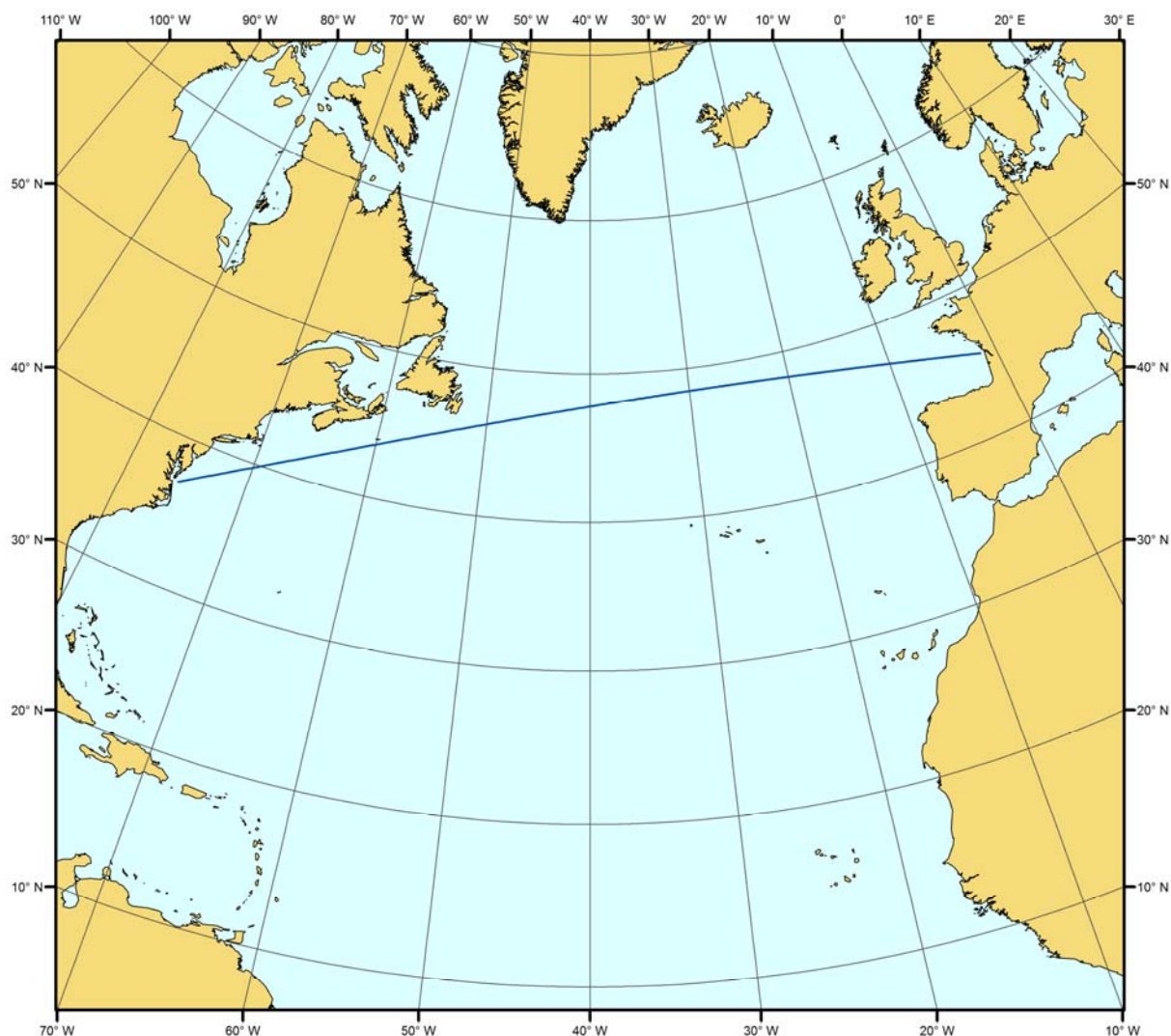


Figura 3.1.17. Trazado de un rumbo ortodrómico entre los puertos de Norfolk y Burdeos sobre una proyección cónica conforme de Lambert.

Actualmente, las cartas en proyección cónica conforme de Lambert²⁴⁸ son las más utilizadas en aeronáutica considerándose, para las zonas representadas en la carta, la línea ortodrómica como una línea recta y siendo las distancias exactas en los paralelos estándar se considerarán razonablemente exactas en el resto de la carta. Son utilizadas en cartas de navegación visual, baja y alta cota etc., por ejemplo en las cartas Jeppesen se escogen según la zona, diferentes paralelos estándar: 45°N y 58°N, 55°N y 65°N, 33°N y 45°N, etc.²⁴⁹.

²⁴⁸ En navegación aérea, las cartas conformen modificadas de Lambert se derivan de la proyección resultante de un cono conceptualmente secante a la Tierra en dos paralelos estándar.

²⁴⁹ Adsuar, Joaquín C.: Navegación Aérea. Conocimientos teóricos para la licencia del piloto privado, Editorial Paraninfo, Madrid, 3ª edición 2009. P. 50.

3.1.2. Seguimiento de la derrota y trazado de la posición geográfica del buque.

Realizar el seguimiento de la derrota trazada y obtener sobre la carta la posición geográfica del buque, obtenida por corte de líneas de posición o llevando directamente las posiciones geográficas obtenidas de algún sistema de posicionamiento, implicará necesariamente el empleo de escalas mayores.

En este caso, ya que será necesario tener la representación de la derrota sobre la carta para poder referenciar sobre ella la posición del buque, también aquí sería preciso, que tanto ortodrómica como loxodrómica, se representaran como lugares geométricos de fácil trazado manual.

Si se desea ubicar sobre la carta la posición de un buque a partir de sus coordenadas de latitud y longitud obtenidas de algún sistema de posicionamiento, será deseable que, tanto paralelos como meridianos, formen una red ortogonal, donde dichas coordenadas se hagan coincidir con los ejes de abscisas y ordenadas.

A la hora de situarse mediante líneas de posición, interesaría que estas también se representaran por lugares geométricos de fácil trazado. Las líneas de posición a emplear podrán ser de tres tipos: loxodrómicas para rectas de altura de origen astronómico, ortodrómicas para líneas de demora obtenidas en navegación costera, círculos de distancia tomados desde puntos notables. En los dos primeros casos se estaría exigiendo los mismos requisitos que los establecidos de representar loxodrómicas y ortodrómicas como lugares geométricos simples. Respecto a las distancias, sería deseable que pudieran trazarse del modo más sencillo e intuitivo posible, es decir, como circunferencias con centro el punto al cual se mide la distancia. Aquí también sería necesario que la distancia (radio de la circunferencia a trazar) pudiera llevarse sobre la que la escala de distancias varíe en la extensión de la carta de forma homogénea, para que puedan medirse distancias con ayuda de escalas locales o mediante procedimientos geométricos sencillos. Por último, a la hora de trazar las líneas de posición en su dirección real, se debería exigir la conformidad de la carta.

En resumen, para este caso, las características deseables para una carta deberían ser las mismas que las establecidas para el supuesto de trazado de derrotas. Sin embargo, el uso de cartas a escalas grandes, supondrá una ventaja a la hora de no cumplir estos requisitos de forma estricta, ya que se verá que las características de una misma proyección pueden variar de forma sensible al considerar entornos de superficie diferenciales.

Para ejemplificar este hecho se considerará la realización de cartas de navegación a gran escala en proyección gnomónica, la cual ya se ha establecido que presenta grandes deformaciones tanto lineales como angulares. Tradicionalmente la proyección gnomónica ha sido empleada por algunos institutos hidrográficos para la realización de cartas de punto mayor, portulanos y aproches, cubriendo normalmente zonas de entrada y salida de puertos aunque actualmente se vea desplazada por la proyección transversa de Mercator y policónicas²⁵⁰. Este hecho tiene su explicación ya que en navegación costera las demoras y marcaciones a puntos de la costa son en realidad arcos de círculo máximo, y aunque a las pequeñas distancias a las que se trabajan no implicaría un error sensible el uso de cartas de Mercator, donde las demoras se confundirían con tramos de loxodrómicas (líneas rectas), la obtención gráfica de la posición por corte de líneas de posición costera siempre será más exacto en cartas gnomónicas. Además, en éstas últimas, al incluirse el punto de tangencia dentro de su cobertura

²⁵⁰ López Varela, Pablo: Análisis de Idoneidad de las Derrotas empleadas en Navegación Marítima sobre las Proyecciones de Mercator, Gnomónica y Estereográfica. Tesis Doctoral, Departamento de Energía y Propulsión Marina, Universidad de A Coruña, 2005. P. 260.

geográfica y al ser tan pequeña la zona a representar (rara vez superan las 10 millas, 20 a lo sumo), las deformaciones son mínimas, de forma que la carta gnomónica representa fielmente la disposición de las particularidades de la costa.

A pesar de la forma característica que adopta el entramado de meridianos y paralelos en una proyección gnomónica horizontal (aspecto que puede verse en la figura 2.5.34), debe tenerse en cuenta que en estas cartas de extensión tan limitada un observador apreciará que dicho entramado presenta una configuración ortogonal. Así, para una latitud de tangencia de 45° y una $\Delta\lambda = 1^\circ$, el valor de la convergencia de meridianos, se obtiene²⁵¹:

$$\text{tg } \theta = \text{tg } \Delta\lambda \text{ sen } \varphi_0$$

$$\theta = 0^\circ 42' 25.71''$$

Es decir, en el supuesto anterior una carta gnomónica presentará sus meridianos como líneas rectas prácticamente paralelas entre sí.

Para el estudio de las deformaciones angulares que sufren este tipo de cartas puede observarse la expresión (2.5.114) referida a la variación que sufre el ángulo α , uno de cuyos lados se corresponde a un círculo máximo que pasa por el centro de la proyección, en función de la distancia angular ϕ medida desde el punto de tangencia al vértice de dicho ángulo:

$$\text{tg } \alpha' = \text{tg } \alpha \cos \phi$$

Si se midiera un ángulo sobre la carta²⁵² cuyo vértice estuviera situado a una distancia de 60 millas desde centro de la proyección²⁵³, se observa que el valor del coseno en la expresión anterior sería prácticamente igual a la unidad, en concreto:

$$\cos 1^\circ = 0,9998$$

Por lo tanto, el valor del ángulo medido sobre la carta tendería a confundirse con su valor real. Tomando como ejemplo un ángulo de 45° , se comprueba en (2.5.114)²⁵⁴:

$$\alpha' = \arctg(\text{tg } 45^\circ \cos 1^\circ)$$

$$\alpha' = 44^\circ 59' 44.29''$$

Con lo cual, la diferencia entre ambos ángulos, el real y el medido sobre la carta, no llegaría a los 16 segundos de arco, valor que teniendo en cuenta la precisión de los instrumentos empleados a bordo para trabajar con las cartas se vuelve despreciable, por lo que este tipo de representaciones podrían considerarse conformes a efectos prácticos.

La “cuasiconformidad” de una representación gnomónica de tan gran escala queda patente en el momento de determinar los semiejes de la elipse indicatriz de Tissot (2.5.127 y 2.5.128). Dichos semiejes para un punto distanciado 60 millas del de tangencia serán:

²⁵¹ López Varela, Pablo: Análisis de Idoneidad de las Derrotas empleadas en Navegación Marítima sobre las Proyecciones de Mercator, Gnomónica y Estereográfica. Tesis Doctoral, Departamento de Energía y Propulsión Marina, Universidad de A Coruña, 2005. P. 244.

²⁵² Se entiende que un ángulo del tipo referido, es decir, que cumpla que uno de sus lados sea un arco de círculo máximo que contenga al punto de tangencia.

²⁵³ Valor que nunca se llegaría a alcanzar en la práctica, ya que el campo de alcance de este tipo de cartas rara vez supera las 10 millas, pero que se toma por poner un ejemplo en las peores circunstancias posibles.

²⁵⁴ Capasso, Ideale; Fede, Sergio: *Navigazione. Volume Primo*, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 7ª edizione 1981. P.195.

$$a' = h_v = \sec^2 1^\circ = 1,000304679$$

$$b' = k_a = \sec 1^\circ = 1,000152328$$

Considerando que apenas existirá deformación angular, y que los meridianos se representarán como rectas prácticamente paralelas, las proyecciones de los meridianos deberán cortar a éstas en ángulos casi rectos, con lo cual también tenderán al paralelismo entre ellos. Y del mismo modo las líneas loxodrómicas, al cortar a todos los meridianos bajo un mismo ángulo, se representarán por líneas curvas con una curvatura tan pequeña que se confundirán con rectas²⁵⁵.

Respecto a las deformaciones lineales y superficiales, éstas también serán insignificantes. Tomando una longitud infinitesimal dm situada a una distancia angular ϕ del punto de tangencia, y orientada en una dirección α respecto al arco de círculo máximo entre su origen y el centro de la proyección, el módulo de deformación (2.5.125) será:

$$K = \frac{ds'}{ds} = \sec^2 \phi \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \phi}$$

Valor que tendrá un máximo para $\alpha = 0^\circ$ y $\alpha = 180^\circ$:

$$K_{\max} = h_v = a' = \frac{ds'}{ds} = \sec^2 \phi$$

De este modo, si se considera las peores circunstancias con las que se está trabajando, esto es, un elemento de longitud ds a una distancia de 60 millas del punto de tangencia y orientado en el sentido del vertical, el módulo de deformación tendrá por valor:

$$K' = \frac{ds'}{ds} = \sec^2 1^\circ = 1,000305$$

Así, en las condiciones anteriores, tomando un elemento de longitud $ds = 1$ milla, su representada en el plano tendrá por longitud:

$$ds' = 1,000305 \text{ millas.}$$

Como puede apreciarse la diferencia entre ambas longitudes (ds y ds') sería de 56,5 centímetros. Si además se supone que la carta en cuestión tuviera una escala, en el centro de la proyección, de 1:50.000²⁵⁶, la longitud considerada ($ds = 1$ milla) se representaría en el punto de tangencia por una longitud ds' igual a:

$$ds' = 3,704 \text{ centímetros.}$$

Mientras que a una distancia de 60 millas del centro ($\phi = 1^\circ$) sería:

$$ds' = 3,704 \times 1,00305 = 3,705 \text{ centímetros.}$$

²⁵⁵ Capasso, Ideale; Fede, Sergio: *Navigazione. Volume Primo*, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 7ª edizione 1981. P.195.

²⁵⁶ En la Conferencia Hidrográfica Internacional de Londres de 1919, se estableció que la mínima escala en este tipo de representaciones sea de 1:50.000 (Capasso, Ideale; Fede, Sergio: *Navigazione. Volume Primo*, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 7ª edizione 1981. P.196). En la práctica lo normal es que la escala oscile entre 1:20.000 y 1:5.000, aunque en ocasiones puede llegarse hasta 1:2.000.

Es decir, la variación sería inferior a una décima de milímetro, valor que en una carta náutica sería inapreciable a efectos prácticos, lo que implica que una representación de este tipo se pueda considerar de escala constante a lo largo de toda su extensión²⁵⁷.

De igual forma, para un elemento diferencial de superficie dS , se comprueba (2.5.120):

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = \sec^3 \phi$$

Con lo cual, suponiendo $\phi = 1^\circ$:

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = \sec^3 1^\circ = 1,000457$$

Como puede observarse en virtud de lo expuesto, las características de una carta realizada en proyección gnomónica horizontal de una zona de unas pocas millas en torno al punto de tangencia, difieren radicalmente de las generales de este tipo de proyección (para zonas más amplias). Es más, puede considerarse que una carta de este tipo viene a confundirse con la zona de la superficie de la esfera terrestre representada, considerada, por su pequeña amplitud, como plana. De ahí que estas cartas reciban el nombre de planos náuticos o hidrográficos²⁵⁸.

Al igual que ocurre con las cartas gnomónicas para la navegación por ortodrómica, este tipo de cartas gnomónicas de punto mayor, hoy en día se encuentran casi en desuso. Actualmente la proyección transversa de Mercator ha ganado terreno a la gnomónica horizontal en este aspecto concreto. E incluso debe hacerse mención del hecho de que muchas de estas cartas, en escalas mayores de 1:50.000, a pesar de indicar que son gnomónicas, en realidad están realizadas en una proyección policónica modificada. Este uso incorrecto del término gnomónico se realiza para constatar que en dicha carta los arcos de círculo máximo se representan por líneas rectas²⁵⁹.

3.1.3. Estudio del espacio geográfico mostrado por la carta.

En este supuesto entraríamos en criterios que pudieran considerarse subjetivos, a falta de un razonamiento profundo, el cual, se realizará posteriormente al analizar los criterios deseables para la cartografía electrónica. Bastará aquí que sería deseable, que el espacio geográfico mostrado en la carta fuera lo más parecido a la realidad posible. Esto podría lograrse recurriendo a la conformidad de la carta, para que la línea de costa mantuviera en esencia su forma y a la equivalencia, para que la superficie de accidentes geográficos y masas de Tierra conservaran su superficie. Como ya se ha establecido ambos requisitos son excluyentes, por lo que lo lógico sería dar prioridad a la primera de las propiedades, la conformidad. Siempre será deseable que la línea de costa mantenga la forma de su perfil frente a que se mantengan las superficies, ya que lo que se buscará será principalmente la identificación de accidentes geográficos.

Para mantener una imagen lo más parecida posible a la realidad geográfica, sería deseable que tanto meridianos como paralelos fueran circunferencias con separaciones entre ellos similares a las reales. Obviamente este requisito no podrá cumplirse en la carta, por lo que habría que recurrir a

²⁵⁷ Debe referirse una vez más que los ejemplos que se están realizando, para una distancia angular de 60 millas, excederían en todo caso y por mucho las peores condiciones que se encontrarían en la práctica.

²⁵⁸ Capasso, Ideale; Fede, Sergio: *Navigazione. Volume Primo*, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 7ª edizione 1981. P.196.

²⁵⁹ Ministry of Defence: *Admiralty Manual of Navigation. Volume I*, Her Majesty's Stationery Office, London, Revised edition 1987. P.109.

soluciones de compromiso. Para proporcionar una indicación visual de la latitud, sería deseable que esta solución permitiera dar una indicación visual de la convergencia de meridianos.

En todo caso, las condiciones de este apartado tendrían en una carta impresa menor prioridad que las establecidas para aparatos anteriores, ya que, como se ha dicho, deberá primar la facilidad de trazado frente a otras necesidades.

3.1.4. Resumen de los requisitos deseables para una carta de navegación impresa e identificación de las proyecciones que mejor los cumplen.

Una vez establecida la forma de representar sobre un plano un determinado espacio geográfico, correspondiente a una porción finita de la superficie terrestre, mediante una proyección cartográfica, considerando las diferentes deformaciones que se introducirán en el proceso, y tras el estudio de las necesidades propias de la navegación sobre una carta de papel, puede establecerse para este caso concreto de una carta de navegación, cuáles serán las características ideales que ésta debiera cumplir.

Una vez establecidas las características deseables en una carta impresa para realizar las operaciones más comunes que un navegante efectúa sobre ella: determinación de posiciones, trazado de trayectorias y medición de diferentes parámetros, como pueden ser rumbos y distancias, podrían establecerse una serie de características comunes. En resumen, a la hora de obtener situaciones y de trazar derrotas sería conveniente que tanto las loxodrómicas como las ortodrómicas pudieran trazarse como lugares geométricos simples, y no existe lugar geométrico de más fácil trazado que la línea recta. Respecto a la medición de parámetros lo óptimo sería que la proyección empleada fuera conforme, con lo cual los ángulos medidos sobre la superficie terrestre conservarían su valor en la carta, y en la medición de distancias debería buscarse que la escala de distancias fuera la misma para toda la carta. Por último, y en virtud de la comodidad de trabajo, también sería especialmente útil que la red de meridianos y paralelos formaran sobre la carta un entramado ortogonal, con lo cual la medición de coordenadas sería sumamente sencilla; que los accidentes geográficos conservaran su verdadera forma; y que se guardara la proporcionalidad entre las áreas de las superficies representadas, es decir, que sea equivalente.

De forma esquemática, las características que debieran buscarse en una proyección cartográfica para la construcción de cartas náuticas en papel serían las siguientes²⁶⁰:

- Que las loxodrómicas se representen por líneas rectas.
- Que las ortodrómicas se representen por líneas rectas.
- Que sea conforme.
- Que la escala de distancias sea la misma para toda la carta.
- Que los accidentes geográficos conserven su forma.
- Que paralelos y meridianos conformen una red ortogonal en la carta.
- Que sea equivalente.

²⁶⁰ Moreu Curbera; Martínez Jiménez: *Astronomía y Navegación. Tomo III*, Librería San José, Vigo, 1972. P. 220. Moreu Curbera; Martínez Jiménez: *Astronomía y Navegación. Tomo II*, Artes Gráficas Galicia – Librería San José, Vigo, 1975. P. 134. Capasso, Ideale; Fede, Sergio: *Navigazione. Volume Primo*, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 7ª edizione 1981. P. 162.

Sin embargo, algunas de las condiciones anteriormente enumeradas son excluyentes. Así, no es posible encontrar un sistema de proyección que cumpla simultáneamente las condiciones de conformidad y equivalencia, o uno en el cual tanto loxodrómicas como ortodrómicas se representen como líneas rectas. De este modo, la elección de un determinado sistema siempre será una solución de compromiso para la cual se deberá establecer un orden de preferencia entre las características anteriores.

En el caso de la navegación marítima, considerando que en la mayoría de las ocasiones la navegación por ortodrómica en la práctica se realiza descomponiéndola en tramos menores de loxodrómica, la opción evidente será la carta de Mercator. Para zonas próximas a los polos una opción será la proyección estereográfica. Sin embargo, el complicado trazado de derrotas en ésta, hace que se emplee Mercator incluso para latitudes para las cuales no sería recomendable, ya que como se ha establecido, en una carta de papel primará la facilidad de uso frente a otras cuestiones estéticas o de interpretación del espacio geográfico.

A grandes escalas estas características no tendrían que cumplirse de forma estricta, siendo suficiente con alcanzarse condiciones de cuasiconformidad y asegurarse que tanto loxodrómicas como ortodrómicas no se separan de forma apreciable de líneas rectas. En estos casos podría recurrirse perfectamente a proyecciones perspectivas donde se haga coincidir el centro de la proyección con el centro de la zona a representar, o incluso a otro tipo de proyecciones como la cónica conforme de Lambert o la Transversa de Mercator. En todo caso, como se ha establecido, la elección de una u otra proyección, en estos casos no resultará tan crítico como para escalas inferiores, por lo que la lógica indica que debería emplearse igualmente la proyección de Mercator, para mantener un criterio de homogeneidad entre escalas.

3.2. ANÁLISIS DE LOS REQUISITOS A CUMPLIR POR UNA CARTA DE NAVEGACIÓN ELECTRÓNICA

Se procederá ahora a analizar la problemática de establecer los criterios que deban cumplir una proyección cartográfica para la elaboración de cartas de navegación electrónica desde el mismo punto de vista que el seguido hasta ahora para las impresas, es decir, analizando las operaciones básicas que realiza el navegante sobre la misma, primero desde un punto de vista genérico para luego tratar de identificar criterios útiles para fines concretos.

3.2.1. Requisitos generales

En el caso de los equipos ECDIS el marino tiene que realizar igualmente las tres operaciones estudiadas en el epígrafe anterior:

- Trazar la derrota que ofrezca la mayor seguridad para la navegación.
- Realizar el seguimiento de la derrota trazada llevando periódicamente sobre la carta la posición geográfica del buque.
- Estudiar el espacio geográfico mostrado por la carta.

Sobre una carta electrónica el marino no tendrá que trazar nada con herramientas de dibujo convencionales, sino con herramientas informáticas. Por tanto, todas las características vinculadas a la facilidad de trazado gráfico ya no tendrán el grado crítico que alcanzaban en las cartas de papel. Es decir, las características buscadas pudieran ser las mismas, pero a la hora de establecer cuáles serán prioritarias, deberán buscarse otros criterios.

Como se estableció en el capítulo de esta monografía dedicado a los equipos ECDIS, un sistema de carta electrónica a bordo de un buque no solamente servirá para realizar las tres operaciones mencionadas, sino muchas más. En el puente de un buque la carta electrónica es empleada para gestionar una gran cantidad de información relacionada con la navegación y navegabilidad del buque, convirtiéndose en el centro de control de los modernos sistemas de navegación integrados.

En este aspecto, donde prima la facilidad para gestionar la información frente a cualquier habilidad manual, resulta evidente que la información cartográfica debe mostrarse en el modo más intuitivo posible. Así, de las características que debieran buscarse en una proyección cartográfica para la construcción de cartas náuticas en papel citadas anteriormente podrían eliminarse a priori las referidas a la facilidad de trazado “manual”, es decir:

- Que las loxodrómicas se representen por líneas rectas, ya que es muy poco intuitivo ver en una carta una loxodrómica con una longitud sensiblemente inferior a la ortodrómica correspondiente, tal y como ocurre en la proyección de Mercator.
- Que paralelos y meridianos conformen una red ortogonal en la carta, ya que una red de paralelos y meridianos trazados como líneas rectas paralelas ofrece una percepción geográfica muy poco intuitiva. Los paralelos y meridianos en la esfera no son rectas, sino circunferencias, y además los meridianos no son paralelos, sino que convergen en el polo.

Eliminar estas dos características supondría eliminar la proyección de Mercator en la elaboración de cartas de navegación electrónica, hecho que sin una evaluación más profunda del problema es evidente que no podría realizarse en la práctica, ya que tras tres siglos monopolizando ya no solo la elaboración de cartas de navegación, sino la mayoría de la producción de mapas impresos, cabe de esperar que la imagen del mundo en proyección de Mercator esté tan arraigada en la conciencia colectiva que buscar una proyección más intuitiva, desde un punto de vista teórico, podría llevar al resultado opuesto. Sin embargo, en este punto si se debiera proponer un sustituto de la proyección de Mercator, y en vista de la eliminación de las características anteriores, tal vez la mejor opción estuviera en las proyecciones perspectivas, las cuales resulta sumamente intuitivas, y en especial en la estereográfica, por ser entre ellas la única conforme.

Con todo lo expuesto, parece evidente que a la hora de elegir una representación de carta náutica electrónica debería primar la facilidad de asimilación de los datos geográficos y de gestión de la navegación representada en pantalla²⁶¹. Es decir, mientras que para una carta impresa debe primar la facilidad de trazado y medición, en un ECDIS debe primar que la información gráfica que en él se representa sea adquirida por el operador de la forma más rápida, intuitiva e inequívoca posible.

Como ya se ha visto, en representaciones a escalas grandes, el utilizar una u otra proyección no representa, en la mayoría de los casos, una diferencia visual apreciable²⁶², por lo que la búsqueda de alternativas a la proyección de Mercator en cartografía electrónica debería centrarse en primer lugar en representaciones a escalas medias y bajas, utilizadas principalmente para la planificación, trazado y evaluación de derrotas.

²⁶¹ López Varela, Pablo: Análisis de Idoneidad de las Derrotas empleadas en Navegación Marítima sobre las Proyecciones de Mercator, Gnomónica y Estereográfica. Tesis Doctoral, Departamento de Energía y Propulsión Marina, Universidad de A Coruña, 2005. Pp. 460 a 463.

²⁶² Frederick Pearson, II, M.S., P.D.D.: *Map Projections: Theory and Applications*, CRC Press, Florida 1990. P. 352.

En el capítulo 5 se contrastarán los resultados obtenidos de la encuesta con las características que debieran buscarse en una proyección cartográfica para la elaboración de cartas de navegación electrónica y que se detallan a continuación:

3.2.1.1. Conformidad

Es deseable que no exista deformación angular en la representación cartográfica a utilizar, de este modo las direcciones en pantalla serán fácilmente identificables visualmente, sin necesidad de realizar mediciones excepto en aquellos casos en que se necesite precisión. Además, la ausencia de deformación angular permite que la línea de costa mantenga su forma, por lo que la identificación de particularidades geográficas es inmediata.

No obstante, las proyecciones conformes presentan un serio inconveniente, la ausencia de equivalencia. Toda representación conforme presentará módulos de deformación superficial diferentes a la unidad. Este no debería ser a priori un inconveniente, ya que los marinos mercantes llevamos siglos empleando la carta de Mercator y su alto grado de deformación superficial nunca ha presentado un inconveniente. Sin embargo, es evidente que la falta de equivalencia hará poco intuitiva la carta en aquellas zonas donde la deformación superficial sea mayor, ya que la superficie de la masa de agua en la cual se encuentra el buque aparecerá distorsionada, implicando separaciones entre los puntos de origen y llegada de las derrotas oceánicas irreales. Por otra parte, en las proyecciones conformes de aspecto fijo, tal y como la de Mercator o la de Lagrange²⁶³, siempre tendrán unos límites en los cuales la deformación superficial será tal que la hará a priori inservible.

Este inconveniente puede solventarse recurriendo a proyecciones conformes en las cuales sea posible variar su aspecto, tales como la estereográfica, la transversa de Mercator o la cónica conforme de Lambert. En cualquiera de estas proyecciones es posible variar el centro de la proyección, o el meridiano o paralelo estándar (según estemos hablando de una u otra) de forma que la deformación superficial quede controlada dentro de una zona más o menos extensa en torno a los puntos o líneas mencionados.

La relación entre conformidad y equivalencia, será uno de los aspectos que más necesario se hace evaluar a través de una encuesta con una población específica, contrastándola con una más general. Así, podría darse el caso de llegar a una solución de compromiso sin exigir la conformidad estricta de la proyección. Existen proyecciones que permiten minimizar la deformación superficial asumiendo cierto grado de deformación angular. Como se ha visto al analizar la proyección gnomónica a grandes escalas, mientras la deformación angular se mantenga controlada, una carta realizada en una proyección cuasiconforme podría ser perfectamente válida para elaborar cartas de navegación electrónica.

3.2.1.2. Deformación lineal

Ninguna representación cartográfica permite conservar las distancias en toda la extensión de un mapa, sin embargo, será deseable mantener una variación uniforme y controlada de la deformación lineal. Así, aun debiendo asumir cierta deformación de las distancias, esta debería mantenerse al mínimo dentro de la zona a representar y en todo caso, su variación debería ser uniforme, de modo que

²⁶³ Proyección policónica presentada por Johann Heinrich Lambert en 1772. Es una proyección conforme con una gran deformación superficial si se compara el centro de proyección con los polos (Snyder, John P.; Voxland, Philip M.: *An Album of Map Projections*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, United States Government Printing Office, Washington 1989. P. 180).

se conserven líneas o direcciones automecóicas en la carta (es decir, en las cuales el módulo de deformación lineal sea constante), bien a lo largo de paralelos y/o meridianos, bien de forma concéntrica en torno a un punto identificado en la carta. De este modo, un operador familiarizado con las características de la proyección a utilizar puede hacerse una idea mental de la distancia aproximada entre dos puntos sin necesidad de recurrir a mediciones (evidentemente salvo que se necesitara precisión en la medida).

En este aspecto la proyección acimutal equidistante resultaría de gran interés, aunque presentaría los inconvenientes de su falta de conformidad y del necesario cambio de aspecto en el momento en el cual se centrara la presentación en la posición del buque.

3.2.1.3. Deformación superficial mínima

Asumiendo que las condiciones de conformidad y equivalencia son excluyentes en una proyección cartográfica, no se puede obtener una representación en la cual se conserven tanto los ángulos como las superficies. Sería deseable que no existiera deformación superficial, pero esto implicaría una deformación considerable de las formas. Sería interesante evaluar proyecciones equivalentes con deformaciones angulares mínimas, tales como las de Hammer²⁶⁴ o Mollweide.

Puestos a elegir, se le daría preferencia a una proyección sin deformación angular, pero en todo caso buscando que la superficial se mantuviera en los mínimos valores posibles o, como ya se ha comentado al hablar de la condición de conformidad, recurrir a proyecciones de compromiso de deformación mínima tales como la de Robinson²⁶⁵ o Van Der Grinten I²⁶⁶.

3.2.1.4. Entramado de paralelos y meridianos

Los paralelos y meridianos son circunferencias en la esfera terrestre, por lo que se puede suponer que una representación en la cual se transformen en líneas curvas, tal como la estereográfica o la Van Der Grinten I será más intuitiva que una en la cual sean líneas rectas paralelas entre sí. Este entramado presentará la ventaja adicional de que se representará la convergencia de meridianos en el mapa, por lo que la apreciación de la latitud a simple vista será más intuitiva. Sin embargo, en este tipo de configuraciones, resulta menos intuitivo apreciar visualmente las diferencias en latitud y longitud entre dos puntos, ya que estas no se medirán sobre ejes cartesianos, como ocurre en la proyección de Mercator.

Una situación de compromiso para el entramado de paralelos y meridianos podría pasar por recurrir a proyecciones en las cuales los paralelos se representen como líneas rectas paralelas entre sí, y los meridianos como curvas, como la proyección de Robinson.

En todo caso, en las proyecciones no rectangulares, es decir, en aquellas en las cuales los paralelos y meridianos no constituyan un entramado de líneas rectas ortogonales, se deberán mantener estos siempre visibles en pantalla. En una representación de carta electrónica en la pantalla de un

²⁶⁴ Proyección acimutal modificada equiárea presentada por H.H. Ernst von Hammer en 1892 (Snyder, John P.; Voxland, Philip M.: *An Album of Map Projections*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, United States Government Printing Office, Washington 1989. P. 160).

²⁶⁵ Proyección pseudocilíndrica de compromiso presentada por Arthur H. Robinson en 1963 (Snyder, John P.; Voxland, Philip M.: *An Album of Map Projections*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, United States Government Printing Office, Washington 1989. P. 82).

²⁶⁶ Proyección policónica de compromiso presentada por Alphons J. van der Grinten en 1898 (Snyder, John P.; Voxland, Philip M.: *An Album of Map Projections*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, United States Government Printing Office, Washington 1989. P. 200).

ECDIS existe una información mínima que nunca puede eliminarse. Actualmente en las cartas de Mercator los paralelos y meridianos no forman parte de esta información, sin embargo, si se trabajara con proyecciones en las cuales los paralelos y meridianos no fueran líneas rectas paralelas y perpendiculares entre sí, sería necesario mantenerlos siempre en pantalla para que el operador pueda visualmente apreciar las diferencias en latitud y longitud entre dos puntos.

3.2.1.5. Indicación visual de la convergencia de meridianos

Tal y como se acaba de indicar, una indicación visual de la convergencia de meridianos sobre la carta puede redundar en una mejor apreciación de la latitud. Sobre la superficie terrestre los meridianos convergen en los polos, por lo que, en una carta de navegación resultaría de utilidad que también lo hicieran. De este modo, la apreciación de la latitud sería mucho más intuitiva que en una representación en la cual los meridianos son paralelos entre sí. Esta condición excluiría de forma inmediata a las cartas rectangulares, mencionadas en el apartado anterior.

3.2.1.6. Diferenciación visible y proporcional entre la longitud de derrotas ortodrómicas y loxodrómicas

Sobre la superficie terrestre un buque no se desplaza según una línea recta, sino sobre una curva. Esta puede ser una geodésica u ortodrómica, o una trayectoria de rumbo constante o loxodrómica. A la hora de planificar o visualizar una derrota, sería interesante que tanto ortodrómicas como loxodrómicas aparecieran representadas por trayectorias que guardaran una proporcionalidad con sus distancias reales, así, entre dos puntos la derrota ortodrómica debería tener necesariamente menor longitud que la loxodrómica.

3.2.1.7. Aspecto independiente de la posición del buque

El aspecto de la proyección no debe variar con el constante movimiento del buque. No sería viable que la representación en pantalla tuviera que ser redibujada cada vez que el buque cambiara su posición. Por ejemplo, no serían útiles proyecciones acimutales donde el centro de proyección coincidiera con la posición del buque. Esto implicaría que la frecuencia de refresco de la pantalla fuera muy elevada y que en cada refresco de la misma el sistema reproyectara los puntos de la base de datos en función de la posición instantánea del buque. Con la capacidad de los sistemas informáticos actuales y la gran cantidad de datos que deberían ser manejados, resulta evidente que esto no podría lograrse sin que se produjeran “saltos” de la imagen en pantalla. Esta condición podría flexibilizarse en el caso de trabajar con una presentación en movimiento verdadero (la opción más empleada por los usuarios de ECDIS) ya que entonces solo sería necesario reproyectar la carta en el momento en que se reseteara la posición del buque.

3.2.2. Requisitos particulares

Tras analizar los tres grupos de operaciones básicas que un operador realiza sobre la carta electrónica (planificación y trazado de derrotas, seguimiento de la derrota y posicionamiento del buque por coordenadas o líneas de posición, y estudio y evaluación del espacio geográfico mostrado por la carta y de la posición del buque respecto a él) puede concluirse que las características a cumplir serán independientes de la operación particular que se va a realizar sobre ella. Sin embargo, la escala, la cual a su vez sí estará condicionada por el uso que se le vaya a dar a la carta, si podría afectar a la hora de establecer una prioridad específica entre los requisitos genéricos enunciados anteriormente. Es decir,

las características a cumplir podrán variar según el uso al que se va a destinar la carta, pero no por dicho uso, sino por la escala a la cual es necesario representar la carta para ello. A priori, se identifican tres supuestos en función de la escala:

3.2.2.1. Cartas electrónicas a gran escala

Para escalas elevadas (superiores a aproximadamente 1:125.000 considerando un monitor de 19") donde la superficie a representar sea como mucho de unas pocas decenas de millas de lado, las características generales enumeradas en el epígrafe anterior pierden significación, no siendo apreciable un cambio de proyección en la carta. En estos casos la lógica indica que la característica fundamental que debería considerarse como crítica sería la necesidad de que el centro de proyección no se sitúe sobre la posición del buque, ya que, en este caso sería necesario, que el sistema estuviera construyendo una proyección nueva continuamente. Así, en estos casos, a no ser que se trabajara en movimiento verdadero, de modo que la reconstrucción de la proyección se hiciera coincidir con el reseteo en pantalla de la posición del buque, deberían elegirse proyecciones en las cuales el aspecto de la misma fuera independiente de la posición del buque. El resto de las propiedades enumeradas en el epígrafe anterior realmente no serían necesarias para este caso, pero si se trata de unificar criterios, si sería interesante que se cumplieran.

A pesar de lo expuesto, no se considera imprescindible rechazar las proyecciones acimutales para estos casos. Si bien es cierto, que sería deseable para aprovechar las cualidades de una proyección acimutal hacer coincidir su centro con la posición del buque, podrían establecerse rangos de tolerancia, de modo que la carta no se reproyectase hasta que el buque se hubiera desplazado unas pocas decenas de millas de la última posición, en la que se actualizó la representación. De este modo, podrían aprovecharse las características de las acimutales sin necesidad de refrescar la carta salvo cada hora a lo sumo.

3.2.2.2. Cartas electrónicas a media escala

Para escalas medias y bajas (aproximadamente entre 1:125.000 y 1:600.000 considerando un tamaño de pantalla de 19 pulgadas) donde se deba representar una zona amplia, no se han identificado características críticas dentro de las generales.

3.2.2.3. Cartas electrónicas a pequeña escala

En representaciones de escala muy pequeña (inferior a aproximadamente 1:600.000 considerando un monitor de 19"), ocurre lo contrario que para escalas grandes. Tras un análisis de las mismas, se ha determinado que deberían mantenerse todas las condiciones generales enumeradas en el epígrafe anterior, excepto la necesidad de mantener el aspecto de la proyección invariable. En este tipo de representaciones, donde la zona a representar abarcaría océanos enteros, la actualización de la posición del buque sería inapreciable y además la presentación se realizaría en movimiento verdadero, primando la posibilidad de que el operador pudiera variar la zona a observar a voluntad.

En este caso, y ya que la cantidad de información a proyectar sería muy inferior a la que se necesitaría para escalas elevadas (a estas escalas tan solo se representarían líneas de costa y nombres de puntos significativos) sería posible refrescar la imagen de un modo casi continuo. Por poner un símil, el efecto sería el mismo que en cualquier software de cartografía genérica del tipo del conocido *Google Earth* cuando se visualiza la Tierra en una escala muy pequeña y se le hace girar para cambiar la visualización de un continente a otro.

CAPÍTULO IV. PROPUESTA Y ANÁLISIS DE LAS PROYECCIONES ALTERNATIVAS A LA DE MERCATOR EN LA REPRESENTACIÓN DE CARTAS DE NAVEGACIÓN ELECTRÓNICA

4. PROPUESTA Y ANÁLISIS DE LAS PROYECCIONES ALTERNATIVAS A LA DE MERCATOR EN LA REPRESENTACIÓN DE CARTAS DE NAVEGACIÓN ELECTRÓNICA

4.1. PROPUESTA DE PROYECCIONES ALTERNATIVAS A LA DE MERCATOR

Analizando los requisitos deseables para una carta de navegación electrónica, establecidos en el capítulo anterior, puede verse que la proyección de Mercator no se encontraría entre la lista de proyecciones adecuadas para representaciones de cartas náuticas electrónicas. Sin embargo, a la hora de proponer proyecciones para este fin, debe establecerse que a día de hoy no es factible la sustitución de la proyección de Mercator, debiendo limitarse las proyecciones propuestas a alternativas o complementarias de aquella, y que posiblemente puedan ser mejor aprovechadas por aquellos usuarios con unos mayores conocimientos de cartografía. Los alumnos de náutica, futuros oficiales y capitanes de la Marina Mercante, adquieren suficientes conocimientos de cartografía, a lo largo de sus estudios universitarios, como para poder desenvolverse sin problemas en proyecciones diferentes a la de Mercator. Sin embargo, no puede pretenderse que los navegantes que ya llevan una larga experiencia profesional empleando cartas de Mercator, primero en formato impreso y actualmente electrónico, se desenvuelvan con la misma soltura en representaciones en proyecciones diferentes. Así, la implantación de proyecciones alternativas, de realizarse, debería ser siempre en un ambiente de opcionalidad. Que el operador pudiera seleccionar en que proyección cartográfica se encuentra más cómodo y le resulta más intuitiva para el trabajo a desarrollar.

El uso de una u otra proyección en la representación de una carta en el ECDIS, no supone un inconveniente para realizar una navegación segura, pero debe tenerse en cuenta que, puede dar lugar a deformaciones muy notables y a malas interpretaciones de la realidad. Por ejemplo, la navegación en la región del Ártico se convierte en una realidad debido al derretimiento progresivo de la capa de hielo polar, por lo que debería ser revisada la proyección de selección para la navegación en esta zona²⁶⁷.

En vista de los requisitos planteados para cartas de navegación electrónica, las propuestas inmediatas, por orden teórico de idoneidad, las cuales se contrastarán en el siguiente capítulo con los resultados de la encuesta sobre la atracción de los profesionales del mar hacia nuevas proyecciones y visualizaciones de cartas; serán:

4.1.1. Proyección estereográfica

Cumple todas las condiciones establecidas excepto la necesidad de cambiar el centro de la proyección en el momento en que se quieran representar zonas diferentes. Por este motivo sería una opción muy útil para representaciones a media y pequeña escala, sin embargo, para escalas superiores a aproximadamente 1:125.000 (considerando una pantalla de 19”), debería controlarse el cambio del centro de la proyección en intervalos preestablecidos, no haciéndola coincidir con la posición del buque.

²⁶⁷ Skopeliti, Andriani; Tsoulos, Lysandros; “Choosing a Suitable Projection for Navigation in the Arctic”, *Marine Geodesy*, Vol.36, N°2, pp. 234 a 259, mayo 2013.

4.1.2. Proyección cónica conforme de Lambert

Proyección conforme donde las derrotas ortodrómicas tienden a representarse como líneas rectas en la proximidad del paralelo estándar. Los meridianos se representan como líneas rectas convergentes en el polo del hemisferio donde se establece el paralelo o paralelos estándar. Los paralelos se representan como arcos de circunferencia concéntricos.

A pesar de que esta proyección cambia su aspecto en función del paralelo o paralelos estándar que se consideren, estos cambios de aspecto no tendrían por qué ser continuo, ya que podrían establecerse “saltos” en la proyección en intervalos de cambio de latitud de unos pocos grados.

Los inconvenientes aparecerían cuando se desea representar zonas próximas al ecuador, ya que en ese caso, en el momento en el cual se establezca como paralelo estándar el ecuador, la proyección se convertiría en una de Mercator. Lo mismo ocurriría en los polos. Si se tomara como latitud del paralelo estándar 90° , el resultado sería una proyección estereográfica. Este hecho no tiene por qué ser un inconveniente en sí mismo, ya que aunque diferentes en aspecto, estas tres proyecciones (considerando la de Mercator y la estereográfica como casos particulares) serían perfectamente complementarias por compartir propiedades.

4.1.3. Proyección transversa de Mercator

El principal problema de esta proyección es el hecho de que presenta el mismo grado de deformación lineal y superficial que la de Mercator, por lo que el aumento de las deformaciones en el sentido de la longitud desde el meridiano central es mayor que en la estereográfica. Por el contrario, sería una buena opción para complementar a la proyección de Mercator para representar zonas extensas en el sentido del meridiano, aunque el cambio de aspecto con esta es considerable, al pasar de un entramado rectangular de meridianos y paralelos rectos a uno con ellos curvos.

4.1.4. Proyección ortográfica

Tal vez la proyección más intuitiva, por ser la imagen que tendría un observador externo de la superficie terrestre. Sin embargo, los niveles de deformación crecen demasiado, tanto lineal, angular como superficialmente, al separarse del centro de la proyección. También presenta el inconveniente del necesario cambio de aspecto por tratarse de una acimutal.

4.1.5. Acimutal equidistante

Cumple en menor grado los requisitos establecidos que la transversa de Mercator, sin embargo, por presentar un aumento de las deformaciones menor que ésta en la dirección del ecuador, el aspecto del resultado para zonas amplias es más próximo a la realidad terrestre. Al igual que en el caso anterior, presenta el inconveniente del necesario cambio de aspecto por tratarse de una acimutal.

4.1.6. Mollweide

La proyección de Mollweide se ha considerado no solo por sus características, sino en mayor medida por ser una proyección visualmente más parecida a la de Mercator que el resto de las mencionadas aquí. Así, el resultado estético es el de una proyección con paralelos representados como líneas rectas paralelas entre sí, mientras que los meridianos son curvas convergentes hacia los polos.

4.2. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LAS FORMAS DE LOS ENTRAMADOS DE PARALELOS Y MERIDIANOS ENTRE LAS PROYECCIONES PROPUESTAS, MERCATOR Y GNOMÓNICA

La disposición de las líneas del reticulado geográfico (entramado de meridianos y paralelos) depende de la proyección cartográfica empleada, pudiendo ser: rectas o curvas, paralelas o convergentes y su separación constante o variar de un lugar a otro²⁶⁸.

Como ya se ha visto en el capítulo tres, uno de los requisitos a buscar para la construcción de cartas náuticas de papel, es que los paralelos y meridianos conformen una red ortogonal en la carta. Con la llegada de la cartografía electrónica, la forma de los meridianos y paralelos será un requisito fundamental a tener en cuenta, pero ya no prima la necesidad de un entramado de líneas rectas ortogonales²⁶⁹.

En las figuras 4.2.1 y 4.2.2 pueden verse los entramados de los mapamundis en proyección de Mercator, transversa de Mercator y Mollweide. Se hace primero una comparación de estas tres, por el mero hecho de presentar un único aspecto²⁷⁰; pudiéndose ver que, mientras Mercator presenta un entramado ortogonal de meridianos rectos igualmente espaciados y paralelos rectos con diferente distancia entre ellos, en la transversa de Mercator se muestran meridianos y paralelos curvos desigualmente espaciados y en la de Mollweide se presentan meridianos curvos con igual distancia entre ellos y paralelos rectos desigualmente espaciados. Además, en la proyección transversa de Mercator y en Mollweide (figura 4.2.2), a diferencia de la Proyección de Mercator (figura 4.2.1), puede verse como los meridianos convergen en los polos, por lo tanto, el marino puede apreciar la latitud en la que está de una manera mucho más intuitiva.

La retícula, como ya se ha dicho, no forma parte de la presentación básica en pantalla de un ECDIS, sin embargo, si el marino prefiriese un entramado tal como transversa de Mercator sería necesario que la retícula formase parte de aquella información que no puede eliminarse, pudiéndose apreciar visualmente la diferencia de latitud y longitud entre dos puntos.

²⁶⁸ Millán Gamboa, José Manuel: *Cartografía náutica*, JM Ediciones Cádiz, 2006. P. 49.

²⁶⁹ Todas las posiciones en una ENC estarán almacenadas en latitud y longitud independientemente de la proyección. Aunque pudiera elegirse otra proyección diferente a la de Mercator (dadas por el fabricante del sistema), se elige ésta para escalas inferiores a 1: 50 000, por ser la proyección a la que el marino está acostumbrado (Weintrit, Adam: *The Electronic Chart Display and Information System (ECDIS) and Operational Handbook*, CRC Press, Leiden, 2009. P. 356).

²⁷⁰ La forma de paralelos y meridianos es la misma, independientemente, del meridiano central o paralelo estándar.

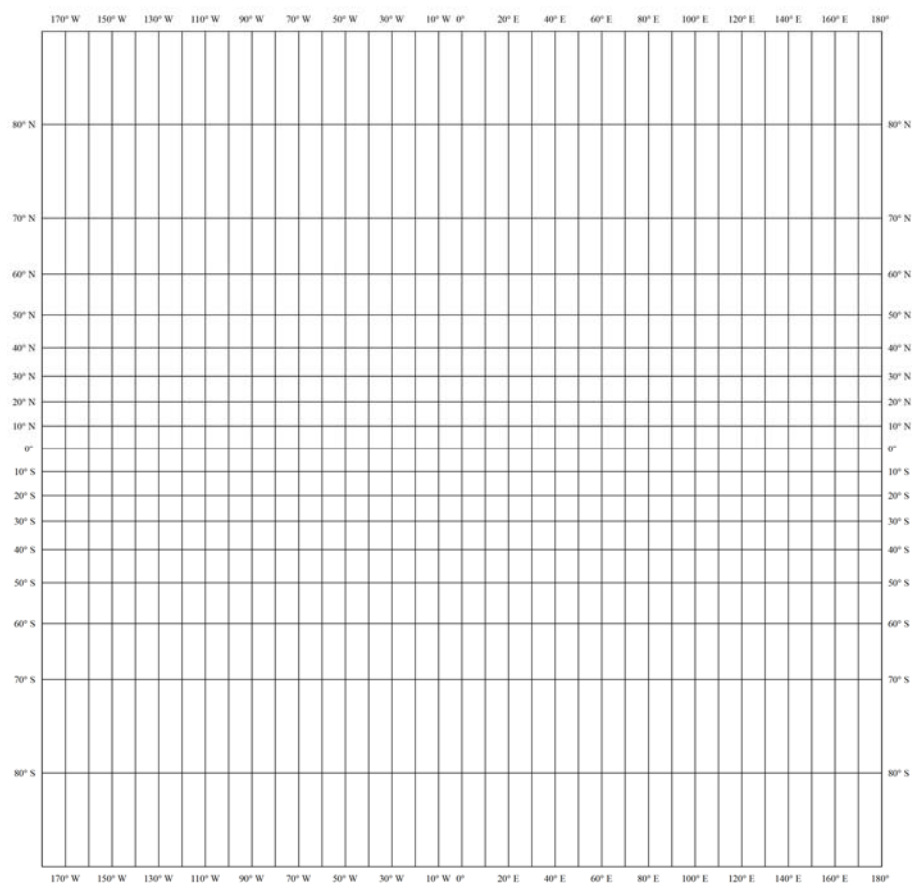
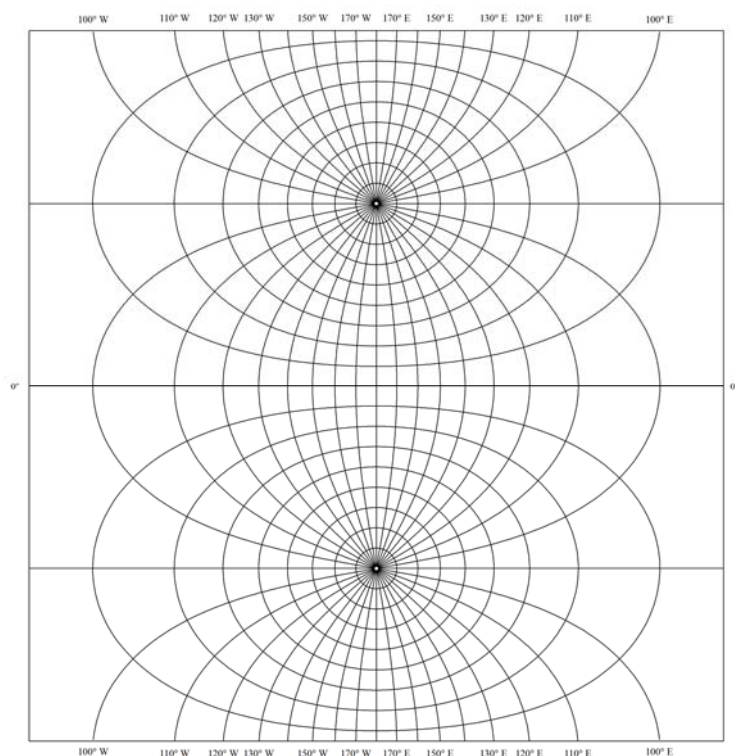
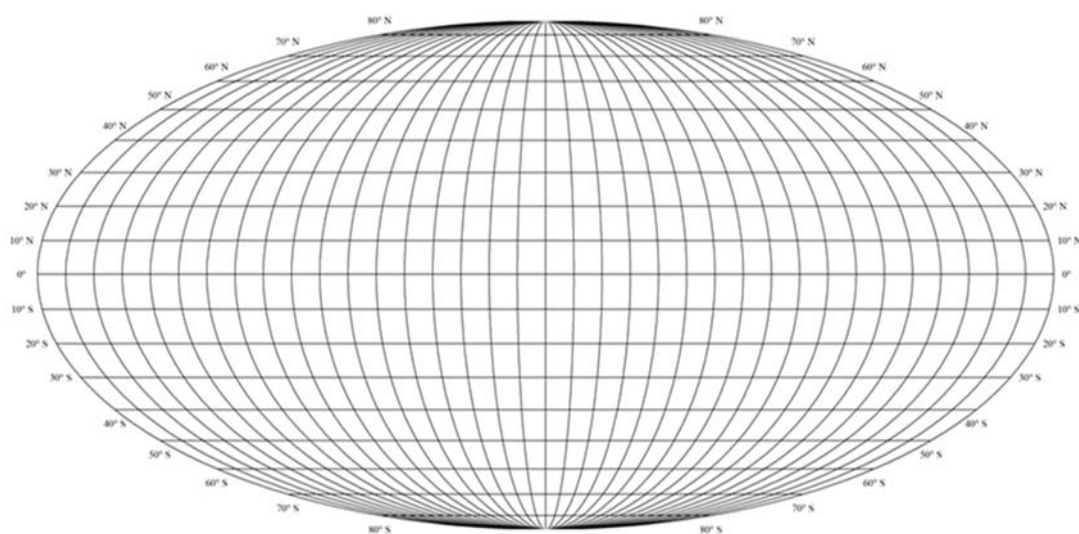


Figura 4.2.1. Entramado de una proyección de Mercator



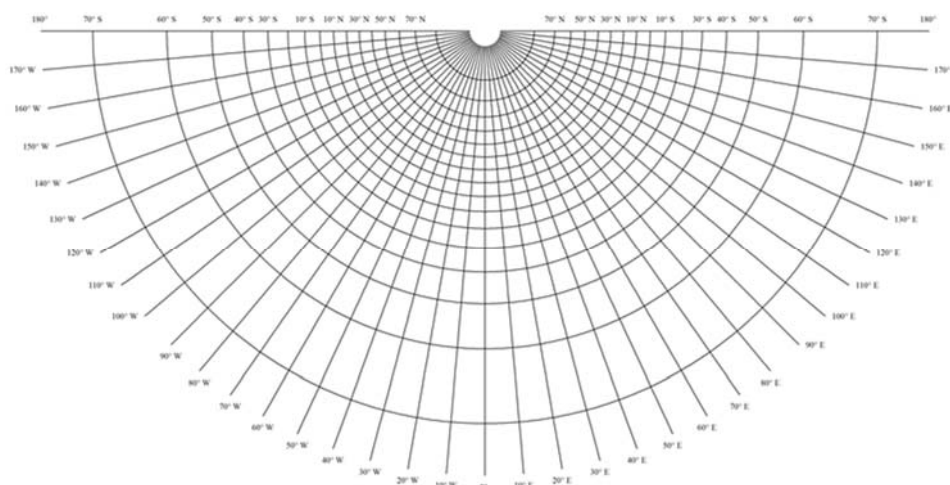
Proyección transversa de Mercator



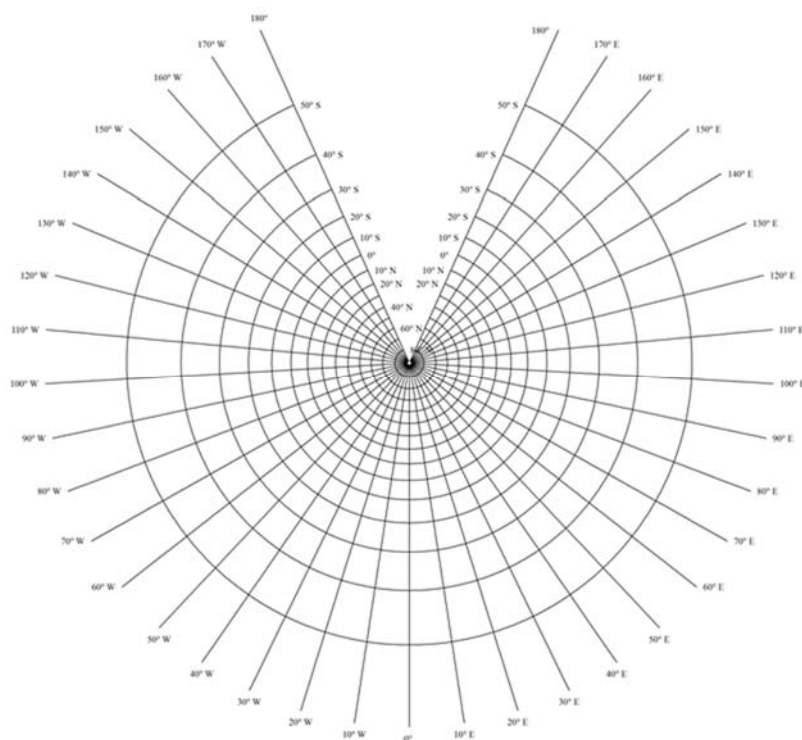
Proyección de Mollweide

Figura 4.2.2. Entramado de una proyección transversa de Mercator y de una proyección de Mollweide

En las figura 4.2.3 pueden verse dos entramados de mapamundis en proyección cónica conforme de Lambert, que pudiéndose incluir en la figura anterior por presentar un aspecto de entramado común (independiente del o los paralelos estándar), se caracteriza por convertirse en una Proyección Mercator cuando el paralelo estándar es de $\phi = 0^\circ$ y en una estereográfica polar cuando el paralelo estándar tiene $\phi = 90^\circ$. Los meridianos son rectos, convergentes en el polo e igualmente espaciados angularmente, mientras los paralelos son círculos concéntricos desigualmente espaciados centrados en el polo donde convergen los meridianos.



Proyección cónica conforme de Lambert (paralelo estándar 30°N)



Proyección cónica conforme de Lambert (paralelo estándar 60°N)

Figura 4.2.3. Entramados de una proyección cónica conforme de Lambert con paralelos estándar 30°N y 60°N

La proyección cónica conforme de Lambert cumple varios de los requisitos a cumplir por una carta de navegación electrónica, pero, en cuanto al entramado, aunque los meridianos convergen en el polo, los paralelos estarán desigualmente distanciados por lo que el marino no le resultaría fácil apreciar visualmente la diferencia de latitud entre dos puntos, ya que éstos no se medirán sobre ejes cartesianos, como ocurre en la proyección de Mercator.

En la figura 4.2.4 pueden verse los entramados de mapamundis de las cuatro proyecciones acimutales analizadas en esta Tesis: gnomónica, estereográfica, ortográfica y acimutal equidistante, con centro de proyección en $\phi_0 = 60^\circ$ y $\lambda_0 = 000^\circ$.

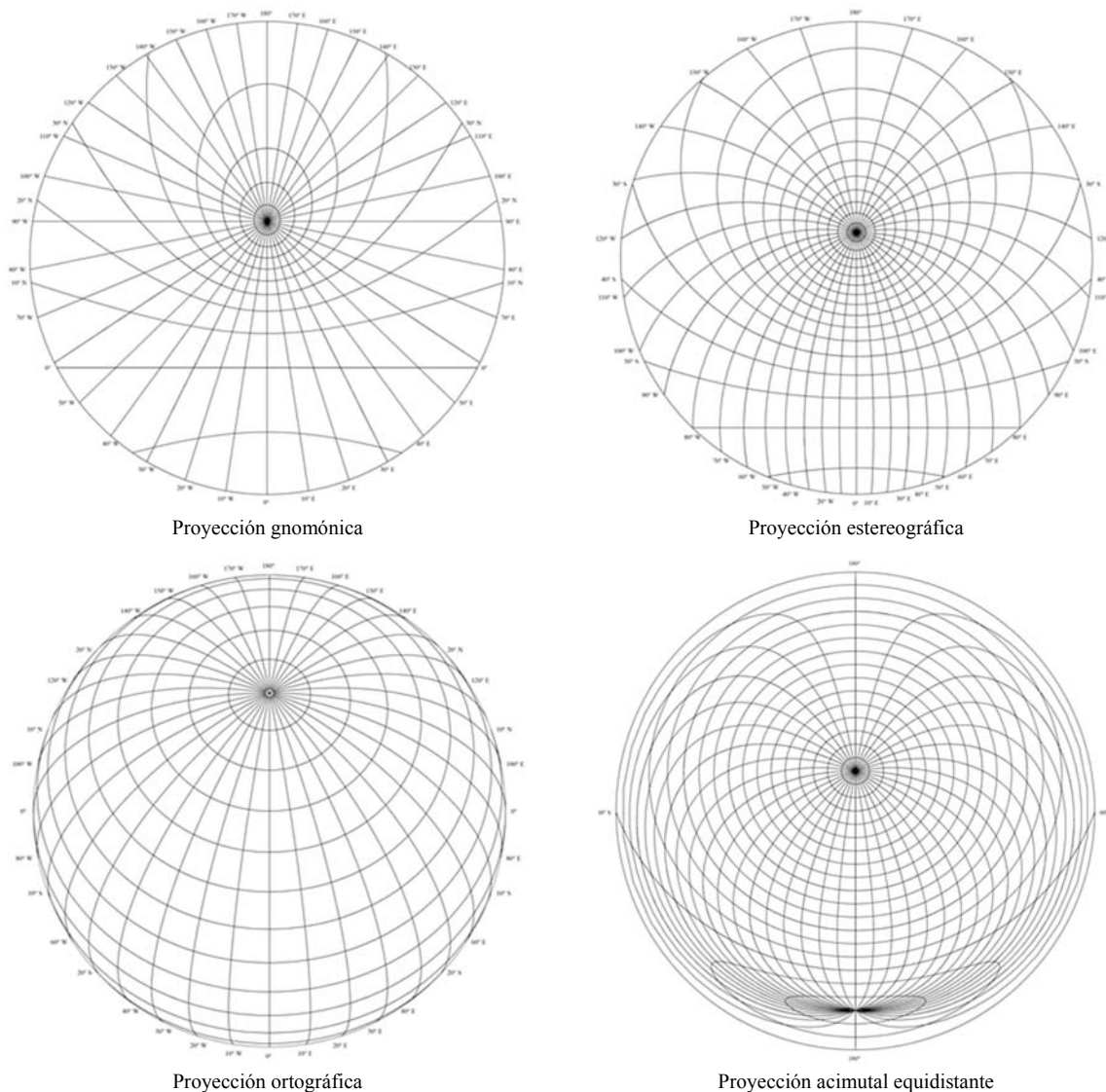


Figura 4.2.4. Entramados de mapamundis en las proyecciones gnomónica, estereográfica, ortográfica y acimutal equidistante

La proyección gnomónica se tuvo en cuenta en esta comparación de entramados, aun no siendo una de las proyecciones propuestas alternativas a la de Mercator, por ser una proyección en la cual se cumple uno de los requisitos deseables para una carta de navegación electrónica, y es que la ortodrómica se represente con una distancia menor que la loxodrómica (en cualquier aspecto de la proyección la ortodrómica es una línea recta), y por ser una proyección que aun siendo hoy en día desplazada por la transversa de Mercator en la producción de cartas impresas, todavía existen cartas de puntos mayor en gnomónica. En cuanto a su entramado, puede verse en la figura 4.2.4 que presenta meridianos rectos convergentes en el polo y paralelos curvos, excepto el ecuador que se presenta como una línea recta, ambos muy desigualmente espaciados. De las cuatro proyecciones representadas en la figura 4.2.4, es sin duda, a simple vista, la que presenta mayor desigualdad entre los meridianos y paralelos, por lo que un marino, aun teniendo el entramado en la presentación del ECDIS, le sería muy difícil hacerse una idea mental de la distancia aproximada entre dos puntos.

En las proyecciones estereográfica, ortográfica y acimutal equidistante, al igual que en la gnomónica, el meridiano central es una línea recta (como puede verse en la figura 4.2.4), el resto de meridianos son curvos, convergentes en el polo, y los paralelos son todos curvos excepto en la

estereográfica, en la cual el paralelo de latitud con signo contrario a la latitud central es una línea recta. En la estereográfica tanto los paralelos como los meridianos son arcos de circunferencia cuya distancia entre ellos aumenta gradualmente con respecto al centro de proyección, caso contrario sucede en la ortográfica, donde los meridianos y paralelos son arcos de elipse cuya distancia entre ellos disminuye, y no gradualmente, respecto al centro. En la proyección acimutal equidistante los meridianos son curvas complejas desigualmente espaciadas y los paralelos curvas complejas con igual distancia entre ellos.

Comparando las tres proyecciones acimutales propuestas, en su aspecto oblicuo, no teniendo ninguna de las tres paralelos y meridianos curvos igualmente espaciados, al marino le tendría que resultar más intuitivo apreciar visualmente la diferencia en latitud y longitud en entramados como el de la estereográfica, donde la distancia entre paralelos y meridianos aumentan gradualmente con respecto al meridiano central. Como se verá más adelante la proyección acimutal equidistante en su aspecto transverso y polar si cumpliría con el requisito de un entramado equidistante.

A la hora de hacer la comparación de entramados entre las proyecciones propuestas, resulta interesante en aquellas proyecciones que no presentan un aspecto único, hacer la comparación en su aspecto transverso y aspecto polar. En la figura 4.2.5 pueden verse los entramados del Pacífico de las mismas proyecciones que la figura 4.2.4 y en su aspecto transverso.

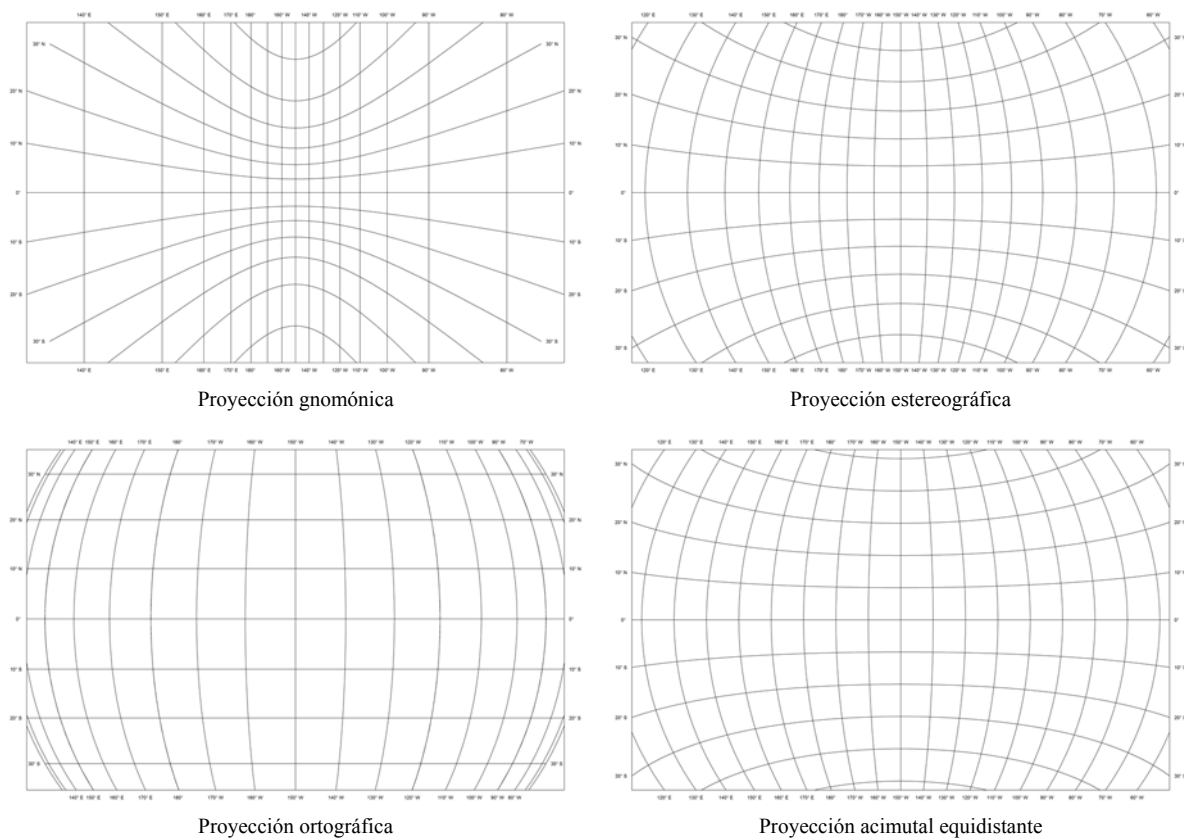


Figura 4.2.5. Entramados del Pacífico en las proyecciones gnomónica, estereográfica, ortográfica y acimutal equidistante en su aspecto transverso

En la proyección gnomónica, puede verse que los paralelos son hipérbolas y los meridianos son rectas muy desigualmente espaciados, al igual que sucedía con el aspecto oblicuo. Además, los meridianos no convergen en el polo, por lo que el entramado no podría serle útil al marino para cartas a media - baja escala, donde no se cumple ni el requisito de equidistancia ni convergencia.

En las proyecciones estereográfica, ortográfica y acimutal equidistante, al igual que en la gnomónica, el meridiano central y el ecuador son una línea recta, como puede verse en la figura 4.2.5; el resto de meridianos son curvos convergentes en el polo y los paralelos son curvos excepto en la ortográfica, en la cual son líneas rectas. En la estereográfica, al igual que en el aspecto oblicuo, tanto los paralelos como los meridianos son arcos de circunferencia cuya distancia entre ellos aumenta gradualmente con respecto al meridiano central y ecuador respectivamente. En la ortográfica, los meridianos son arcos de elipse, excepto los que distan 90° del meridiano central que son circunferencias, y los paralelos son rectas desigualmente espaciadas; la distancia entre meridianos disminuye con respecto al meridiano central y la distancia entre paralelos disminuye con respecto al ecuador. En la proyección acimutal equidistante los meridianos y paralelos son curvas complejas igualmente espaciadas, excepto el meridiano que dista 90° del central que es una circunferencia.

Al igual que en el aspecto oblicuo, si se comparan las tres proyecciones acimutales propuestas en su aspecto transversal, sin duda será la acimutal equidistante la que mejor cumpliría los requisitos del entramado deseable a visualizar por el marino sobre la pantalla del ECDIS.

De las proyecciones propuestas, se verán en su aspecto polar las mismas que las de las figuras 4.2.4 y 4.2.5, ya que, Mollweide y transversa de Mercator, aunque podrían utilizarse para representar las regiones polares, no presentan aspecto polar y la proyección cónica de Lambert con paralelo estándar de 90° se convertiría en una estereográfica polar.

En la figura 4.2.6 pueden verse los entramados de las proyecciones gnomónica, estereográfica, ortográfica y acimutal equidistante de la zona que incluye: al Norte la isla de Zemlya Bunge Island; al Oeste la Bahía de Tokio y al Este el puerto de Seattle; centrados en $\phi_0 = 90^\circ$ N y $\lambda_0 = 175^\circ$ W.

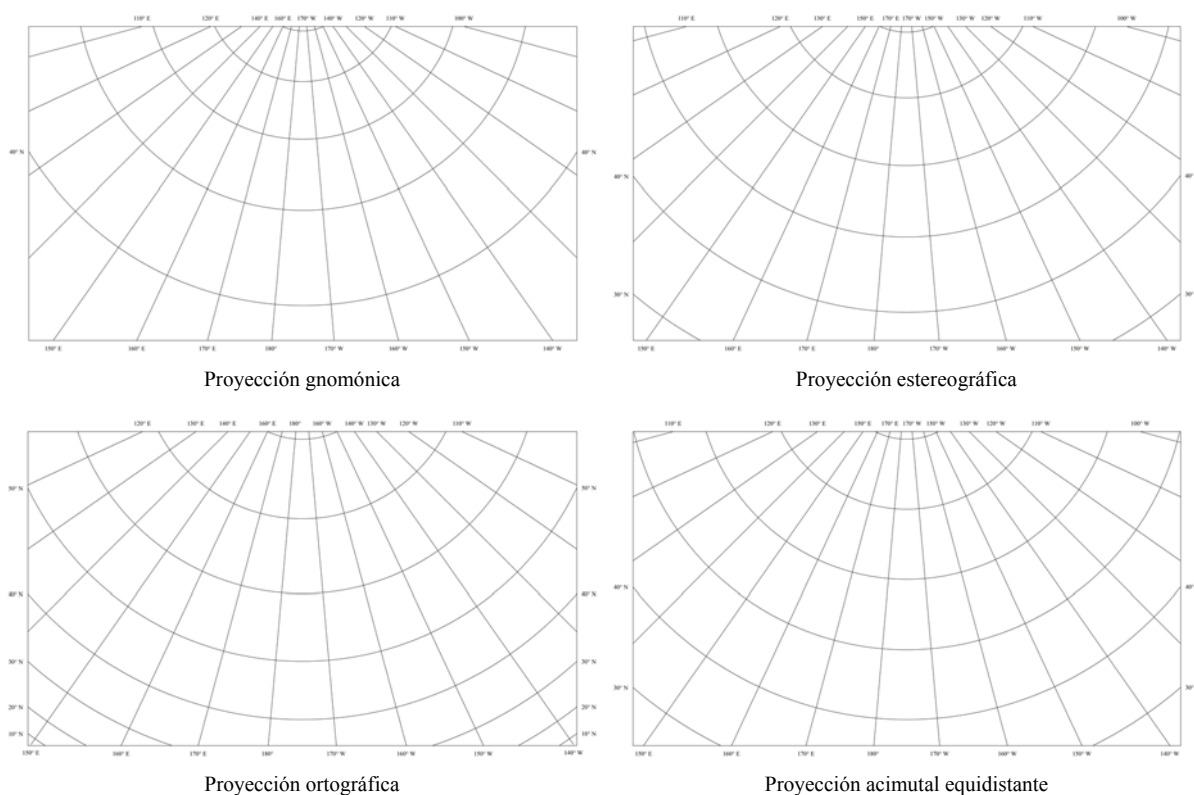


Figura 4.2.6. Entramados de la zona de las Islas Aleutianas y el Estrecho de Bering en las proyecciones gnomónica, estereográfica, ortográfica y acimutal equidistante en su aspecto polar

En las cuatro proyecciones acimutales, los meridianos son líneas rectas convergentes en el polo e igualmente espaciadas, y los ángulos entre ellos están en verdadera magnitud. Los paralelos son círculos concéntricos desigualmente espaciados con centro en el polo, excepto en la proyección acimutal equidistante, donde los paralelos son equidistantes.

La diferencia entre los entramados de la figura 4.2.6 está en la distancia entre paralelos, pudiéndose ver como aumenta o disminuye la separación entre ellos con la distancia al centro. En la gnomónica aumenta rápidamente, en la estereográfica aumenta gradualmente, en la ortográfica disminuye y en la acimutal equidistante se mantiene.

De las cuatro proyecciones acimutales en su aspecto polar, sería la acimutal equidistante la que cumpliría con un mayor número de requisitos en cuanto a retícula se refiere, sobre la pantalla de un ECDIS.

Ahora, si se representa el entramado de la misma región que abarca la figura 4.2.7 en proyección Mercator, Mollweide y Transversa de Mercator, en su único aspecto, se tendría la siguiente figura:

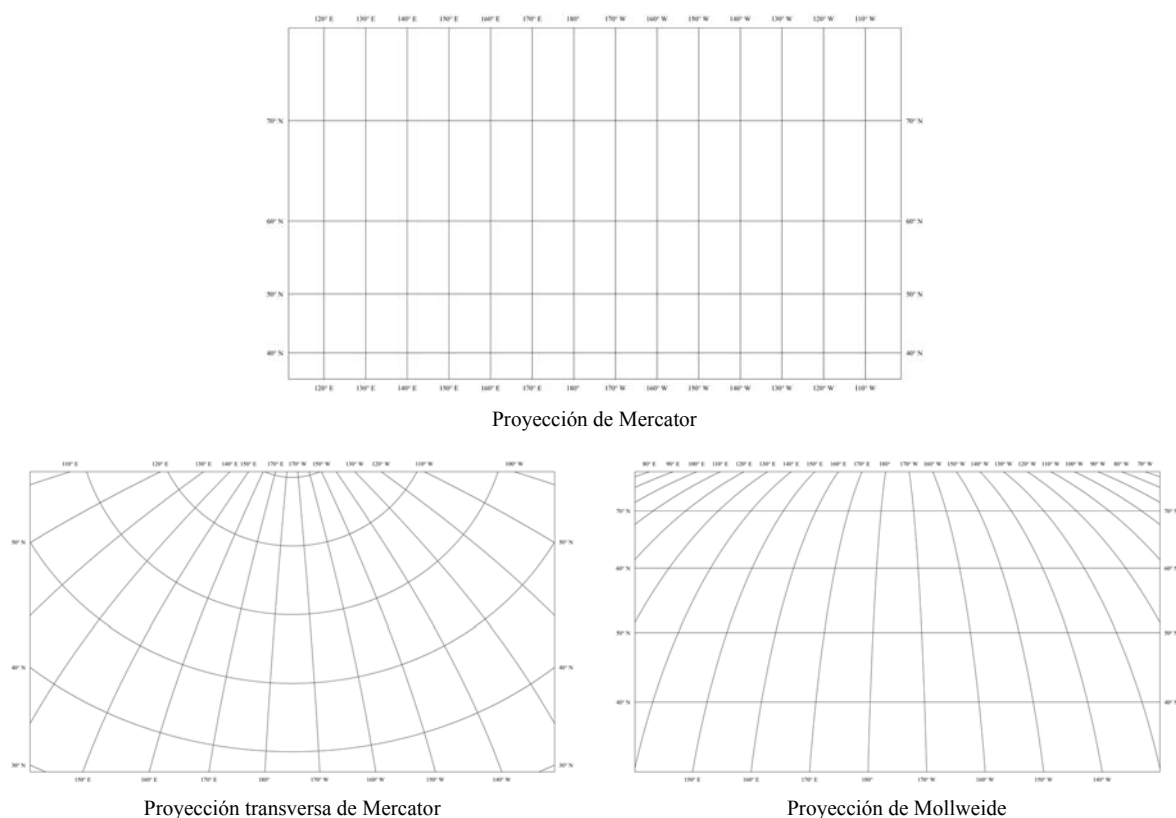


Figura 4.2.7. Entramados de la zona de las Islas Aleutianas y el Estrecho de Bering en las proyecciones de Mercator, transversa de Mercator y Mollweide

Si se comparan las proyecciones de las figuras 4.2.6 y 4.2.7, se descartaría Mercator por la enorme distancia que hay entre paralelos a esas latitudes y por no tener el polo representación. Puede verse la similitud que hay entre la proyección acimutal equidistante y la transversa de Mercator a esas escalas, donde es de suponer que el marino descartaría la acimutal, basándose en el requisito de la conformidad de la proyección transversa.

4.3. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LAS DEFORMACIONES ENTRE LAS PROYECCIONES PROPUESTAS, MERCATOR Y GNOMÓNICA

Sería deseable que se conservaran los ángulos, las superficies y las distancias, en la representación cartográfica a utilizar, pero no existe ningún tipo de proyección en la que se cumple la conformidad, equivalencia y equidistancia. Por lo tanto, interesarán proyecciones donde se cumplan los requisitos descritos en el capítulo tres: conformidad, deformación superficial mínima y mantener una variación uniforme y controlada de la deformación lineal.

En este epígrafe se van a comparar las seis proyecciones propuestas, de las cuales, tres de ellas son conformes: estereográfica, cónica conforme de Lambert y transversa de Mercator; una equivalente: Mollweide y una equidistante: acimutal equidistante. Dichas proyecciones también se compararán con Mercator, la cual es una proyección conforme y la gnomónica, que no es ni conforme ni equiárea.

Sobre la pantalla de un ECDIS es deseable que las direcciones sean fácilmente identificables y que la línea de costa mantenga su forma, para ello, hay que recurrir a proyecciones sin deformación angular. También es verdad, que si una proyección es conforme no puede ser equivalente, por lo que la carta será muy poco intuitiva en aquellas zonas en que la deformación de área sea mayor.

Por otra parte, hay que diferenciar entre proyecciones conformes de aspecto fijo y proyecciones conformes de aspecto variable. Una proyección sin deformación angular que no cambia de aspecto sería la de Mercator (figura 4.3.1), donde la deformación superficial aumenta con la distancia al Ecuador. En ella quedaría controlada la deformación en las áreas cercanas al Ecuador, pero en los bordes de la carta la deformación sería exagerada. Las proyecciones de aspecto variable, como la estereográfica (figura 4.3.2), la transversa de Mercator (figura 4.3.3) y la cónica conforme de Lambert (figura 4.3.4), variando su centro de proyección, meridiano o paralelo estándar, permitirían controlar la deformación en las áreas cercanas a dichas líneas o puntos y solventarían el inconveniente de mostrar zonas con deformación exagerada como sucede en la de Mercator.

En las figuras 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3 y 4.3.4 pueden verse las proyecciones de Mercator, estereográfica, transversa de Mercator y cónica conforme de Lambert, con elipses de Tissot, las cuales constituyen el mejor indicador visual para evaluar las deformaciones en las proyecciones dichas.

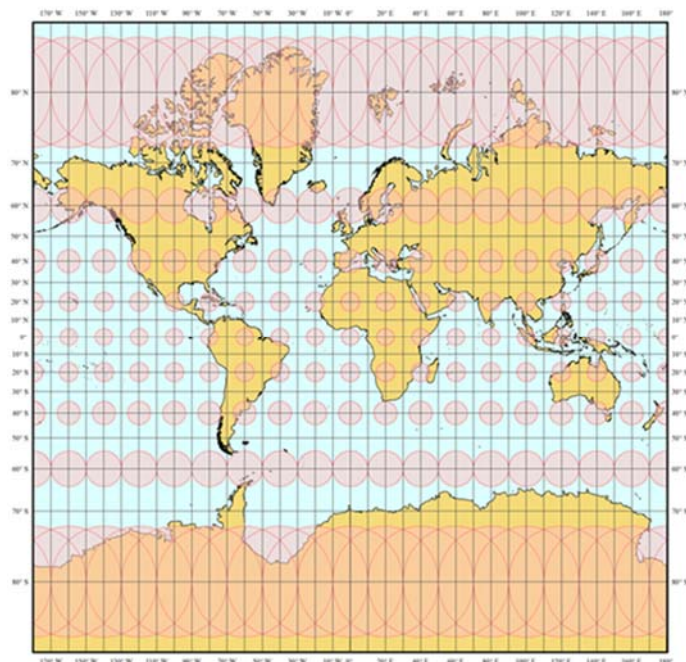


Figura 4.3.1. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección de Mercator

Puede observarse en la figura 4.3.1 que las elipses indicatrices de Tissot son circunferencias²⁷¹ y que su tamaño aumenta con la distancia al Ecuador, por lo tanto, el área se deforma cada vez más hacia las regiones polares.

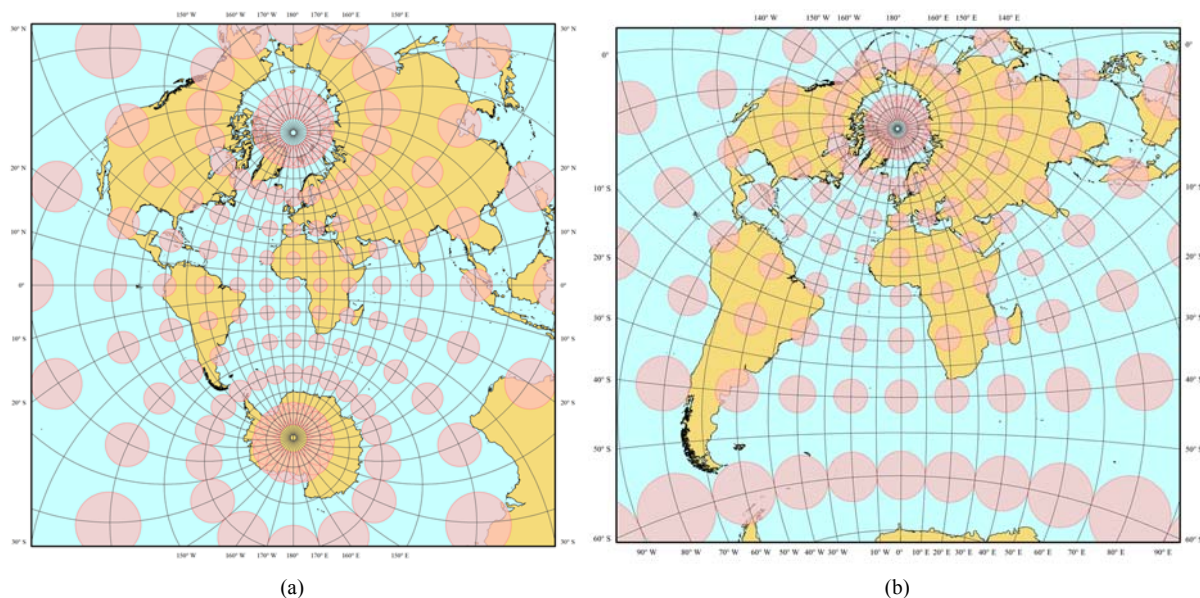


Figura 4.3.2. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección de Estereográfica con centro en $\phi_0=00^\circ$ y $\lambda_0=000^\circ$ (a) y con centro en Burdeos (b)

²⁷¹ Como ya se ha demostrado en el capítulo dos, las elipses indicatrices de Tissot en una proyección conforme degeneran en una circunferencia

En las figuras 4.3.2 (a) y 4.3.2 (b) puede verse que la mínima deformación está en las proximidades de $\varphi_0=00^\circ$, $\lambda_0=000^\circ$ y Burdeos, donde las circunferencias son de menor tamaño, deformándose las áreas cada vez más a medida que nos distanciamos del centro de proyección.

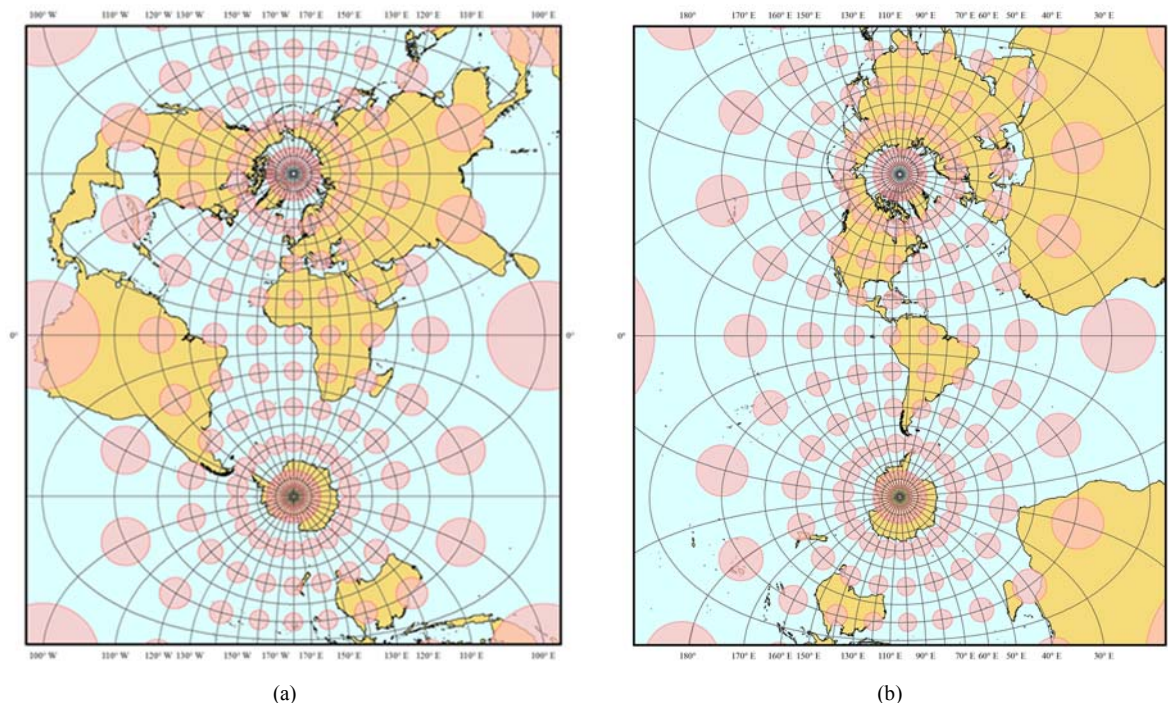


Figura 4.3.3. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección transversa de Mercator con el meridiano de Greenwich como estándar (a) y con la longitud de Norfolk como meridiano estándar (b)

En las figuras 4.3.3 (a) y 4.3.3 (b) la deformación superficial quede controlada en las proximidades del meridiano de Greenwich y del meridiano de longitud de Norfolk, ya que, como puede verse, las circunferencias van disminuyendo en tamaño desde los bordes de la proyección hasta el meridiano estándar.

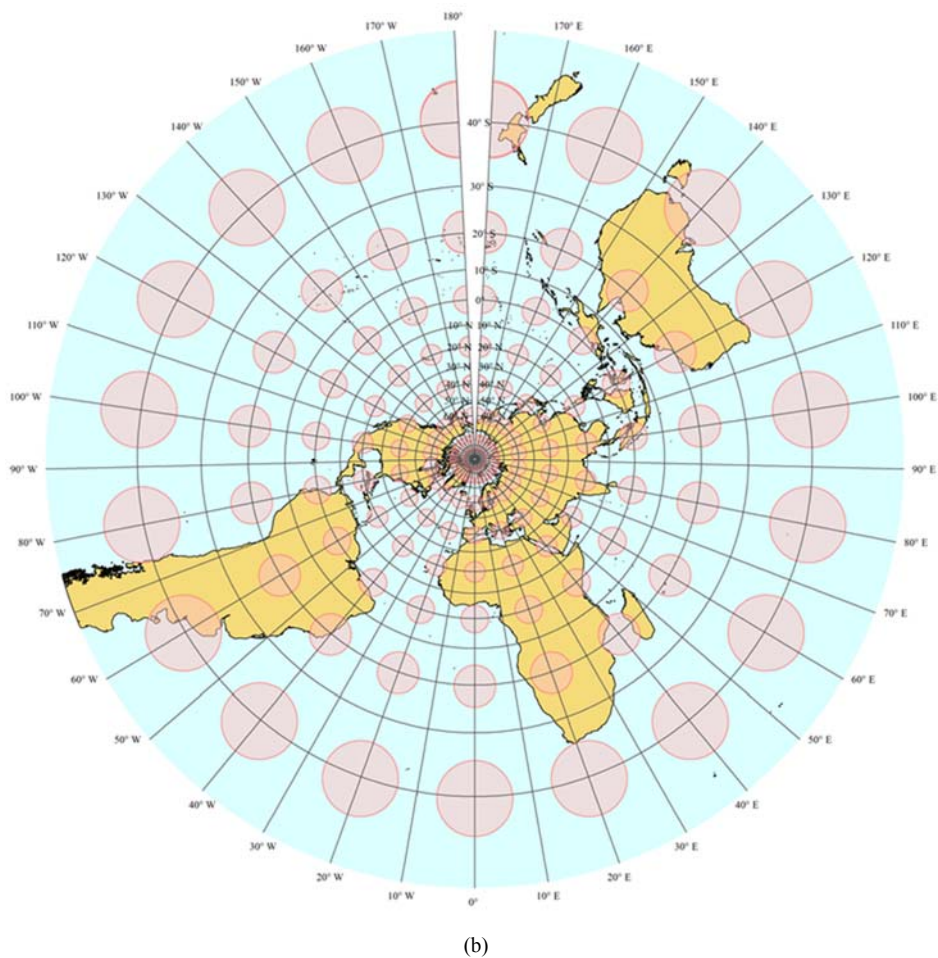
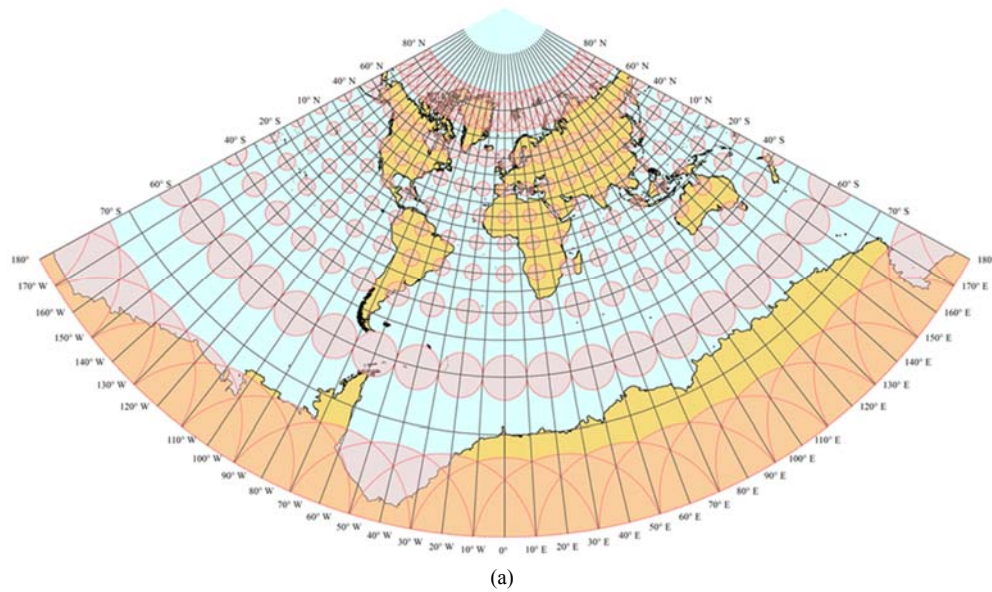


Figura 4.3.4. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección cónica conforme de Lambert con paralelo estándar 20°N (a) y paralelo estándar 80°N (b)

Al igual que en la figura 4.3.3, donde la deformación es mínima en las cercanías del meridiano estándar, en las figura 4.3.4 (a) y 4.3.4 (b) es mínima en las proximidades del paralelo estándar.

Como se pudo ver en las figuras 4.3.2, 4.3.3 y 4.3.4, cambiando en la proyección estereográfica de centro de proyección, la proyección transversa de Mercator de meridiano estándar y la cónica conforme de Lambert de paralelo estándar, siguen siendo conformes y se consigue que la deformación superficial quede controlada.

Si ahora se comparan la gnomónica con la estereográfica, ortográfica y acimutal equidistante, podría verse cuanto más se deforma una con respecto a otra. Las cuatro son proyecciones acimutales, las cuales varían de aspecto según el centro de proyección. En la figura 4.3.5 pueden verse dichas proyecciones en su aspecto polar.

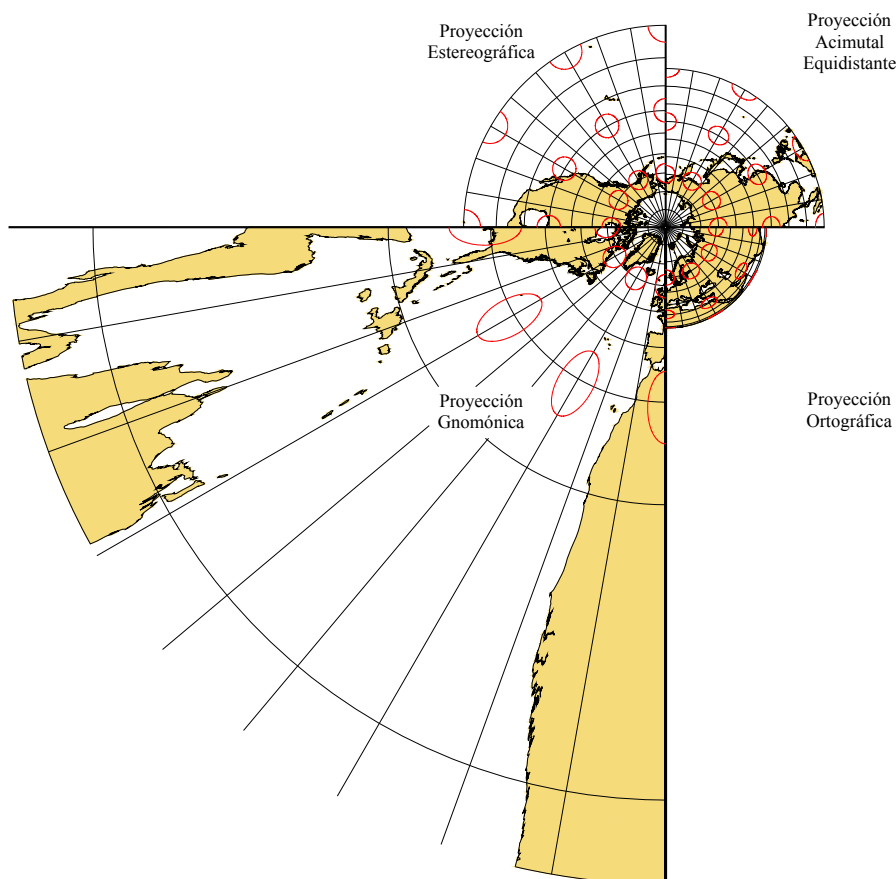


Figura 4.3.5. Comparación de las proyecciones acimutales equidistante, estereográfica, gnomónica y ortográfica, en su aspecto polar y a una misma escala.

De las cuatro proyecciones representadas en la figura 4.3.5, únicamente el centro de proyección está libre de deformación. Las deformaciones lineales y superficiales en las proyecciones acimutales equidistante, estereográfica y gnomónica dilatan los elementos del plano respecto a sus homólogos de la esfera al alejarse del centro de proyección, ocurriendo lo contrario en la ortográfica. También se puede ver, que la proyección gnomónica será la que mayores deformaciones presente, no cumpliendo con los requisitos de conformidad y deformación superficial mínima.

Si además, se comparan las tres proyecciones acimutales propuestas, sería la estereográfica la que mejor cumpliría los requisitos establecidos para una carta electrónica, por ser la única conforme y

por presentar una deformación moderada²⁷². La acimutal equidistante se descartaría, a priori, por no ser conforme y la ortográfica por presentar una deformación exagerada y tampoco cumplir con el requisito de conformidad.

Comparando las deformaciones de las diferentes proyecciones propuestas, lo primero que se busca es la conformidad y que la deformación superficial sea mínima, pero, también podría resultar interesante la proyección de Mollweide (figura 4.3.6) que siendo equiárea, la deformación angular en toda su extensión es lo suficientemente baja como para que las masas continentales conserven en esencia su forma.

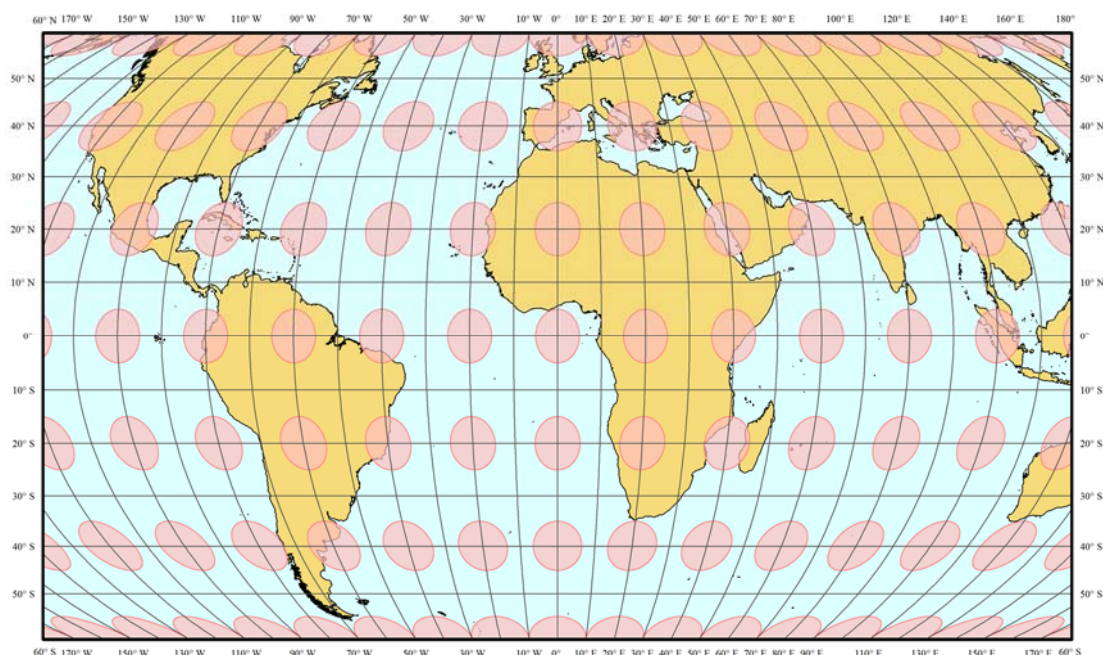


Figura 4.3.6. Representación de las elipses indicatrices de Tissot sobre una proyección de Mollweide con meridiano central el de Greenwich.

Como puede verse en la figura 4.3.6, las elipses de Tissot no degeneran en una circunferencia por no ser conforme, pero si se tomara el área de todas ellas se vería que tendrían la misma.

4.4. ESTUDIO Y ANÁLISIS COMPARATIVO DE LAS DERROTAS SOBRE LAS PROYECCIONES PROPUESTAS, MERCATOR Y GNOMÓNICA

En este epígrafe se realizará el análisis de las derrotas loxodrómica y ortodrómica sobre las proyecciones cartográficas propuestas en este capítulo y estudiadas en el capítulo dos: Mercator, transversa de Mercator, cónica conforme de Lambert, estereográfica, gnomónica, ortográfica, azimutal equidistante y Mollweide. Para el estudio y análisis comparativo se consideró hacerlo por orden supuesto de idoneidad y no seguir el orden de clasificación según la superficie proyectiva seguido en el capítulo dos. Este análisis se centrará en obtener las ecuaciones correspondientes a dichas derrotas sobre cada

²⁷² Si se compara el tamaño de las elipses de Tissot, a medida que se separan del centro de proyección puede verse en la figura 4.3.5 que la deformación es exagerada en la gnomónica y en la ortográfica, y moderada en la estereográfica y acimutal equidistante.

uno de los sistemas proyectivos, y a partir del cual será posible su representación gráfica mediante un programa de GIS.

En el estudio de la derrota loxodrómica se consideró conveniente obtener su ecuación en forma implícita, en función de las coordenadas cartesianas en el plano de proyección. Para ello, basta con tomar las funciones de transformación de coordenadas cartesianas en el plano a geográficas en la esfera de cada uno de los sistemas de proyección²⁷³ y sustituirlas en la ecuación general de la loxodrómica. También se realizará el análisis de la ecuación de la loxodrómica en forma paramétrica en función de la latitud, manteniendo como variables las coordenadas geográficas y jugando con las funciones de transformación de coordenadas geográficas en la superficie de referencia a cartesianas en el plano²⁷⁴.

Para el estudio de la derrota ortodrómica, al igual que en la loxodrómica, se consideró conveniente obtener su ecuación implícita, sustituyendo las funciones de transformación de coordenadas cartesianas a geográficas en la ecuación general de la ortodrómica y también las ecuaciones paramétricas en función de la latitud, manteniendo como variables las coordenadas geográficas²⁷⁵.

A la hora de representar gráficamente las derrotas sobre cada una de las proyecciones, se recurrirá a las trayectorias, tanto loxodrómica como ortodrómica, que pasen por los puertos de Norfolk y Burdeos.

4.4.1. Derrota loxodrómica y ortodrómica sobre la proyección de Mercator

4.4.1.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección de Mercator.

En la proyección Mercator una derrota loxodrómica se representa como una línea recta y la medición de ángulos puede realizarse directamente, ya que se trata de una proyección conforme.

4.4.1.1.1. Ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección de Mercator

Sustituyendo las funciones de transformación de coordenadas geográficas a cartesianas en la ecuación genérica de la loxodrómica, se obtienen la ecuación implícita sobre una carta de Mercator.

- Ecuación implícita de la loxodrómica (Tierra esférica)

Las funciones de transformación de coordenadas geográficas a cartesianas en el plano son (2.5.6):

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda - \lambda_0 \\ y &= \text{Ln} \, \text{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \right\}$$

²⁷³ Obtenidas en el capítulo segundo.

²⁷⁴ Desde un punto de vista práctico, las ecuaciones paramétricas en función de la latitud, serán las más útiles a la hora de representar gráficamente una derrota loxodrómica, por lo que no se realizará el desarrollo en función de la longitud. Para unificar criterios, tampoco se hará éste desarrollo en el caso de la ortodrómica.

²⁷⁵ López Varela, Pablo: Análisis de Idoneidad de las Derrotas empleadas en Navegación Marítima sobre las Proyecciones de Mercator, Gnomónica y Estereográfica. Tesis Doctoral, Departamento de Energía y Propulsión Marina, Universidad de A Coruña, 2005. P. 349.

La ecuación genérica de la loxodrómica sobre la esfera es²⁷⁶:

$$\lambda - \lambda_0 = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (4.4.1)$$

Sustituyendo las expresiones (2.5.6) en (4.4.1), se obtiene la expresión de su transformada sobre una carta de Mercator:

$$x + \lambda_0 - \lambda_0 = y \operatorname{tg} R$$

Y siendo $\Delta\lambda_{00} = \lambda_0 - \lambda_0$:

$$x + \Delta\lambda_{00} = y \operatorname{tg} R \quad (4.4.2)$$

Ecuación correspondiente a una recta en la forma $y = mx + n$, de pendiente:

$$m = \operatorname{cotg} R$$

Y ordenada en el origen:

$$n = -\Delta\lambda_{00} \operatorname{cotg} R$$

- Ecuación implícita de la loxodrómica (Tierra elipsoidal)

En la proyección de Mercator las funciones de transformación de coordenadas geográficas a cartesianas en el plano son (2.5.18):

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda - \lambda_0 \\ y &= \operatorname{Lntg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \end{aligned} \right\}$$

La ecuación de la loxodrómica sobre el elipsoide es²⁷⁷:

$$\lambda - \lambda_0 = \operatorname{tg} R \left[\operatorname{Lntg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \right] \quad (4.4.3)$$

Sustituyendo las expresiones (2.5.18) en (4.4.3), se obtiene la expresión de su transformada sobre una carta de Mercator, la misma que para Tierra esférica (4.4.2):

$$x + \Delta\lambda_{00} = y \operatorname{tg} R$$

²⁷⁶ Ribera Y Uruburu, Luis de: *Tratado de Navegación*, Imprenta y estereotipia de “El Correo Gallego”, Ferrol, 2ª edición 1907.

²⁷⁷ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington 1987. P. 47.

4.4.1.1.2. Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la proyección de Mercator

Las ecuaciones paramétricas en función de la latitud en la proyección de Mercator se obtienen fácilmente sustituyendo la expresión de la longitud despejada de la ecuación general de la loxodrómica en las funciones de paso de coordenadas geográficas a cartesianas.

- Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica (Tierra esférica)

La expresión de la longitud despejada de la ecuación general de la loxodrómica (4.4.1) es:

$$\lambda = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \lambda_0 \quad (4.4.4)$$

Sustituyendo (4.4.4) en (2.5.6):

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \lambda_0 - \lambda_o \\ y &= \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \\ \left. \begin{aligned} x &= \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{o0} \\ y &= \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.5) \end{aligned}$$

- Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica (Tierra elipsoidal)

Al igual que para el supuesto de Tierra esférica, las ecuaciones paramétricas en función de la latitud en la proyección de Mercator se obtienen fácilmente sustituyendo la expresión de la longitud despejada de la ecuación general de la loxodrómica para Tierra elipsoidal (4.4.3) en las funciones de paso de coordenadas geográficas a cartesianas en el plano (2.5.18):

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{tg} R \left[\operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \right] + \lambda_0 - \lambda_o \\ y &= \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \\ \left. \begin{aligned} x &= \operatorname{tg} R \left[\operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \right] + \Delta \lambda_{o0} \\ y &= \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.6) \end{aligned}$$

4.4.1.1.3. Representación gráfica de la loxodrómica en la proyección de Mercator

Uniendo dos puntos cualquiera de una carta de Mercator mediante una línea recta, se obtiene la transformada de la derrota loxodrómica que los une.

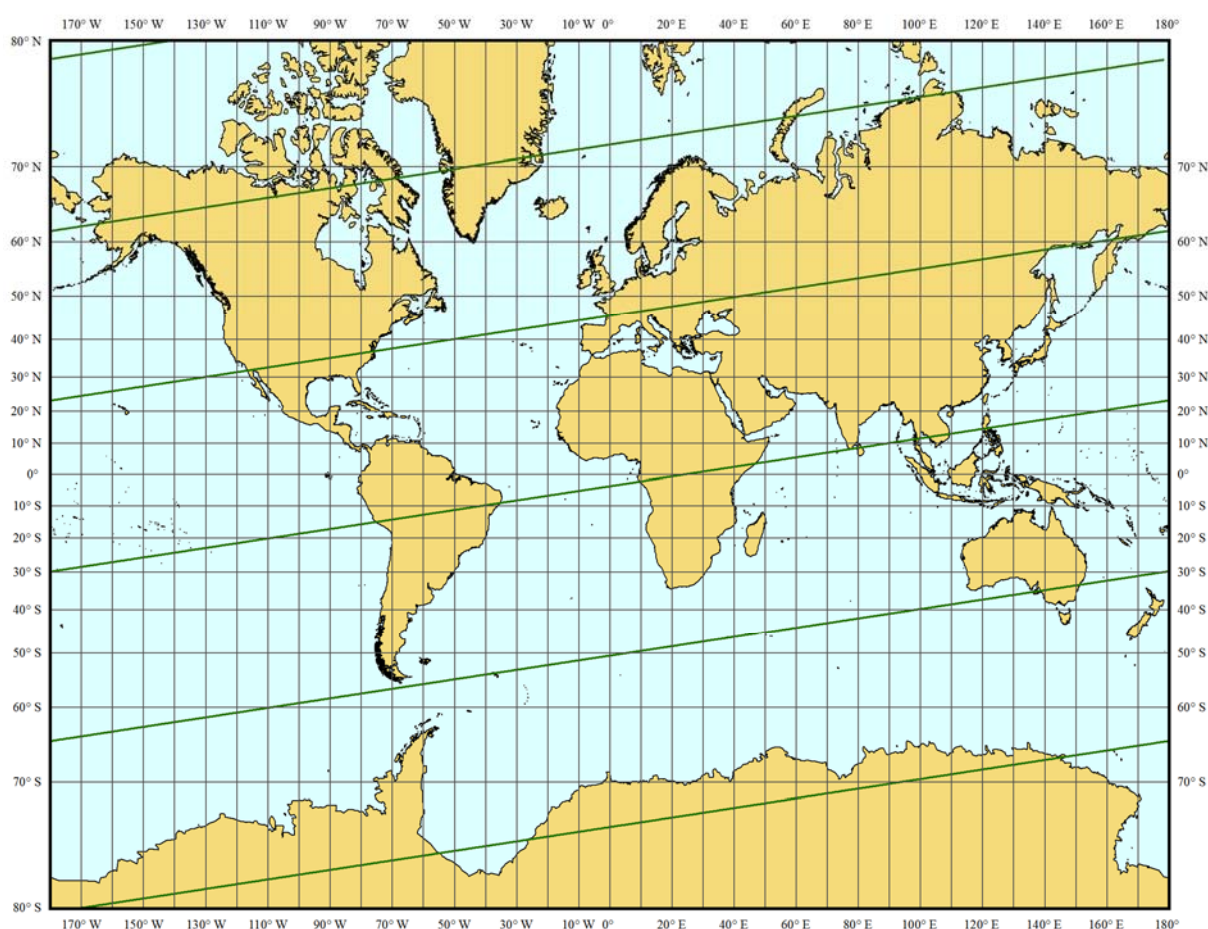


Figura 4.4.1. Loxodrómica sobre una proyección de Mercator entre los paralelos de 80°N y 80°S.

4.4.1.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección de Mercator

Una derrota ortodrómica se define como la trayectoria más corta entre dos puntos de la Tierra. Si ésta se considera con forma esférica, la ortodrómica coincidirá con un círculo máximo de ella. Si se considera la superficie terrestre como un elipsoide de revolución, la distancia más corta entre dos puntos de la misma será lo que se conoce como línea geodésica. Sin embargo, el elipsoide de revolución considerado tendrá una excentricidad tan pequeña, que las geodésicas tienden a confundirse con elipses máximas, resultado de la intersección con el elipsoide de revolución de un plano que pase por su centro²⁷⁸. Como ejemplo, se demuestra que para dos puntos separados una distancia de aproximadamente un cuarto de la longitud del ecuador (unas 5.400 millas), las distancias medidas sobre la geodésica y la elipse máxima se separan del orden de 1/500.000²⁷⁹, por lo que los cálculos de distancias, rumbos y situaciones geográficas intermedias pueden realizarse considerando una

²⁷⁸ Wei-Kuo Tseng, Jiunn-Liang Guo, and Chung-Ping Liu: "A comparison of great circle, great ellipse, and geodesic sailing", *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 21, No. 3, pp. 287-299, 2013. P. 289.

²⁷⁹ Sobre esta cuestión: Bowring, B. R.: "The direct and inverse solutions for the great elliptic line on the reference ellipsoid". *Bulletin Géodésique*, Vol. 58, Issue 1, pp. 101-108, marzo 1984; Williams, R.: "The Great Ellipse on the Surface of the Spheroid". *Journal of Navigation*, Vol. 49, Issue 2, pp. 229-234, mayo 1996; Walwyn, P. R.: "The Great Ellipse Solution for Distances and Headings to Steer between Waypoints". *Journal of Navigation*, Vol 53, Issue 3, pp. 421-424, septiembre 1999.

navegación sobre elipse máxima para poder simplificar las fórmulas involucradas²⁸⁰. La ecuación de una elipse máxima del tipo descrito coincidirá con la conocida²⁸¹ (4.4.7)²⁸², sin que ello introduzca un error sensible en la representación gráfica de la misma sobre el plano de proyección.

4.4.1.2.1. Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección de Mercator

- Ecuación implícita de la ortodrómica (Tierra esférica)

Las expresiones genéricas de latitud y longitud de las funciones de transformación de coordenadas cartesianas en el plano a geográficas en la esfera (2.5.8):

$$\begin{aligned}\lambda &= x + \lambda_o \\ \varphi &= 90^\circ - 2 \arctg e^{-y}\end{aligned}$$

La ecuación de la ortodrómica sobre la esfera es²⁸³:

$$\tan \varphi = \tan \beta \operatorname{sen}(\lambda - \alpha) \quad (4.4.7)$$

Con lo que sustituyendo las expresiones (2.5.8) en la ecuación de la ortodrómica (4.4.7):

$$\operatorname{tg}(90^\circ + 2 \arctg e^{-y}) = \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen}[x + (\lambda_o - \alpha)] \quad (4.4.8)$$

Expresión que corresponde a la ecuación implícita de la transformada de una ortodrómica de constantes α y β .

- Ecuación implícita de la ortodrómica (Tierra elipsoidal)

Las funciones de transformación de coordenadas cartesianas a geográficas en el elipsoide son (2.5.20):

$$\begin{aligned}\lambda &= x + \lambda_o \\ \varphi &= 90^\circ - 2 \arctg \left[e^{-y} \left(\frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]\end{aligned}$$

La ecuación de la ortodrómica sobre el elipsoide es (4.4.7):

$$\tan \varphi = \tan \beta \operatorname{sen}(\lambda - \alpha)$$

Con lo que sustituyendo las expresiones (2.5.20) en la ecuación anterior, se obtiene la ecuación implícita de la ortodrómica sobre el elipsoide:

²⁸⁰ Pallikaris, A. and Latsas, G., "New algorithm for great elliptic sailing (GES)," *Journal of Navigation*, Vol. 62, pp. 493-507 (2009).

²⁸¹ Wei-Kuo Tseng; Hsuan-Shih Lee: "Navigation on a great ellipse", *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 18, No. 3, pp. 369-375, 2010, p. 373; Wei-Kuo Tseng, Jiunn-Liang Guo, and Chung-Ping Liu: "A comparison of great circle, great ellipse, and geodesic sailing", *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 21, No. 3, pp. 287-299, 2013. P. 291.

²⁸² Tengase en cuenta que en este caso el cálculo de la latitud de los vértices así como la longitud de los nodos no pueden obtenerse mediante las fórmulas tradicionales de trigonometría esférica.

²⁸³ Millán Gamboa, José Manuel: *Cartografía náutica*, JM Ediciones Cádiz, 2006. P. 148.

$$\operatorname{tg} \left\{ 90^\circ - 2 \arctg \left[e^{-y} \left(\frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right] \right\} = \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen} [x + (\lambda_o - \alpha)] \quad (4.4.9)$$

4.4.1.2.2. Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección de Mercator

- Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica (Tierra esférica)

Las ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección de Mercator se obtienen sustituyendo el valor de la longitud²⁸⁴ despejada de la expresión genérica de la ortodrómica, en las funciones de transformación de coordenadas geográficas a cartesianas propias de la proyección (2.5.6).

La ecuación de la longitud despejada de la expresión genérica de la ortodrómica (4.4.7) es:

$$\lambda = \alpha + \arcsen(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) \quad (4.4.10)$$

Sustituyendo (4.4.10) en (2.5.6):

$$\left. \begin{aligned} x &= \arcsen(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o \\ y &= \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.11)$$

- Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica (Tierra elipsoidal)

Al igual que para la Tierra esférica, las ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección de Mercator se obtienen sustituyendo el valor de la longitud²⁸⁵ despejada de la expresión genérica de la ortodrómica (4.4.10), en las funciones de transformación de coordenadas geográficas a cartesianas propias de la proyección (2.5.18).

Sustituyendo (4.4.10) en (2.5.18):

$$\left. \begin{aligned} x &= \arcsen(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o \\ y &= \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.12)$$

4.4.1.2.3. Representación gráfica de la ortodrómica sobre la proyección de Mercator

En la proyección Mercator una derrota ortodrómica se representa por una línea curva, lo que hace que sea un problema a la hora de su utilización práctica para uso náutico, excepto en los casos particulares de navegación por ecuador o meridianos.

²⁸⁴ El valor de la longitud despejada de la expresión genérica de la ortodrómica (4.4.7) es:

$$\lambda = \alpha + \arcsen(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta)$$

Dicha expresión viene dada en función de sus constantes α , que es la longitud del punto de corte de la ortodrómica con el ecuador, y β que es el ángulo de inclinación del plano de la ortodrómica en ese punto.

²⁸⁵

En la figura 4.4.2 se puede ver la línea ortodrómica sobre la proyección Mercator entre los paralelos de 80° N y 80° S.

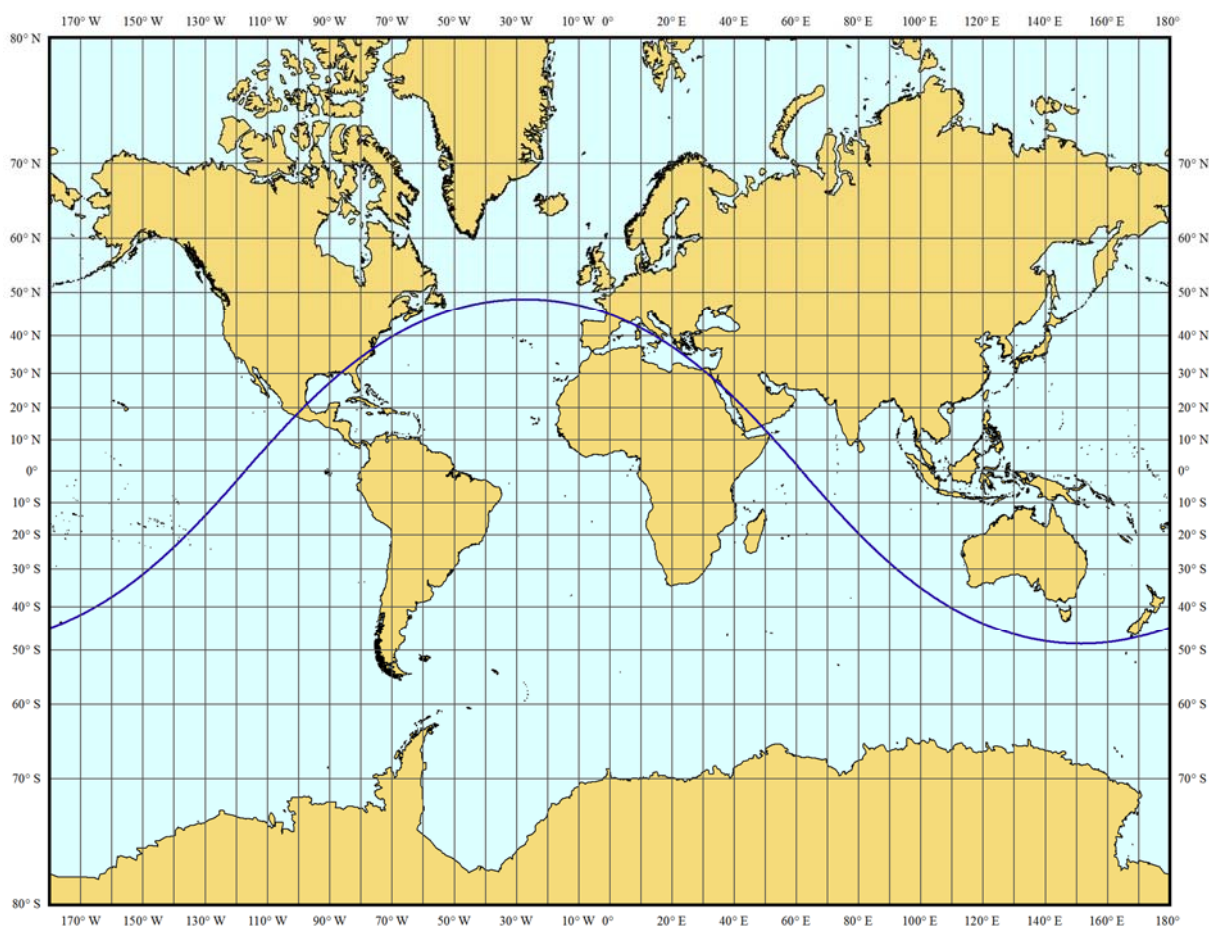


Figura 4.4.2. Ortodrómica sobre una proyección de Mercator entre los paralelos de 80° N y 80° S.

4.4.2. Derrota loxodrómica y ortodrómica sobre la proyección gnomónica

4.4.2.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección gnomónica

Al igual que en Mercator y en las proyecciones de las cuales se hablará posteriormente, se buscará la expresión característica en coordenadas rectangulares sobre el plano de proyección, de una derrota loxodrómica genérica definida por dos variables: el rumbo (R) y la longitud del punto de corte de la derrota con el ecuador (λ_0)²⁸⁶. Para ello, bastará con sustituir en la expresión de la loxodrómica sobre la esfera, los valores de latitud φ y longitud λ definidos por las funciones de transformación de coordenadas cartesianas en el plano a geográficas (2.5.110), (2.5.111), (2.5.112), y (2.5.113) para la gnomónica horizontal, polar y transversa. Sin embargo, las ecuaciones así obtenidas, salvo para los supuestos polares, presentan una complicación excesiva para su representación gráfica. Se verá que resultará más útil el planteamiento de la obtención de la ecuación de la loxodrómica en proyección desde un punto de vista paramétrico. Para ello bastará con sustituir en las expresiones de transformación de

²⁸⁶ En base al criterio de símbolos adoptado en la presente tesis, debe tenerse la precaución de no confundir λ_0 (longitud del punto de corte de la derrota loxodrómica con el ecuador), con λ_o (longitud del centro de la proyección).

coordenadas geográficas a cartesianas en el plano (2.5.104), (2.5.105), (2.5.106) y (2.5.107) para la gnomónica horizontal, polar y transversa respectivamente, el valor de la longitud λ o de la latitud φ , despejado de la ecuación de la loxodrómica sobre la esfera.

Desde un punto de vista práctico, las ecuaciones paramétricas en función de la latitud, serán las más útiles a la hora de representar gráficamente una derrota loxodrómica, por lo que no se realizará el desarrollo en función de la longitud.

4.4.2.1.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección gnomónica horizontal

- Ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección gnomónica horizontal

Considerando la ecuación de una loxodrómica genérica (4.4.1), las funciones de transformación de coordenadas cartesianas en el plano a geográficas en la esfera (2.5.110) y la longitud de corte de la loxodrómica con el ecuador λ_0 :

$$\lambda_0 = \lambda_o + \operatorname{arctg}\left(\frac{x_0}{\cos \varphi_o - y_0 \operatorname{sen} \varphi_o}\right) \quad (4.4.13)$$

Donde (x_0, y_0) corresponden a las coordenadas en el plano de proyección de la transformada del punto de corte de la loxodrómica con el ecuador²⁸⁷, y donde ρ y ρ_0 vienen dados por (2.5.53):

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \rho_0 &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

Tanto en este caso como en el resto de ecuaciones implícitas de la loxodrómica que se obtengan posteriormente para las diferentes proyecciones, puede que no resulte útil desarrollar el factor λ_0 en la forma expuesta en (4.4.13), ya que es posible que no se conozcan sus coordenadas cartesianas en el plano. Se llamará $\Delta\lambda_{o0}$ a la diferencia de longitud entre el meridiano de corte de la loxodrómica con el ecuador y el del centro de la proyección ($\Delta\lambda_{o0} = \lambda_0 - \lambda_o$).

De esta forma, sustituyendo los valores de (2.5.110) en la ecuación de una loxodrómica (4.4.1), se obtiene:

$$\begin{aligned} &\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\cos \varphi_o - y \operatorname{sen} \varphi_o}\right) - \Delta\lambda_{o0} \\ &= \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left\{ 45^\circ + \frac{\operatorname{arcsen} \left[\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} (\operatorname{sen} \varphi_o + y \cos \varphi_o) \right]}{2} \right\} \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

Ecuación que también podría expresarse desarrollando el valor de ρ , dado por (2.5.53):

²⁸⁷ Coordenadas que pueden calcularse fácilmente conociendo el valor de λ_0 , y con las expresiones (2.5.104).

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\cos \varphi_0 - y \operatorname{sen} \varphi_0} \right) - \Delta \lambda_{00} \\
 & = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left\{ 45^\circ + \frac{\operatorname{arcsen} \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} (\operatorname{sen} \varphi_0 + y \cos \varphi_0) \right]}{2} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

- Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la proyección gnomónica horizontal

Para la obtención de las ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la proyección estereográfica horizontal, se sustituirá la expresión de la longitud despejada de la ecuación de la misma sobre la esfera (4.4.4), en las fórmulas de paso de coordenadas geográficas a cartesianas (2.5.104), donde la diferencia de longitud $\Delta \lambda$ se refiere a la diferencia de longitudes respecto al meridiano del centro de la proyección ($\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$):

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\cos \varphi \operatorname{sen} \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{00} \right]}{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{00} \right]} \\
 y &= \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{00} \right]}{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{00} \right]}
 \end{aligned} \tag{4.4.17}$$

- Representación gráfica de la loxodrómica en la proyección gnomónica horizontal

Toda loxodrómica de la esfera se representará en el plano como un conjunto de curvas, con una o dos ramas asintótica; salvo en el supuesto en que la derrota coincida con un meridiano o un paralelo, caso en el cual su representación vendrá determinada por una línea recta o una sección cónica. Es lógico que en las proyecciones gnomónicas, al representarse sólo el hemisferio donde se ubica el centro de proyección, tan sólo tendrá representación aquellos tramos de la loxodrómica que se encuentren sobre dicho hemisferio.

En la figura 4.4.3 se puede ver una loxodrómica en una proyección estereográfica horizontal con centro en $\varphi_0 = 30^\circ \text{ N}$, $\lambda_0 = 030^\circ \text{ W}$.

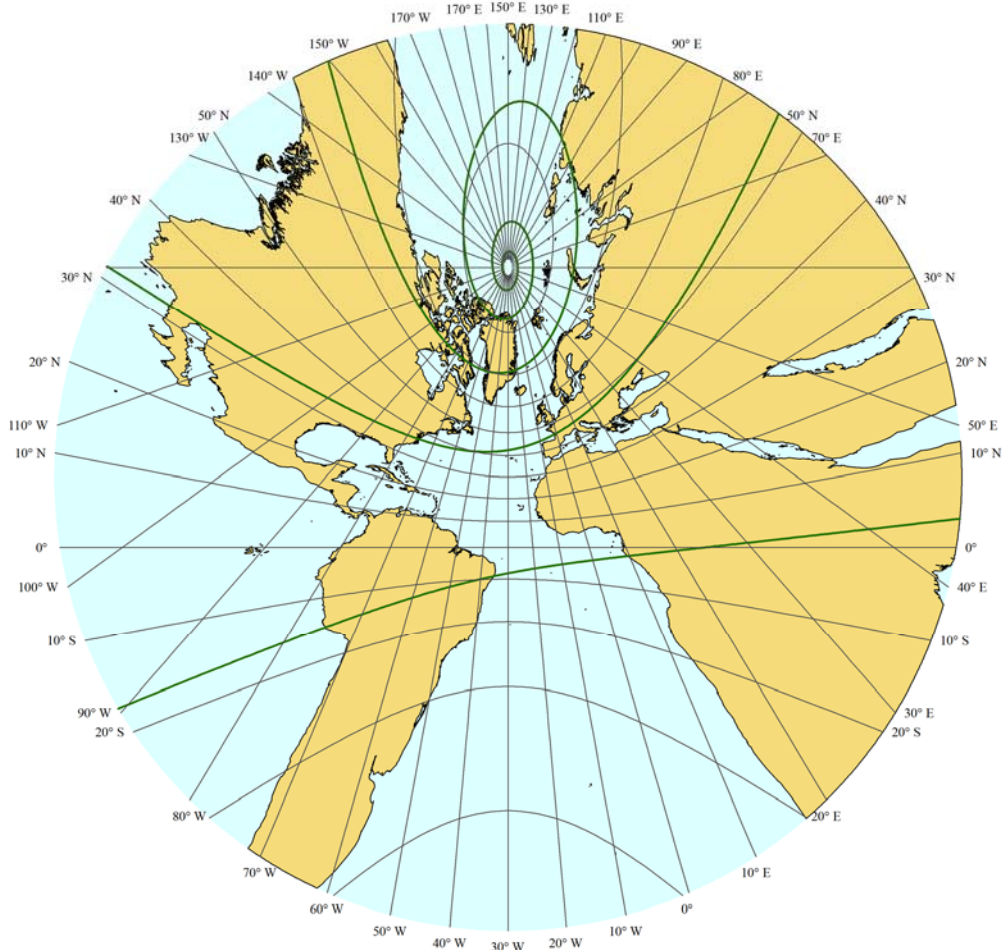


Figura 4.4.3. Representación de la loxodrómica en una proyección gnomónica horizontal con centro en: $\phi_0 = 30^\circ N$, $\lambda_0 = 30^\circ W$.

4.4.2.1.2. Derrota loxodrómica sobre la proyección gnomónica polar

- Ecuación implícita de la loxodrómica sobre la proyección gnomónica polar

Particularizando la ecuación de la loxodrómica en la proyección gnomónica horizontal para $\phi_0 = \pm 90^\circ$, se obtienen las ecuaciones en la estereográfica polar.

Para una proyección gnomónica polar donde $\phi_0 = +90^\circ$ (Polo Norte), se obtiene de (4.4.15) que la ecuación de la transformada de una loxodrómica responde a la forma:

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{x}{y}\right) - \Delta\lambda_{o0} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\right)\right] \quad (4.4.18)$$

Y desarrollando el valor de ρ (2.5.53):

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{x}{y}\right) - \Delta\lambda_{o0} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)\right] \quad (4.4.19)$$

Para una proyección gnomónica polar donde $\phi_0 = -90^\circ$ (Polo Sur), se obtiene de (4.4.15):

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \Delta\lambda_{o0} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left[45^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \left(\frac{-1}{\sqrt{1+\rho^2}} \right) \right] \quad (4.4.20)$$

Y desarrollando el valor de ρ (2.5.53):

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \Delta\lambda_{o0} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left[45^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \left(\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right) \right] \quad (4.4.21)$$

Donde, de (4.4.13):

$$\Delta\lambda_{o0} = \lambda_0 - \lambda_o = \operatorname{arctg} \left(-\frac{x_0}{y_0} \right)$$

- Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica sobre la proyección gnomónica polar

Para la parametrización de la ecuación de la loxodrómica en la proyección gnomónica polar, se considerará el caso como una particularización del aspecto horizontal; para ello, se sustituirá la $\varphi_o = \pm 90^\circ$ en las expresiones paramétricas obtenidas para la proyección gnomónica horizontal (4.4.17).

La expresión paramétrica de una derrota loxodrómica sobre una proyección gnomónica polar, en función de la latitud, y cuando $\varphi_o = +90^\circ$ (Polo Norte) es:

$$\left. \begin{aligned} x &= \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{sen} \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right] \\ y &= -\operatorname{cotg} \varphi \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.22)$$

Mientras que para $\varphi_o = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\left. \begin{aligned} x &= -\operatorname{cotg} \varphi \operatorname{sen} \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right] \\ y &= -\operatorname{cotg} \varphi \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.23)$$

- Representación gráfica de la loxodrómica sobre la proyección gnomónica polar

En una proyección gnomónica polar la representada de una loxodrómica será una espiral de tipo hiperbólico, con una asíntota coincidente con la transformada del círculo máximo que corta el ecuador en el mismo punto en que lo haga la loxodrómica considerada; salvo en los casos particulares de coincidencia con un meridiano o un paralelo, en los cuales se representaría por una línea recta o una circunferencia, respectivamente.

En la figura 4.4.4 puede verse una loxodrómica sobre una gnomónica polar con centro en el Polo Norte:

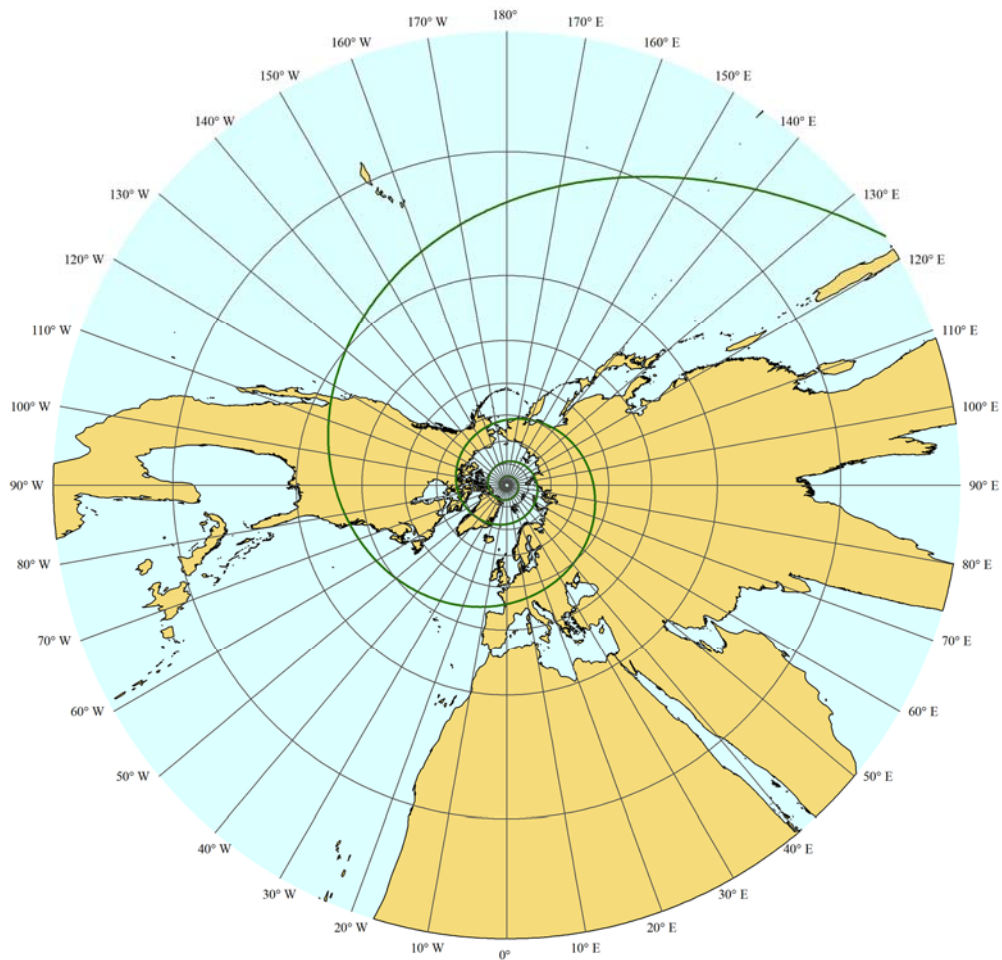


Figura 4.4.4. Representación de la loxodrómica en una proyección gnomónica polar con centro en: $\varphi_0 = 90^\circ N$.

4.4.2.1.3. Derrota loxodrómica sobre la proyección gnomónica transversa

- Ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección gnomónica transversa

Particularizando la ecuación de la loxodrómica en la proyección gnomónica horizontal (4.4.15) para $\varphi_0 = 0^\circ$, se obtienen las ecuaciones en la gnomónica transversa:

$$\arctg x - \Delta\lambda_{00} = \text{tg } R \text{ Ln tg} \left[45^\circ + \frac{\arcsen\left(\frac{y}{\sqrt{1+\rho^2}}\right)}{2} \right] \quad (4.4.24)$$

O desarrollando el valor de ρ (2.5.53):

$$\arctg x - \Delta\lambda_{00} = \text{tg } R \text{ Ln tg} \left[45^\circ + \frac{\arcsen\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)}{2} \right] \quad (4.4.25)$$

Donde, de (4.4.13):

$$\Delta\lambda_{00} = \lambda_0 - \lambda_o = \arctg x_0$$

- Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la proyección gnomónica transversa

Al igual que para la gnomónica polar se considerará el aspecto transversa como una particularización del horizontal; sustituyendo en este caso $\varphi_o = 0^\circ$, en las ecuaciones obtenidas para la gnomónica horizontal. Así, para el aspecto transversa, de (4.4.17) se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} x &= \operatorname{tg} \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{00} \right] \\ y &= \operatorname{tg} \varphi \sec \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{00} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.26)$$

- Representación gráfica de la loxodrómica en la proyección gnomónica transversa

La representación de una loxodrómica de la esfera en una proyección gnomónica transversa, se le puede aplicar lo expuesto en el aspecto horizontal, con la particularidad de que en este caso, cuando el centro de la proyección coincide con el de corte de la derrota con el ecuador, la representada tendrá una simetría inversa respecto a la transformada del ecuador.

En la figura (4.4.5) puede verse la transformada de una loxodrómica sobre una proyección gnomónica transversa con centro de proyección en $\varphi_o = 00^\circ$ y $\lambda_o = 000^\circ$.

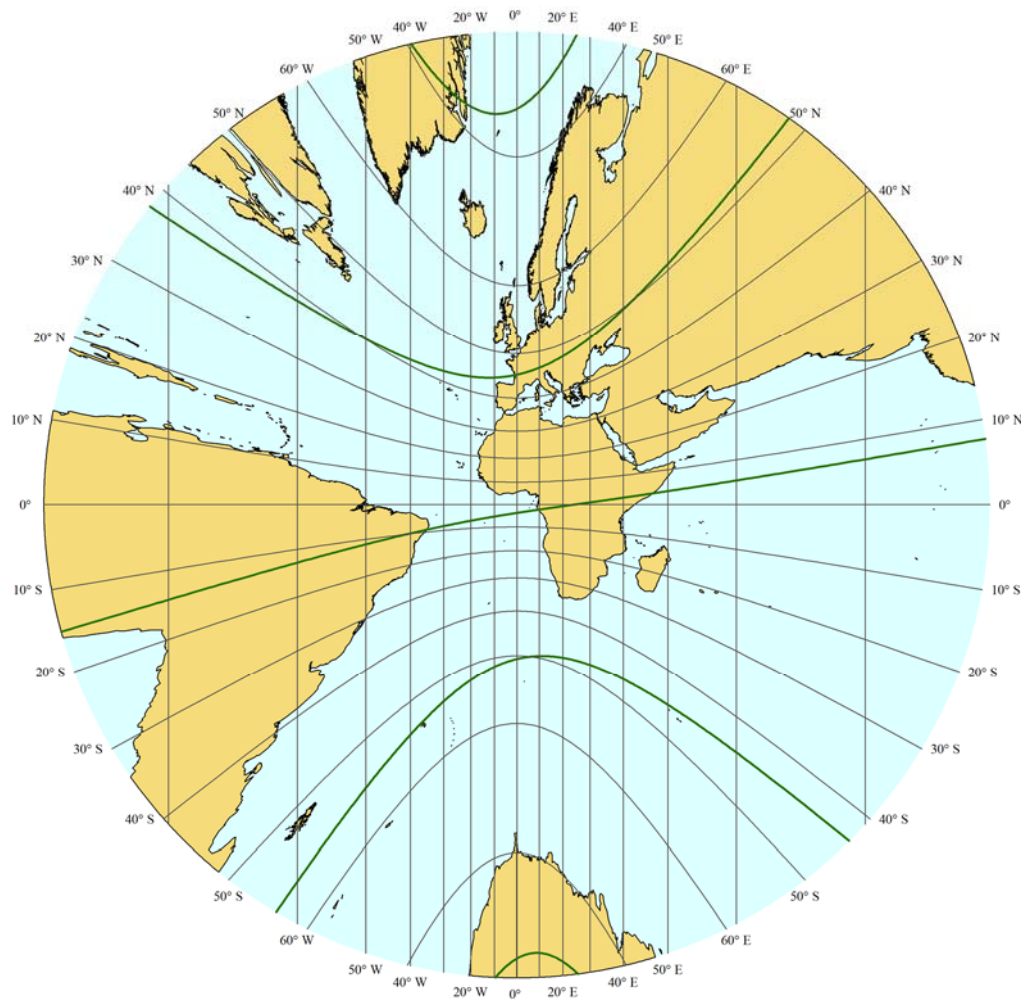


Figura 4.4.5. Representación de la loxodrómica en una proyección gnomónica transversa con centro en: $\varphi_0 = 00^\circ$, $\lambda = 000^\circ$.

4.4.2.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección gnomónica

Como se mencionó en el epígrafe 2.5.6.2, cualquier arco de círculo máximo se representa en el plano como una línea recta, por ello, la proyección de una ortodrómica sobre la proyección gnomónica es una recta. Por este motivo, este tipo de representación es de utilidad para la planificación de las derrota ortodrómicas, aunque las cartas de este tipo son de punto menor, por lo que no sirven para navegaciones de precisión y recaladas²⁸⁸.

²⁸⁸ Millán Gamboa, José Manuel: *Cartografía náutica*, JM Ediciones Cádiz, 2006. P.214

4.4.2.2.1. Derrota ortodrómica sobre la proyección gnomónica horizontal

- Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección gnomónica horizontal

La deducción de la ecuación implícita de la ortodrómica se obtendrá sustituyendo las funciones de transformación de coordenadas cartesianas a geográficas (2.5.110), en la ecuación trascendente de la ortodrómica (4.4.7) en la forma expuesta a continuación:

$$\tan \varphi = A \operatorname{sen} \lambda - B \cos \lambda \quad (4.4.27)$$

Donde:

$$\left. \begin{aligned} A &= \cos \alpha \operatorname{tg} \beta \\ B &= \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \right\} \quad (4.4.28)$$

Para una proyección gnomónica horizontal, de (2.5.110) se tiene:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} (\operatorname{sen} \varphi_0 + y \cos \varphi_0)$$

Por tanto, en orden a obtener la tangente de la latitud para su sustitución en (4.4.27):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{(\operatorname{sen} \varphi_0 + y \cos \varphi_0)}{\sqrt{(1+\rho^2) - (\operatorname{sen} \varphi_0 + y \cos \varphi_0)^2}} \quad (4.4.29)$$

Operando nuevamente en (2.5.110) con el fin de obtener las expresiones del seno y el coseno de la longitud para su sustitución en (4.4.26):

$$\lambda = \lambda_0 + \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\cos \varphi_0 - y \operatorname{sen} \varphi_0} \right)$$

Tomando a efectos de simplificación un ángulo auxiliar C, tal que:

$$\lambda = \lambda_0 + C$$

$$C = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\cos \varphi_0 - y \operatorname{sen} \varphi_0} \right) \quad (4.4.30)$$

De este modo:

$$\operatorname{tg} C = \frac{x}{\cos \varphi_0 - y \operatorname{sen} \varphi_0}$$

Con lo cual se puede escribir:

$$\operatorname{sen} C = \frac{\operatorname{tg} C}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 C}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (\cos \varphi_0 - y \operatorname{sen} \varphi_0)^2}} \quad (4.4.31)$$

$$\cos C = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 C}} = \frac{\cos \varphi_0 - y \operatorname{sen} \varphi_0}{\sqrt{x^2 + (\cos \varphi_0 - y \operatorname{sen} \varphi_0)^2}} \quad (4.4.32)$$

Para obtener el valor del seno y del coseno de la longitud, bastará con sustituir los valores hallados del seno y del coseno del ángulo auxiliar C (4.4.31) y (4.4.32) en las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} \lambda &= \operatorname{sen}(\lambda_o + C) = \operatorname{sen} \lambda_o \cos C + \operatorname{sen} C \cos \lambda_o \\ \cos \lambda &= \cos(\lambda_o + C) = \cos \lambda_o \cos C - \operatorname{sen} \lambda_o \operatorname{sen} C \end{aligned} \right\} \quad (4.4.33)$$

Teniendo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \lambda &= \operatorname{sen} \lambda_o \frac{\cos \varphi_o - y \operatorname{sen} \varphi_o}{\sqrt{x^2 + (\cos \varphi_o - y \operatorname{sen} \varphi_o)^2}} + \cos \lambda_o \frac{x}{\sqrt{x^2 + (\cos \varphi_o - y \operatorname{sen} \varphi_o)^2}} \\ \operatorname{sen} \lambda &= \frac{\operatorname{sen} \lambda_o (\cos \varphi_o - y \operatorname{sen} \varphi_o) + x \cos \lambda_o}{\sqrt{x^2 + (\cos \varphi_o - y \operatorname{sen} \varphi_o)^2}} \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \cos \lambda_o \frac{\cos \varphi_o - y \operatorname{sen} \varphi_o}{\sqrt{x^2 + (\cos \varphi_o - y \operatorname{sen} \varphi_o)^2}} - \operatorname{sen} \lambda_o \frac{x}{\sqrt{x^2 + (\cos \varphi_o - y \operatorname{sen} \varphi_o)^2}} \\ \cos \lambda &= \frac{\cos \lambda_o (\cos \varphi_o - y \operatorname{sen} \varphi_o) - x \operatorname{sen} \lambda_o}{\sqrt{x^2 + (\cos \varphi_o - y \operatorname{sen} \varphi_o)^2}} \end{aligned} \quad (4.4.35)$$

Sustituyendo finalmente las expresiones (4.4.29), (4.4.34) y (4.4.35) en la ecuación de la ortodrómica en la forma (4.4.27):

$$\begin{aligned} \frac{(\operatorname{sen} \varphi_o + y \cos \varphi_o)}{\sqrt{(1 + \rho^2) - (\operatorname{sen} \varphi_o + y \cos \varphi_o)^2}} &= A \frac{\operatorname{sen} \lambda_o (\cos \varphi_o - y \operatorname{sen} \varphi_o) + x \cos \lambda_o}{\sqrt{x^2 + (\cos \varphi_o - y \operatorname{sen} \varphi_o)^2}} \\ &\quad - B \frac{\cos \lambda_o (\cos \varphi_o - y \operatorname{sen} \varphi_o) - x \operatorname{sen} \lambda_o}{\sqrt{x^2 + (\cos \varphi_o - y \operatorname{sen} \varphi_o)^2}} \end{aligned} \quad (4.4.36)$$

Sustituyendo A y B por sus valores (4.4.28), agrupando términos y simplificando se tiene:

$$y = -x \frac{\operatorname{tg} \beta \cos(\alpha - \lambda_o)}{\operatorname{tg} \beta \operatorname{sen} \varphi_o \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_o) - \cos \varphi_o} + \frac{\operatorname{tg} \beta \cos \varphi_o \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_o) + \operatorname{sen} \varphi_o}{\operatorname{tg} \beta \operatorname{sen} \varphi_o \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_o) - \cos \varphi_o} \quad (4.4.37)$$

La expresión anterior corresponde a la transformada de una derrota ortodrómica de constantes β y α sobre una proyección gnomónica horizontal, y como puede observarse se corresponde con la de una recta en su forma genérica: $y = xm + n$. De este modo, puede concluirse que toda ortodrómica se transformará en la proyección estereográfica horizontal en una recta cuya pendiente m , y la ordenada de corte con la transformada del meridiano del centro de proyección n , responderán a las expresiones:

$$m = - \frac{\operatorname{tg} \beta \cos(\alpha - \lambda_o)}{\operatorname{tg} \beta \operatorname{sen} \varphi_o \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_o) - \cos \varphi_o} \quad (4.4.38)$$

$$n = \frac{\operatorname{tg} \beta \cos \varphi_o \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_o) + \operatorname{sen} \varphi_o}{\operatorname{tg} \beta \operatorname{sen} \varphi_o \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_o) - \cos \varphi_o} \quad (4.4.39)$$

- ***Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección gnomónica horizontal***

Para obtener las ecuaciones paramétricas se substituirá el valor de la longitud despejada de la ortodrómica (4.4.10), en las fórmulas de paso de coordenadas geográficas a cartesianas (2.5.104). Considerando $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o$:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\cos \varphi \operatorname{sen} [\arcsen (\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o]}{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos [\arcsen (\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o]} \\ y &= \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi_o - \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi_o \cos [\arcsen (\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o]}{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos [\arcsen (\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o]} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.40)$$

- ***Representación gráfica de la ortodrómica en la proyección gnomónica horizontal***

Sobre una proyección gnomónica todo círculo máximo de la esfera se proyectará según una línea recta²⁸⁹, como puede verse en la siguiente figura:

²⁸⁹ Debido a que su plano contendrá siempre al punto de origen de las visuales (vértice).

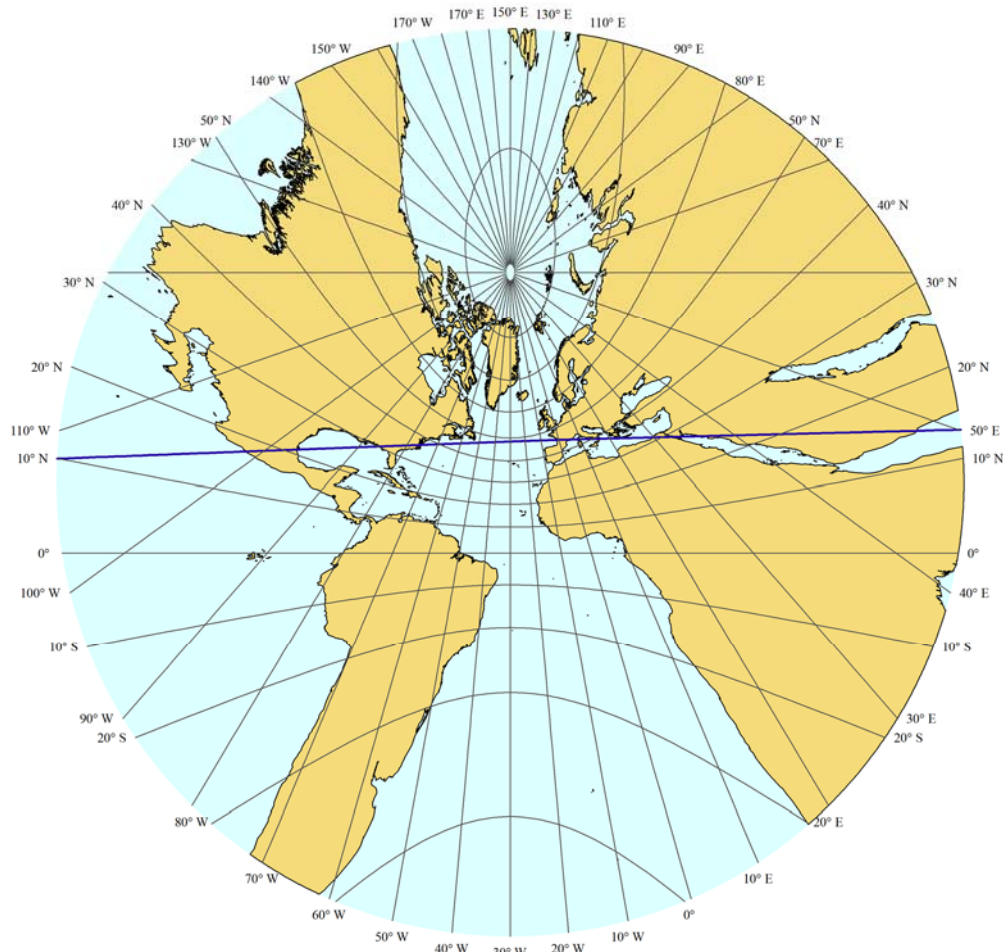


Figura 4.4.6. Representación de la ortodrómica en una proyección gnomónica horizontal con centro en: $\varphi_0 = 30^\circ N$, $\lambda_0 = 30^\circ W$.

4.4.2.2.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección gnomónica polar

- Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección gnomónica polar

La ecuación implícita de la derrota ortodrómica en la gnomónica polar se obtiene particularizando el aspecto horizontal para $\varphi_0 = \pm 90^\circ$.

Considerando en primer lugar una proyección gnomónica polar donde $\varphi_0 = +90^\circ$ (Polo Norte) se obtiene de (4.4.37) que la ecuación de la transformada de una ortodrómica será:

$$y = -x \cotg(\alpha - \lambda_0) + \cotg \beta \operatorname{cosec}(\alpha - \lambda_0) \quad (4.4.41)$$

Ecuación que corresponderá a la de una recta cuya pendiente m , vendrá dada por la expresión:

$$m = -\cotg(\alpha - \lambda_0) \quad (4.4.42)$$

Y la ordenada de corte con la transformada del meridiano del centro de proyección n :

$$n = \cotg \beta \operatorname{cosec}(\alpha - \lambda_0) \quad (4.4.43)$$

Para una proyección gnomónica polar donde $\varphi_0 = -90^\circ$ (Polo Sur), la ecuación de la ortodrómica será:

$$y = x \cotg(\alpha - \lambda_o) + \cotg \beta \operatorname{cosec}(\alpha - \lambda_o) \quad (4.4.44)$$

Como puede observarse, la recta representativa de la ortodrómica tendrá la misma expresión determinante de la ordenada en el origen n que (4.4.43), pero su pendiente tendrá signo opuesto al determinado por (4.4.42), es decir:

$$m = \cotg(\alpha - \lambda_o) \quad (4.4.45)$$

$$n = \cotg \beta \operatorname{cosec}(\alpha - \lambda_o) \quad (4.4.46)$$

- Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección gnomónica polar

Para la parametrización de la ecuación de la ortodrómica en la proyección gnomónica polar, se particularizará el aspecto horizontal para este caso, sustituyendo $\varphi_o = \pm 90^\circ$ en las expresiones paramétricas obtenidas para la gnomónica horizontal.

Para una proyección gnomónica polar donde $\varphi_o = +90^\circ$ (Polo Norte) se obtiene de (4.4.40) que las ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en función de la latitud adoptarán la forma:

$$\left. \begin{aligned} x &= \cotg \varphi \operatorname{sen} [\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o] \\ y &= -\cotg \varphi \cos [\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.47)$$

Y para $\varphi_o = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\left. \begin{aligned} x &= -\cotg \varphi \operatorname{sen} [\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o] \\ y &= -\cotg \varphi \cos [\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.48)$$

- Representación gráfica de la ortodrómica en la proyección gnomónica polar

Al igual que en el aspecto horizontal, la derrota ortodrómica se proyectará como una línea recta, tal y como puede verse en la siguiente figura:

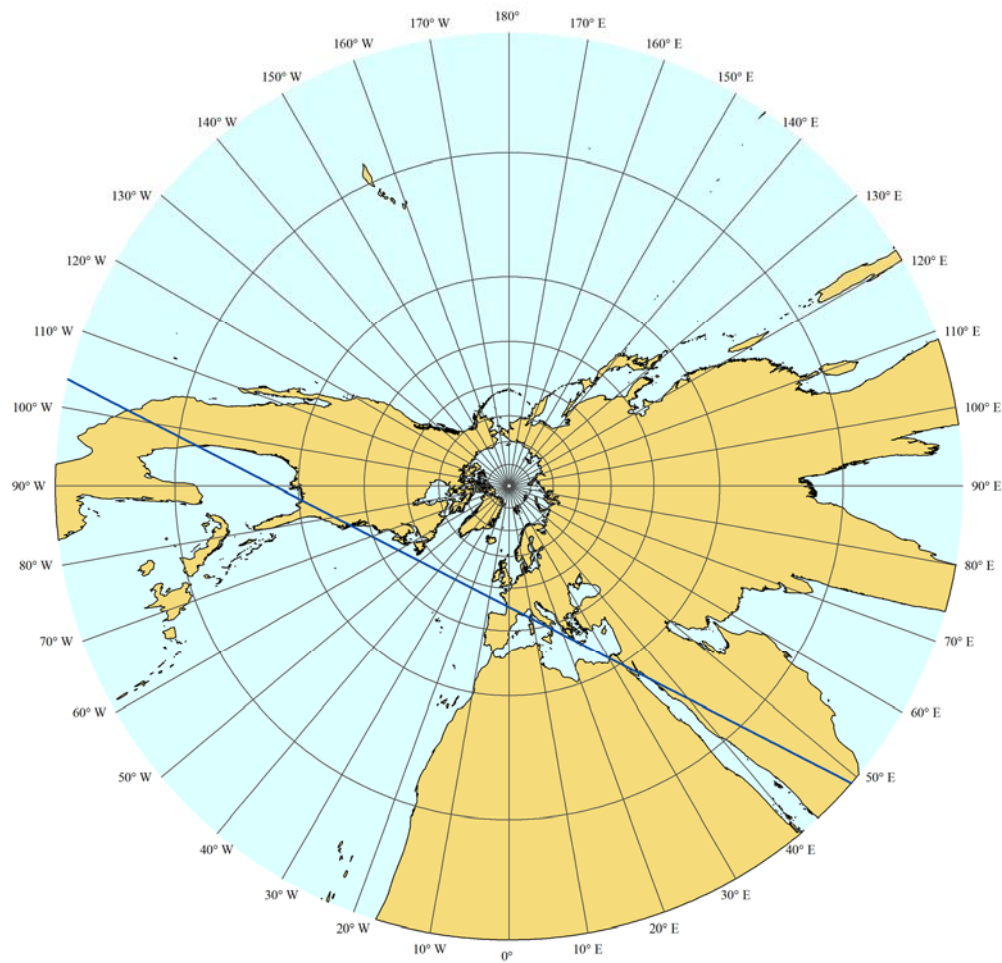


Figura 4.4.7. Representación de la ortodrómica en una proyección gnomónica polar con centro en: $\varphi_0 = 90^\circ N$.

4.4.2.2.3. Derrota ortodrómica sobre la proyección gnomónica transversa

- Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección gnomónica transversa

Al igual que para el aspecto polar, particularizando la ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección gnomónica horizontal (4.4.37) para $\varphi_0 = 0^\circ$, se obtiene:

$$y = x \operatorname{tg} \beta \cos(\alpha - \lambda_0) - \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_0) \quad (4.4.49)$$

Ecuación implícita de una derrota ortodrómica de constantes β y α sobre una proyección gnomónica transversa que corresponde con la expresión de una recta cuya pendiente m , responderá a la expresión:

$$m = \operatorname{tg} \beta \cos(\alpha - \lambda_0) \quad (4.4.50)$$

Y la ordenada de corte con la transformada del meridiano del centro de proyección n , vendrá dada por:

$$n = -\operatorname{tg} \beta \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_0) \quad (4.4.51)$$

- **Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección gnomónica transversa**

Para obtener las ecuaciones paramétricas de una derrota ortodrómica en una proyección gnomónica transversa, bastará con sustituir $\varphi_o = 0^\circ$, en las expresiones homónimas determinadas en el supuesto horizontal (4.4.40):

$$\left. \begin{aligned} x &= \operatorname{tg} [\arcsen(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o] \\ y &= \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos [\arcsen(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o]} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.52)$$

- **Representación gráfica de la ortodrómica en la proyección gnomónica transversa**

Al igual que en los otros aspectos, la representación de una ortodrómica en la proyección gnomónica transversa es una línea recta, como puede verse en la siguiente figura:

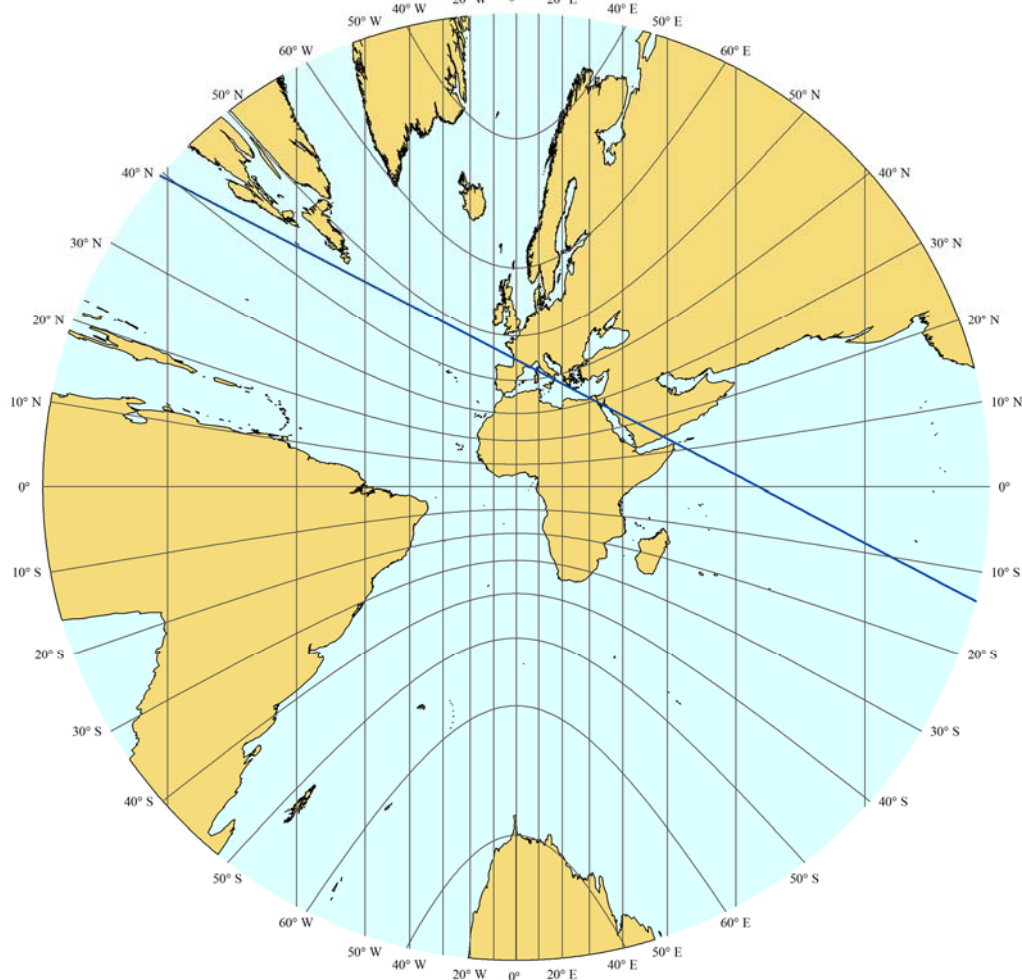


Figura 4.4.8. Representación de la ortodrómica en una proyección gnomónica transversa con centro en: $\varphi_o = 00^\circ$ y $\lambda_o = 000^\circ$.

4.4.3. Derrota loxodrómica y ortodrómica sobre la proyección estereográfica

A la hora de desarrollar las ecuaciones de la loxodrómica y ortodrómica sobre cada uno de los aspectos de la proyección estereográfica, se seguirá un proceso análogo al empleado para la proyección gnomónica, cambiando únicamente las funciones de transformación propias del sistema proyectivo.

4.4.3.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección estereográfica

4.4.3.1.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección estereográfica horizontal

- Ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección estereográfica horizontal

Al igual que para la proyección gnomónica, sustituyendo las expresiones que en una proyección estereográfica horizontal proporcionan los valores genéricos de latitud φ y longitud λ (2.5.85) en la ecuación de una loxodrómica (4.4.1), se obtiene²⁹⁰:

$$\begin{aligned} & \arctg \left[\frac{4x}{(4-\rho^2)\cos\varphi_o - 4y\sin\varphi_o} \right] - \Delta\lambda_{o0} = \\ & = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left\{ 45^\circ + \frac{1}{2} \arcsen \left\{ \frac{1}{4+\rho^2} \left[(4-\rho^2)\sin\varphi_o + 4y\cos\varphi_o \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4.4.53)$$

Expresión que se corresponde con la ecuación genérica de una loxodrómica sobre una proyección estereográfica horizontal.

También podría expresarse desarrollando los valores de ρ , dado por (2.5.53):

$$\begin{aligned} & \arctg \left[\frac{4x}{(4-x^2-y^2)\cos\varphi_o - 4y\sin\varphi_o} \right] - \Delta\lambda_{o0} \\ & = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left\{ 45^\circ + \frac{1}{2} \arcsen \left\{ \frac{1}{4+x^2+y^2} \left[(4-x^2-y^2)\sin\varphi_o + 4y\cos\varphi_o \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4.4.54)$$

- Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la proyección estereográfica horizontal

Para la obtención de las ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la proyección estereográfica horizontal, se seguirá el mismo procedimiento que en la proyección gnomónica, sustituyéndose la ecuación de la longitud despejada de la ecuación de la loxodrómica (4.4.4) en las expresiones de transformación de coordenadas geográficas a cartesianas (2.5.79). De este modo, se obtiene:

²⁹⁰ Téngase en cuenta que para estas expresiones $\Delta\lambda_{o0} = \lambda_o - \lambda_o$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2 \cos \varphi \operatorname{sen} \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \lambda_0 - \lambda_o \right]}{1 + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \lambda_0 - \lambda_o \right]} \\ y &= \frac{2 \left\{ \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi_o - \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi_o \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \lambda_0 - \lambda_o \right] \right\}}{1 + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \lambda_0 - \lambda_o \right]} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.55)$$

Y llamando $\Delta\lambda_{o0}$ a la diferencia de longitud entre el meridiano de corte de la loxodrómica con el ecuador y el del centro de la proyección ($\Delta\lambda_{o0} = \lambda_0 - \lambda_o$):

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2 \cos \varphi \operatorname{sen} \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right]}{1 + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right]} \\ y &= \frac{2 \left\{ \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi_o - \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi_o \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right] \right\}}{1 + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right]} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.56)$$

- Representación gráfica de la loxodrómica en la proyección estereográfica horizontal

La transformada de la loxodrómica será una curva, excepto en los casos puntuales de coincidencia con meridianos y paralelos.

Como el vértice de proyección se encuentra sobre el plano de desvanecimiento, salvo el caso concreto en que la loxodrómica a considerar pase por él²⁹¹, todos los puntos de la derrota serían representables en la carta²⁹².

En la figura 4.4.9, se puede ver una loxodrómica en una proyección estereográfica horizontal con centro en $\varphi_o = 30^\circ \text{ N}$, $\lambda_o = 030^\circ \text{ W}$.

²⁹¹ En este caso la representada de la loxodrómica tendrá como asíntota la representada del círculo máximo que pase por el vértice de proyección y cuyo rumbo en dicho punto coincida con el de la loxodrómica a representar.

²⁹² Aunque, como resulta obvio, si la derrota pasara por las proximidades del vértice se necesitaría un cuadro de considerables dimensiones, como puede observarse en el estudio de la deformación lineal realizado para este sistema proyectivo.

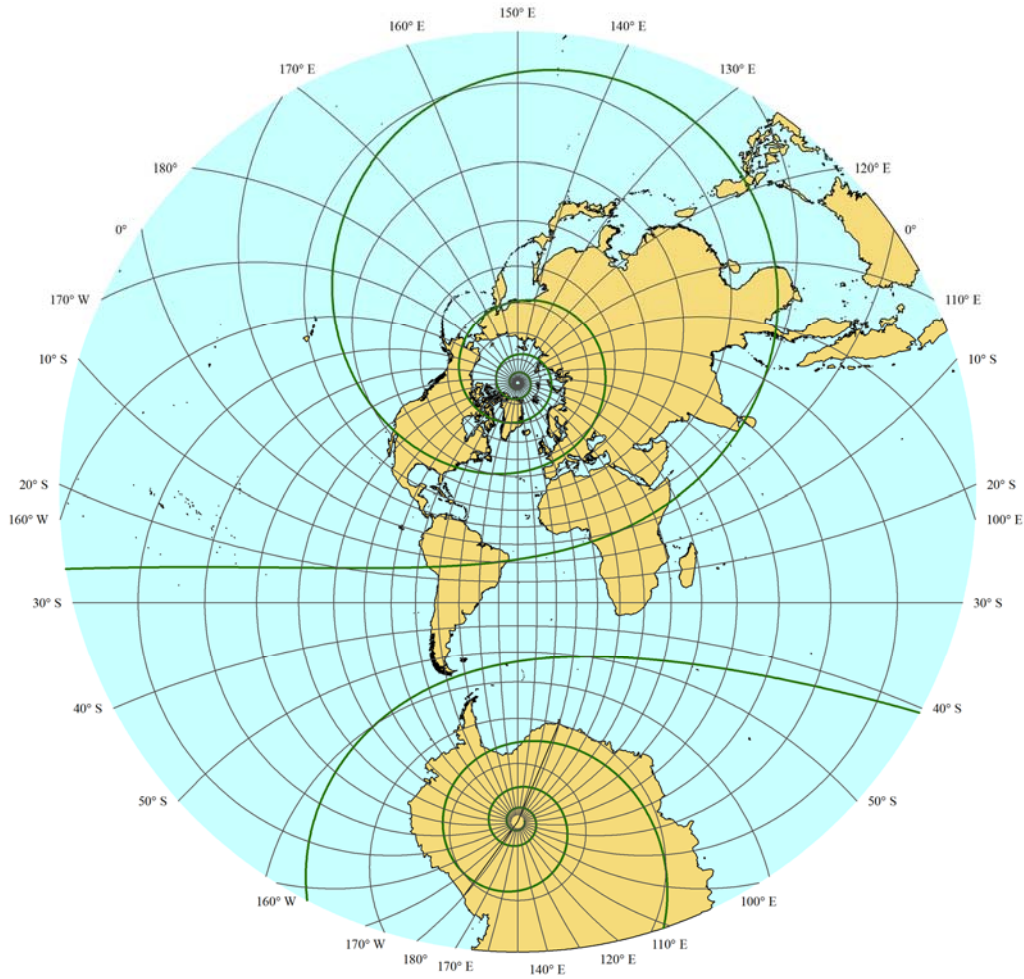


Figura 4.4.9. Representación de la loxodrómica en una proyección estereográfica horizontal con centro en: $\varphi_0 = 30^\circ N$, $\lambda_0 = 030^\circ W$.

4.4.3.1.2. Derrota loxodrómica sobre la proyección estereográfica polar

- Ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección estereográfica polar

Particularizando la ecuación de la loxodrómica en la proyección estereográfica horizontal para $\varphi_0 = \pm 90^\circ$, se obtienen las ecuaciones en la estereográfica polar.

Para una proyección estereográfica polar donde $\varphi_0 = \pm 90^\circ$ (Polo Norte) se obtiene de (4.4.53) que la ecuación genérica de la transformada de una loxodrómica es:

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{x}{y}\right) - \Delta\lambda_{00} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{4 - \rho^2}{4 + \rho^2}\right)\right] \quad (4.4.57)$$

Y desarrollando los valores de ρ (2.5.53):

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{x}{y}\right) - \Delta\lambda_{00} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{4 - x^2 - y^2}{4 + x^2 + y^2}\right)\right] \quad (4.4.58)$$

Para una proyección estereográfica polar donde $\varphi_0 = -90^\circ$ (Polo Sur) se obtiene de (4.4.53):

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \Delta\lambda_{o0} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left[45^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \left(\frac{-4 + \rho^2}{4 + \rho^2} \right) \right] \quad (4.4.59)$$

Y desarrollando el valor de ρ (2.5.53):

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \Delta\lambda_{o0} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left[45^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \left(\frac{-4 + x^2 + y^2}{4 + x^2 + y^2} \right) \right] \quad (4.4.60)$$

- Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la proyección estereográfica polar

Al igual que en la proyección gnomónica, se obtendrán las ecuaciones paramétricas en su aspecto polar como un caso particular del horizontal. Para ello, se sustituirá $\varphi_0 = \pm 90^\circ$ en las expresiones paramétricas obtenidas para la proyección estereográfica horizontal (4.4.55).

La expresión paramétrica de una derrota loxodrómica sobre una proyección estereográfica polar, en función de la latitud, y cuando $\varphi_0 = +90^\circ$ (Polo Norte), es:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2 \cos \varphi \operatorname{sen} \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right]}{1 + \operatorname{sen} \varphi} \\ y &= \frac{-2 \cos \varphi \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right]}{1 + \operatorname{sen} \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.61)$$

Mientras que para $\varphi_0 = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2 \cos \varphi \operatorname{sen} \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right]}{1 - \operatorname{sen} \varphi} \\ y &= \frac{2 \cos \varphi \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right]}{1 - \operatorname{sen} \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.62)$$

- Representación gráfica de la loxodrómica en la proyección estereográfica polar

La transformada de la loxodrómica sobre una proyección estereográfica polar adoptará la forma de una espiral logarítmica, salvo en los supuestos particulares de coincidencia con un paralelo, donde se representará como una circunferencia, o con un meridiano, representándose como una recta.

En la siguiente figura puede verse una loxodrómica en una proyección estereográfica polar:

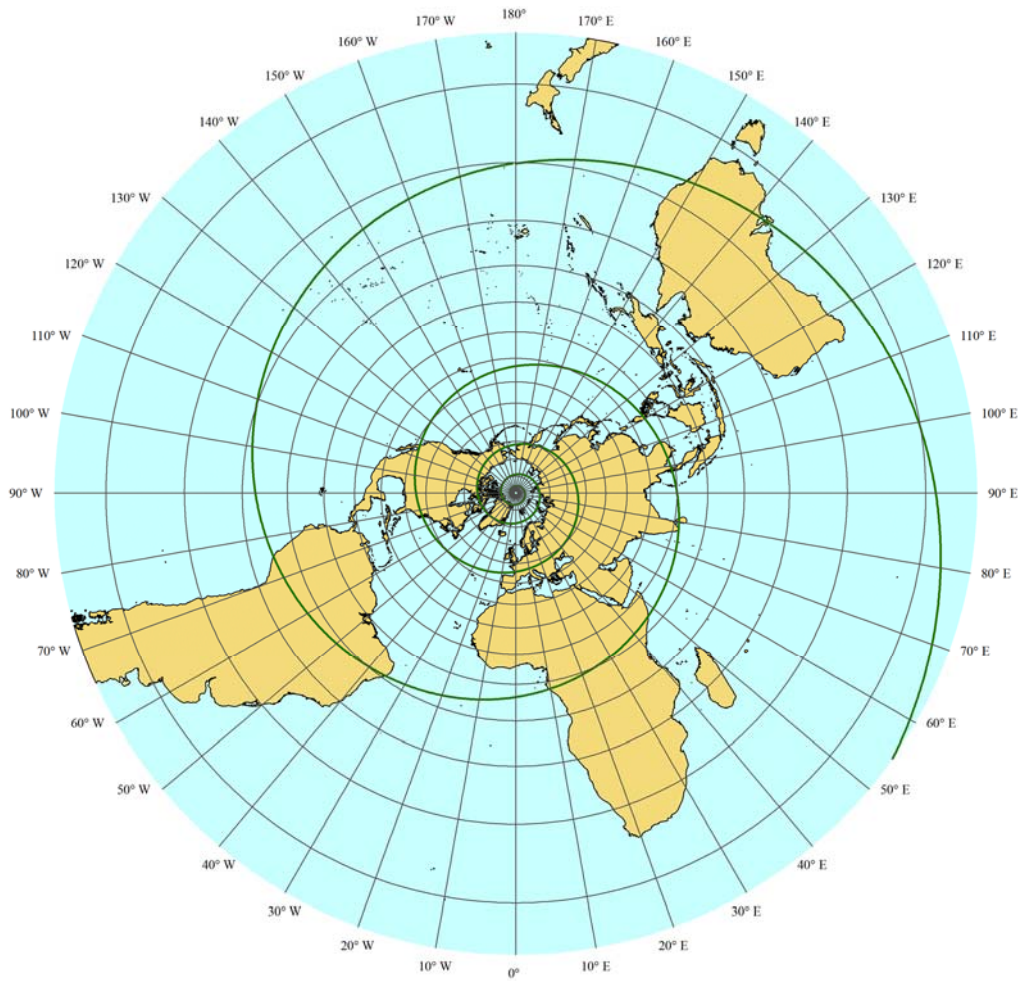


Figura 4.4.10. Representación de la loxodrómica en una proyección estereográfica polar con centro en: $\varphi_0 = 90^\circ N$.

4.4.3.1.3. Derrota loxodrómica sobre la proyección transversa

- Ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección estereográfica transversa

Particularizando la ecuación de la loxodrómica en la proyección estereográfica horizontal para $\varphi_0 = 0^\circ$, se obtienen las ecuaciones para el aspecto transversa.

De este modo, considerando la igualdad $\varphi_0 = 0^\circ$, se obtiene fácilmente de (4.4.53) la ecuación genérica de la transformada de una loxodrómica sobre una proyección estereográfica transversa:

$$\arctg\left(\frac{4x}{4-\rho^2}\right) - \Delta\lambda_{00} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{4y}{4+\rho^2}\right)\right] \quad (4.4.63)$$

Y desarrollando el valor de ρ (2.5.53):

$$\arctg\left(\frac{4x}{4-x^2-y^2}\right) - \Delta\lambda_{00} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{4y}{4+x^2+y^2}\right)\right] \quad (4.4.64)$$

- Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la proyección estereográfica transversa

Al igual que para el aspecto polar, se considerará el caso como una particularización del aspecto horizontal. En este caso se sustituirá $\varphi_0 = 0^\circ$, en las expresiones paramétricas obtenidas para la proyección horizontal (4.4.55). Así, para la proyección estereográfica transversa, se obtiene²⁹³:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2 \cos \varphi \operatorname{sen} \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{o0} \right]}{1 + \cos \varphi \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{o0} \right]} \\ y &= \frac{2 \operatorname{sen} \varphi}{1 + \cos \varphi \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{o0} \right]} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.65)$$

- Representación gráfica de la loxodrómica en la proyección estereográfica transversa

Al igual que en el aspecto horizontal, la representada en el plano de una loxodrómica sobre la esfera será una curva, con la particularidad de que cuando el punto de corte de ésta con el ecuador coincida con el del centro de la proyección o con el del punto de vista, la curva presentará una simetría central respecto a dicho centro. Además, en este último supuesto, es decir, cuando $\lambda_0 = 180^\circ \pm \lambda_o$, la representada del ecuador será una asíntota de la curva, ya que ambas ramas (las de cada uno de los hemisferios) lo cortarán en el plano de desvanecimiento.

En la figura 4.4.11 puede verse la forma que adopta la loxodrómica en una proyección estereográfica transversa.

²⁹³ Téngase en cuenta que para estas expresiones: $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_o$, $\Delta \lambda_{o0} = \lambda_0 - \lambda_o$.

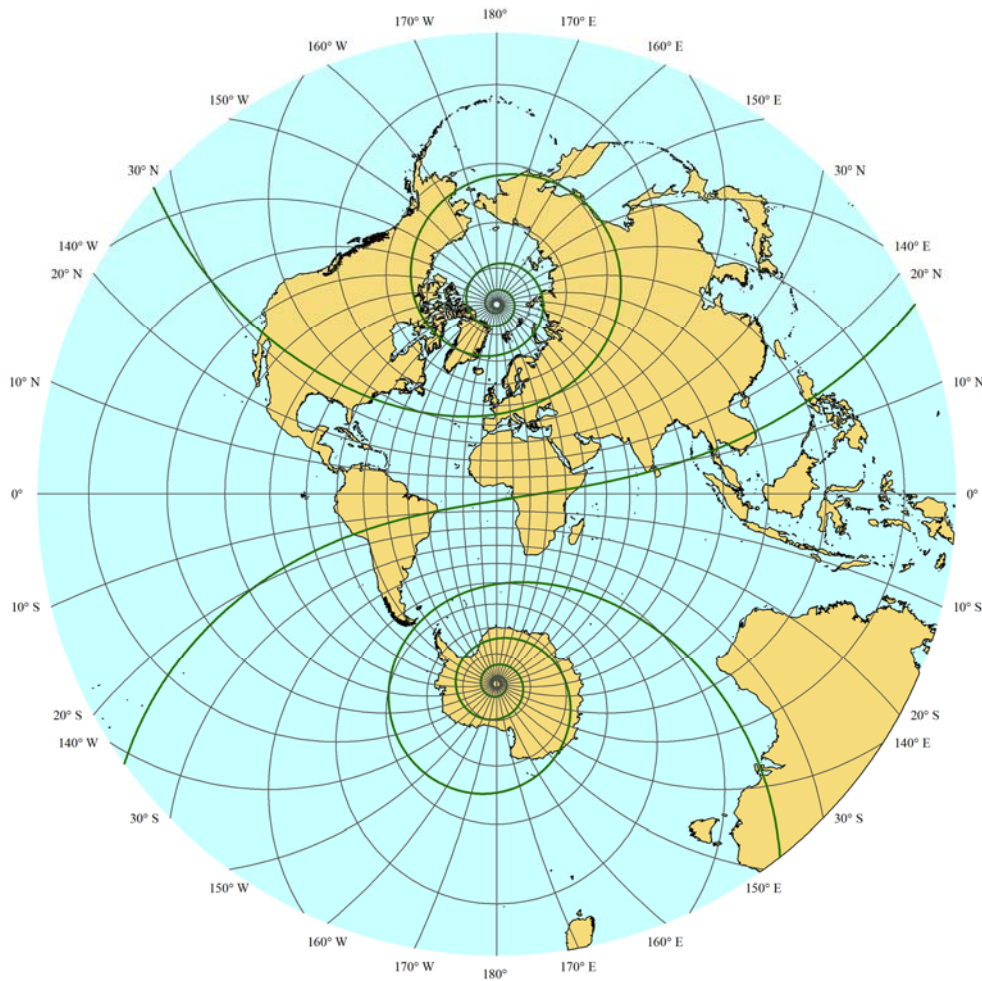


Figura 4.4.11. Representación de la loxodrómica en una proyección estereográfica transversa con centro en: $\varphi_0 = 00^\circ$, $\lambda_0 = 000^\circ$.

4.4.3.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección estereográfica

4.4.3.2.1. Derrota ortodrómica sobre la proyección estereográfica horizontal

- Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección estereográfica horizontal

Al igual que para la proyección gnomónica, la deducción de la ecuación implícita de una ortodrómica sobre una proyección estereográfica horizontal, bastará con considerar las funciones de transformación de coordenadas cartesianas a geográficas (2.5.85) en la ecuación trascendente de la ortodrómica (4.4.7).

Operando en las funciones de transformación de coordenadas cartesianas a geográficas (2.5.85):

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{1}{4 + \rho^2} \left[(4 - \rho^2) \operatorname{sen} \varphi_0 + 4 y \cos \varphi_0 \right]$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{\frac{(4 - \rho^2) \operatorname{sen} \varphi_0 + 4 y \cos \varphi_0}{4 + \rho^2}}{\sqrt{1 - \left[\frac{(4 - \rho^2) \operatorname{sen} \varphi_0 + 4 y \cos \varphi_0}{(4 + \rho^2)} \right]^2}} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{(4 - \rho^2) \operatorname{sen} \varphi_0 + 4 y \cos \varphi_0}{\sqrt{(4 + \rho^2)^2 - [(4 - \rho^2) \operatorname{sen} \varphi_0 + 4 y \cos \varphi_0]^2}} \end{aligned} \quad (4.4.66)$$

Y en orden a obtener las expresiones del seno y el coseno de la longitud (igualmente de 2.5.85):

$$\lambda = \lambda_0 + \operatorname{arctg} \left[\frac{4x}{(4 - \rho^2) \cos \varphi_0 - 4y \operatorname{sen} \varphi_0} \right]$$

Donde tomando a efectos de simplificación un ángulo auxiliar C, tal que:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + C \\ C &= \operatorname{arctg} \left[\frac{4x}{(4 - \rho^2) \cos \varphi_0 - 4y \operatorname{sen} \varphi_0} \right] \end{aligned} \quad (4.4.67)$$

Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} \lambda &= \operatorname{sen} (\lambda_0 + C) = \operatorname{sen} \lambda_0 \cos C + \operatorname{sen} C \cos \lambda_0 \\ \cos \lambda &= \cos (\lambda_0 + C) = \cos \lambda_0 \cos C - \operatorname{sen} \lambda_0 \operatorname{sen} C \end{aligned} \right\} \quad (4.4.68)$$

En virtud de (4.4.67):

$$\operatorname{tg} C = \frac{4x}{(4 - \rho^2) \cos \varphi_0 - 4y \operatorname{sen} \varphi_0}$$

Con lo cual se puede escribir:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} C &= \frac{\operatorname{tg} C}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 C}} = \frac{\frac{4x}{(4 - \rho^2) \cos \varphi_0 - 4y \operatorname{sen} \varphi_0}}{\sqrt{1 + \left[\frac{4x}{(4 - \rho^2) \cos \varphi_0 - 4y \operatorname{sen} \varphi_0} \right]^2}} \\ \operatorname{sen} C &= \frac{4x}{\sqrt{16x^2 + [(4 - \rho^2) \cos \varphi_0 - 4y \operatorname{sen} \varphi_0]^2}} \end{aligned} \quad (4.4.69)$$

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 C}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{4x}{(4 - \rho^2) \cos \varphi_0 - 4y \operatorname{sen} \varphi_0} \right]^2}} \\ \cos C &= \frac{(4 - \rho^2) \cos \varphi_0 - 4y \operatorname{sen} \varphi_0}{\sqrt{16x^2 + [(4 - \rho^2) \cos \varphi_0 - 4y \operatorname{sen} \varphi_0]^2}} \end{aligned} \quad (4.4.70)$$

Sustituyendo los valores hallados del seno y el coseno del ángulo auxiliar C (4.4.69 y 4.4.70) en las expresiones (4.4.68), se obtiene finalmente el valor de seno y el coseno de la longitud:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \lambda &= \operatorname{sen} \lambda_o \frac{(4 - \rho^2) \cos \varphi_o - 4 y \operatorname{sen} \varphi_o}{\sqrt{16 x^2 + [(4 - \rho^2) \cos \varphi_o - 4 y \operatorname{sen} \varphi_o]^2}} \\ &\quad + \cos \lambda_o \frac{4 x}{\sqrt{16 x^2 + [(4 - \rho^2) \cos \varphi_o - 4 y \operatorname{sen} \varphi_o]^2}} \\ \operatorname{sen} \lambda &= \frac{[(4 - \rho^2) \cos \varphi_o - 4 y \operatorname{sen} \varphi_o] \operatorname{sen} \lambda_o + 4 x \cos \lambda_o}{\sqrt{16 x^2 + [(4 - \rho^2) \cos \varphi_o - 4 y \operatorname{sen} \varphi_o]^2}} \end{aligned} \quad (4.4.71)$$

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \cos \lambda_o \frac{(4 - \rho^2) \cos \varphi_o - 4 y \operatorname{sen} \varphi_o}{\sqrt{16 x^2 + [(4 - \rho^2) \cos \varphi_o - 4 y \operatorname{sen} \varphi_o]^2}} \\ &\quad - \operatorname{sen} \lambda_o \frac{4 x}{\sqrt{16 x^2 + [(4 - \rho^2) \cos \varphi_o - 4 y \operatorname{sen} \varphi_o]^2}} \\ \cos \lambda &= \frac{[(4 - \rho^2) \cos \varphi_o - 4 y \operatorname{sen} \varphi_o] \cos \lambda_o - 4 x \operatorname{sen} \lambda_o}{\sqrt{16 x^2 + [(4 - \rho^2) \cos \varphi_o - 4 y \operatorname{sen} \varphi_o]^2}} \end{aligned} \quad (4.4.72)$$

Sustituyendo finalmente las expresiones (4.4.66), (4.4.71) y (4.4.72) en la ecuación de la ortodrómica en la forma de (4.4.27):

$$\begin{aligned} \frac{(4 - \rho^2) \operatorname{sen} \varphi_o + 4 y \cos \varphi_o}{\sqrt{(4 + \rho^2)^2 - [(4 - \rho^2) \operatorname{sen} \varphi_o + 4 y \cos \varphi_o]^2}} &= A \frac{[(4 - \rho^2) \cos \varphi_o - 4 y \operatorname{sen} \varphi_o] \operatorname{sen} \lambda_o + 4 x \cos \lambda_o}{\sqrt{16 x^2 + [(4 - \rho^2) \cos \varphi_o - 4 y \operatorname{sen} \varphi_o]^2}} \\ &\quad - B \frac{[(4 - \rho^2) \cos \varphi_o - 4 y \operatorname{sen} \varphi_o] \cos \lambda_o - 4 x \operatorname{sen} \lambda_o}{\sqrt{16 x^2 + [(4 - \rho^2) \cos \varphi_o - 4 y \operatorname{sen} \varphi_o]^2}} \end{aligned}$$

Operando, desarrollando el valor de ρ (2.5.53), agrupando términos y simplificando, se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4 x \frac{\operatorname{tg} \beta \cos(\alpha - \lambda_o)}{\operatorname{sen} \varphi_o + \operatorname{tg} \beta \cos \varphi_o \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_o)} \\ - 4 y \frac{\cos \varphi_o - \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen} \varphi_o \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_o)}{\operatorname{sen} \varphi_o + \operatorname{tg} \beta \cos \varphi_o \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_o)} - 4 = 0 \end{aligned} \quad (4.4.73)$$

La expresión anterior corresponde a la transformada de una derrota ortodrómica de constantes β y α sobre una proyección estereográfica horizontal, y como puede observarse coincidirá con la de una circunferencia en la forma:

$$x^2 + y^2 - 2 x_C x - 2 y_C y + x_C^2 + y_C^2 - r_C^2 = 0$$

De modo que la circunferencia representativa de la derrota tendrá su centro en las coordenadas:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= -2 \frac{\operatorname{tg} \beta \cos(\alpha - \lambda_o)}{\operatorname{sen} \varphi_o + \operatorname{tg} \beta \cos \varphi_o \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_o)} \\ y_C &= 2 \frac{\cos \varphi_o - \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen} \varphi_o \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_o)}{\operatorname{sen} \varphi_o + \operatorname{tg} \beta \cos \varphi_o \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_o)} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.74)$$

Y operando se obtiene que su radio es:

$$r_C = 2 \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}{\operatorname{sen} \varphi_o + \operatorname{tg} \beta \cos \varphi_o \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_o)} = 2 \frac{\sec \beta}{\operatorname{sen} \varphi_o + \operatorname{tg} \beta \cos \varphi_o \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_o)} \quad (4.4.75)$$

- Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección estereográfica horizontal

Para obtener las ecuaciones paramétricas, se sustituirá el valor de la longitud de la expresión de la ortodrómica sobre la esfera (4.4.10), en las fórmulas de paso de coordenadas geográficas a cartesianas (2.5.79):

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 \frac{\cos \varphi \operatorname{sen} [\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda]}{1 + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos [\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda]} \\ y &= 2 \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi_o - \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi_o \cos [\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda]}{1 + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos [\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda]} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.76)$$

- Representación gráfica de la ortodrómica en la proyección estereográfica horizontal

Sobre una proyección estereográfica todo círculo máximo de la esfera se proyectará según una circunferencia (figura 4.4.12), a excepción de aquellos que pasen por el centro de la proyección que se representarán como rectas (figura 4.4.13).

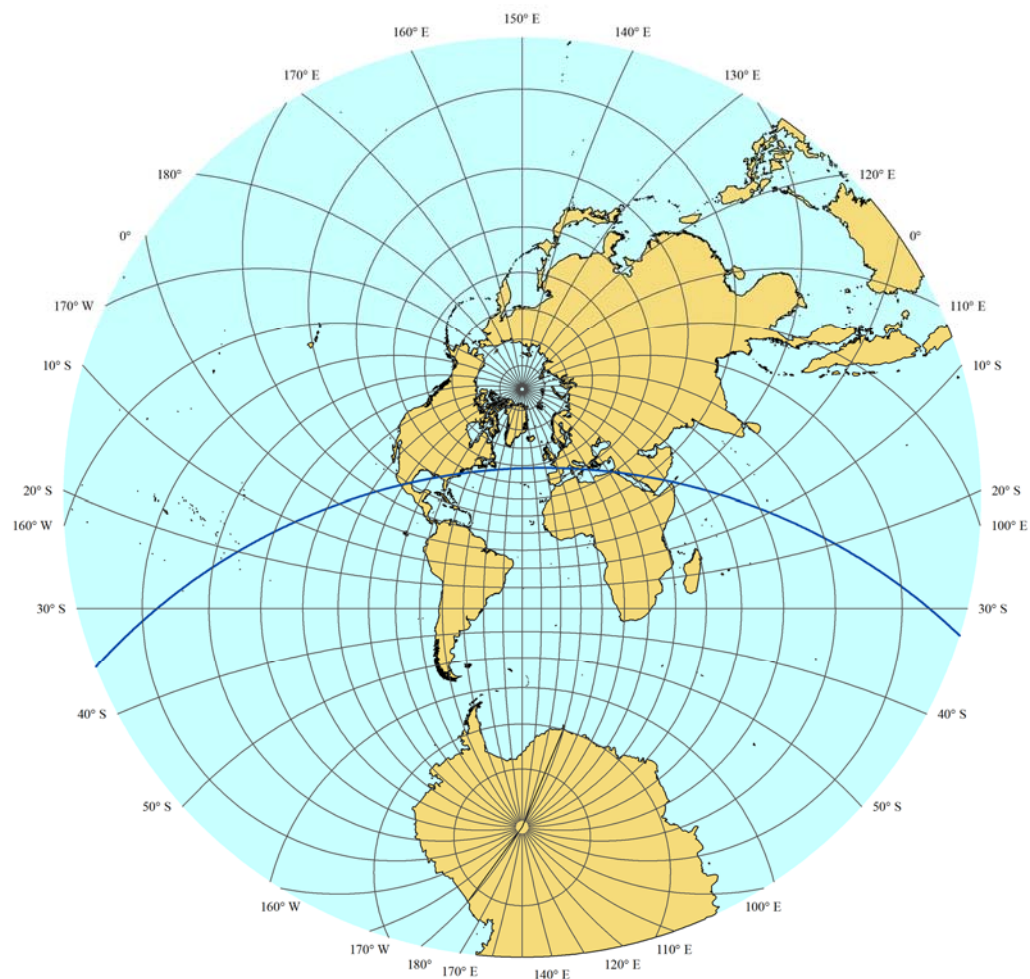


Figura 4.4.12. Representación de la ortodrómica en una proyección estereográfica horizontal con centro en: $\varphi_0 = 30^\circ N$, $\lambda_0 = 030^\circ W$.

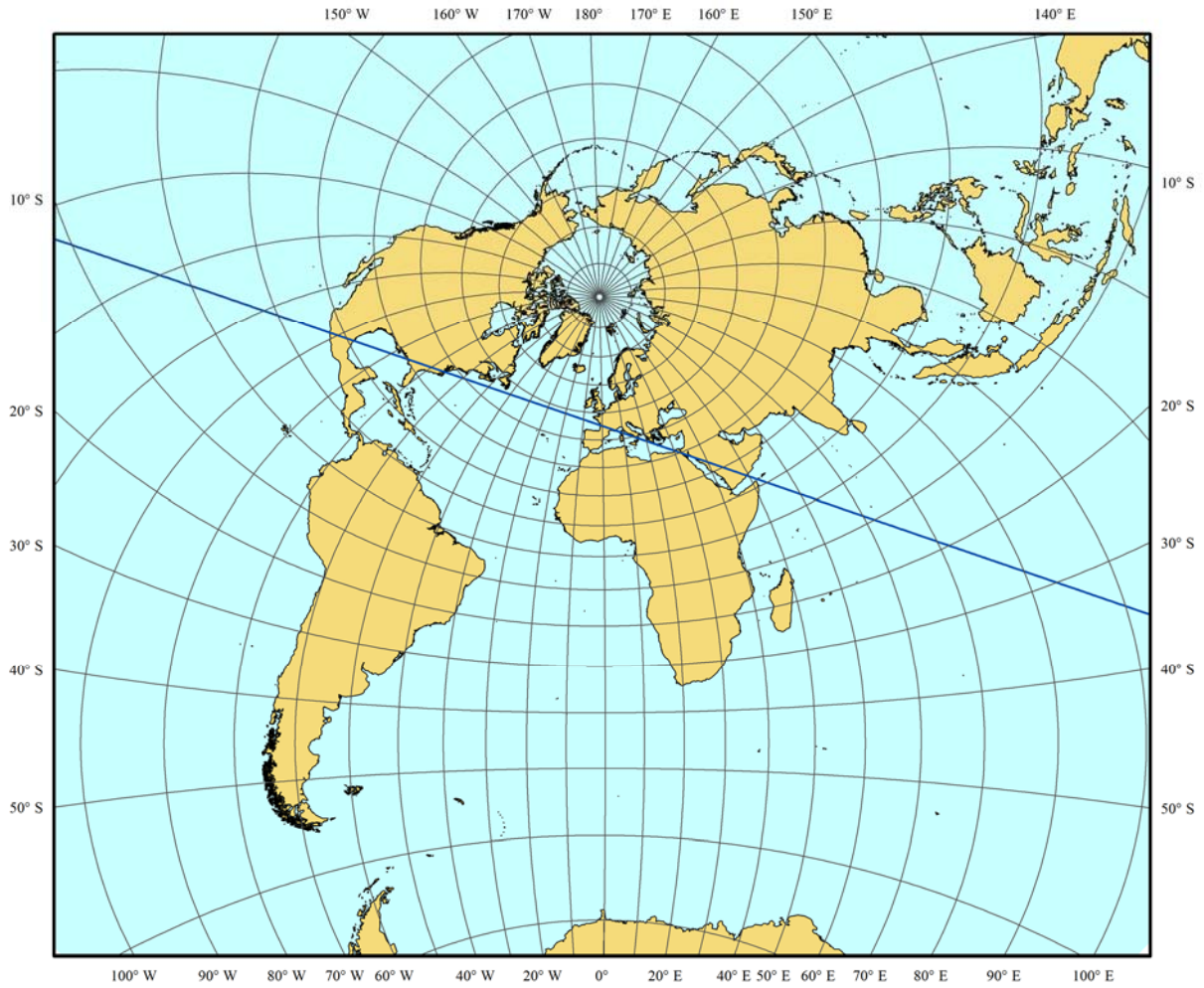


Figura 4.4.13. Representación de la ortodrómica en una proyección estereográfica horizontal con centro en Burdeos: $\varphi_0 = 45^\circ 30' N$, $\lambda_0 = 001^\circ 30' W$.

4.4.3.2.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección estereográfica polar

- Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección estereográfica polar

Particularizando la ecuación de la ortodrómica en la proyección estereográfica horizontal para $\varphi_0 = \pm 90^\circ$ se obtienen las ecuaciones en la estereográfica polar.

Así, para una proyección estereográfica polar donde $\varphi_0 = +90^\circ$ (Polo Norte), se obtiene de (4.4.73) que la ecuación de la transformada de una ortodrómica de constantes α y β es:

$$x^2 + y^2 + 4x \operatorname{tg} \beta \cos(\alpha - \lambda_0) + 4y \operatorname{tg} \beta \sin(\alpha - \lambda_0) - 4 = 0 \quad (4.4.77)$$

Siendo las coordenadas del centro de la circunferencia representativa de la derrota:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= -2 \operatorname{tg} \beta \cos(\alpha - \lambda_0) \\ y_C &= -2 \operatorname{tg} \beta \sin(\alpha - \lambda_0) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.78)$$

Y su radio:

$$r_C = 2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = 2 \sec \beta \quad (4.4.79)$$

En el caso de $\varphi_0 = -90^\circ$ (Polo Sur), la ecuación de la ortodrómica será:

$$x^2 + y^2 - 4x \operatorname{tg} \beta \cos(\alpha - \lambda_0) + 4y \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_0) - 4 = 0 \quad (4.4.80)$$

En este caso, la circunferencia representativa de la derrota tendrá su centro en las coordenadas:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= 2 \operatorname{tg} \beta \cos(\alpha - \lambda_0) \\ y_C &= -2 \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_0) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.81)$$

Y su radio seguirá siendo:

$$r_C = 2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = 2 \sec \beta \quad (4.4.82)$$

- Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección estereográfica polar

La parametrización de la ecuación de la ortodrómica en la proyección estereográfica polar, se realizará de la misma forma que en la gnomónica, considerándose el caso como una particularización del aspecto horizontal. Se sustituirá $\varphi_0 = \pm 90^\circ$ en (4.4.76).

Así, para una proyección polar donde $\varphi_0 = +90^\circ$ (Polo Norte), las ecuaciones de la derrota adoptarán la forma:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 \frac{\cos \varphi \operatorname{sen} [\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda]}{1 + \operatorname{sen} \varphi} \\ y &= -2 \frac{\cos \varphi \cos [\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda]}{1 + \operatorname{sen} \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.83)$$

Mientras que para $\varphi_0 = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 \frac{\cos \varphi \operatorname{sen} [\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda]}{1 - \operatorname{sen} \varphi} \\ y &= 2 \frac{\cos \varphi \cos [\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda]}{1 - \operatorname{sen} \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.84)$$

- Representación gráfica de la ortodrómica en la proyección estereográfica polar

Al igual que en la estereográfica horizontal, la representación de una ortodrómica sobre una proyección estereográfica polar, será una circunferencia o una recta, en el caso de pasar por el centro de proyección, tal y como puede verse en la siguiente figura:

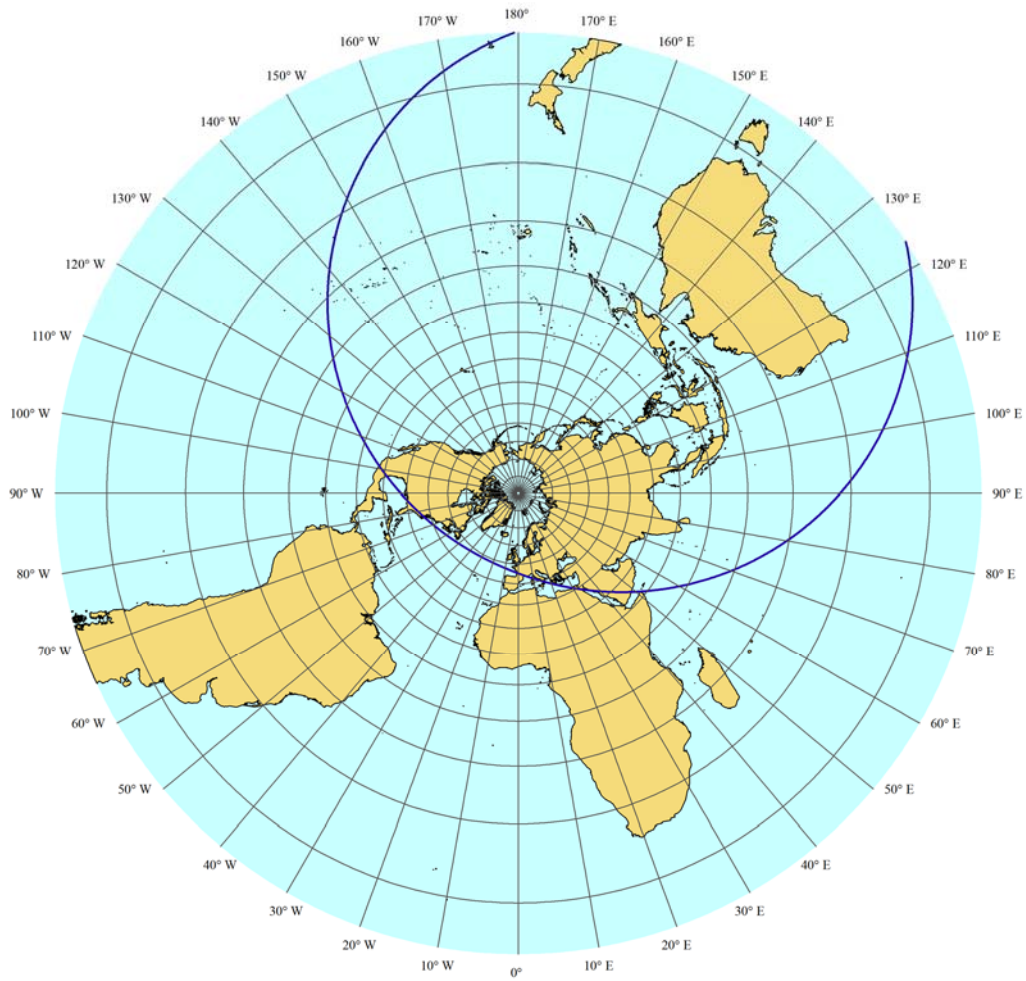


Figura 4.4.14. Representación de la loxodrómica en una proyección estereográfica polar con centro en: $\varphi_0 = 90^\circ N$.

4.4.3.2.3. Derrota ortodrómica sobre la proyección estereográfica transversa

- Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección estereográfica transversa

Particularizando la ecuación de la ortodrómica en la proyección estereográfica horizontal para $\varphi_0 = 0^\circ$, se obtienen las ecuaciones en la estereográfica transversa.

De este modo, considerando la igualdad $\varphi_0 = 0^\circ$ en la expresión (4.4.73), se obtiene que la ecuación de la transformada de una ortodrómica de constante β y α , sobre una proyección estereográfica transversa, responde a la forma:

$$x^2 + y^2 + 4x \cotg(\alpha - \lambda_0) - \frac{4y}{\tg \beta \sen(\alpha - \lambda_0)} - 4 = 0 \quad (4.4.85)$$

Siendo las coordenadas del centro de la circunferencia representativa de la derrota:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= -2 \cotg(\alpha - \lambda_0) \\ y_C &= \frac{2}{\tg \beta \sen(\alpha - \lambda_0)} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.86)$$

Y su radio:

$$r_c = 2 \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}{\operatorname{tg} \beta \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_o)} = 2 \frac{\sec \beta}{\operatorname{tg} \beta \operatorname{sen}(\alpha - \lambda_o)} \quad (4.4.87)$$

- Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección estereográfica transversa

Al igual que para el aspecto polar, se considerará el caso como una particularización del aspecto horizontal. En este caso se sustituirá $\varphi_o = 0^\circ$, en las expresiones paramétricas obtenidas para la proyección horizontal. Así, para la proyección estereográfica transversa, de (4.4.76) se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 \frac{\cos \varphi \operatorname{sen}[\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda]}{1 + \cos \varphi \cos[\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda]} \\ y &= 2 \frac{\operatorname{sen} \varphi}{1 + \cos \varphi \cos[\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda]} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.88)$$

- Representación gráfica de la ortodrómica en la proyección estereográfica transversa

La representación gráfica de una ortodrómica en la proyección estereográfica transversa será una circunferencia o una línea recta, al igual que en el resto de supuestos estudiados.

En la figura 4.4.15 puede verse la representada de una ortodrómica sobre una estereográfica transversa con centro de proyección en $\varphi_o = 00^\circ$ y $\lambda_o = 000^\circ$.

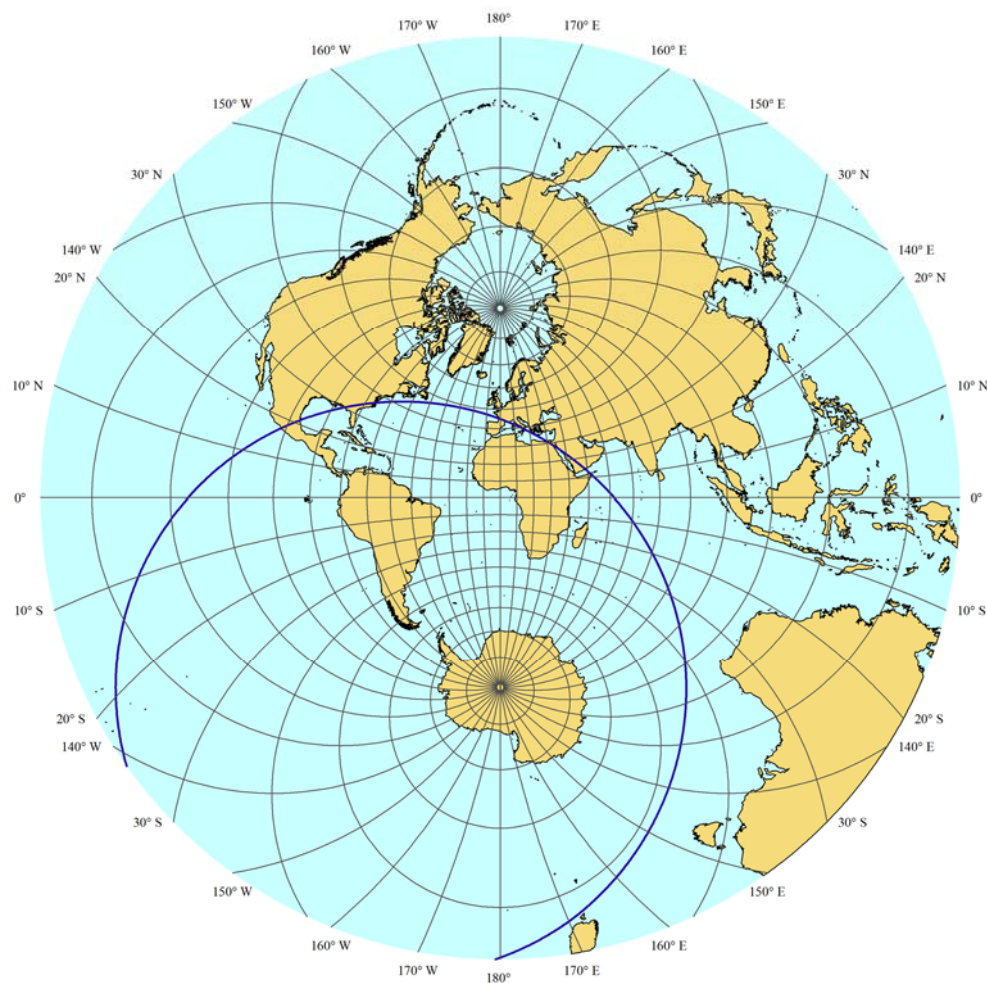


Figura 4.4.15. Representación de la ortodrómica en una proyección estereográfica transversa con centro en: $\varphi_o = 00^\circ$, $\lambda_o = 000^\circ$

4.4.4. Derrota loxodrómica y ortodrómica sobre la proyección cónica conforme de Lambert

4.4.4.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección cónica conforme de Lambert

4.4.4.1.1. Ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección cónica conforme de Lambert

En la proyección cónica conforme de Lambert las funciones de transformación de coordenadas cartesianas a geográficas son²⁹⁴:

²⁹⁴ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P.107.

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 2 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{tg}^{\operatorname{sen} \varphi_0} \left(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\operatorname{tg} \varphi_0 \sqrt{x^2 + (\operatorname{cotg} \varphi_0 - y)^2}} \right\}^{\frac{1}{\operatorname{sen} \varphi_0}} - 90^\circ \\ \lambda &= \lambda_0 + \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\operatorname{cotg} \varphi_0 - y} \right)}{\operatorname{sen} \varphi_0} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.89)$$

Sustituyendo las expresiones (4.4.89) en la ecuación genérica de una loxodrómica (4.4.1), se obtiene la expresión de su transformada sobre una proyección cónica de Lambert:

$$\frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\operatorname{cotg} \varphi_0 - y} \right) - \Delta \lambda_{00}}{\operatorname{sen} \varphi_0} = \operatorname{tg} R \ln \left[\frac{\operatorname{tg}^{\operatorname{sen} \varphi_0} \left(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\operatorname{tg} \varphi_0 \sqrt{x^2 + (\operatorname{cotg} \varphi_0 - y)^2}} \right]^{\frac{1}{\operatorname{sen} \varphi_0}} \quad (4.4.90)$$

4.4.4.1.2. Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la proyección cónica conforme de Lambert

En la proyección cónica conforme de Lambert las funciones de transformación de coordenadas geográfica a cartesianas son²⁹⁵:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\cos \varphi_0 \operatorname{tg}^{\operatorname{sen} \varphi_0} \left(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right) \operatorname{sen} [\operatorname{sen} \varphi_0 (\lambda - \lambda_0)]}{\operatorname{tg} \varphi_0 \operatorname{tg}^{\operatorname{sen} \varphi_0} \left(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right)} \\ y &= \operatorname{cotg} \varphi_0 - \operatorname{cotg} \varphi_0 \frac{\operatorname{tg}^{\operatorname{sen} \varphi_0} \left(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\operatorname{tg}^{\operatorname{sen} \varphi_0} \left(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right)} \cos [\operatorname{sen} \varphi_0 (\lambda - \lambda_0)] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.91)$$

Al igual que en las proyecciones ya estudiadas, las ecuaciones paramétricas en función de la latitud en la proyección cónica conforme de Lambert se obtienen sustituyendo la expresión de la longitud despejada de la ecuación general de la loxodrómica (4.4.4) en las funciones de paso de coordenadas geográficas a cartesianas en el plano (4.4.91):

²⁹⁵ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P.106.

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\operatorname{tg}^{\operatorname{sen} \varphi_0} \left(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right) \operatorname{sen} \left\{ \operatorname{sen} \varphi_0 \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{00} \right] \right\}}{\operatorname{tg}^{\operatorname{sen} \varphi_0} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} \\ y &= \operatorname{cotg} \varphi_0 - \operatorname{cotg} \varphi_0 \frac{\operatorname{tg}^{\operatorname{sen} \varphi_0} \left(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\operatorname{tg}^{\operatorname{sen} \varphi_0} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} \cos \left\{ \operatorname{sen} \varphi_0 \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{00} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.92)$$

4.4.4.1.3. Representación gráfica de la loxodrómica en la proyección cónica conforme de Lambert

Las líneas loxodrómicas sobre una proyección cónica conforme de Lambert serán líneas curvas cóncavas hacia la representada del polo²⁹⁶ del hemisferio en que se encuentre el paralelo central, con excepción de las que recorren los meridianos que serán líneas rectas.

En las figuras 4.4.16 y 4.4.17 pueden verse la loxodrómica sobre una proyección cónica conforme de Lambert con paralelo standard de 60° N y 10°N respectivamente.

²⁹⁶ Adsuar, Joaquín C.: Navegación Aérea. Conocimientos teóricos para la licencia del piloto privado, Editorial Paraninfo, Madrid, 3ª edición 2009. P. 61.

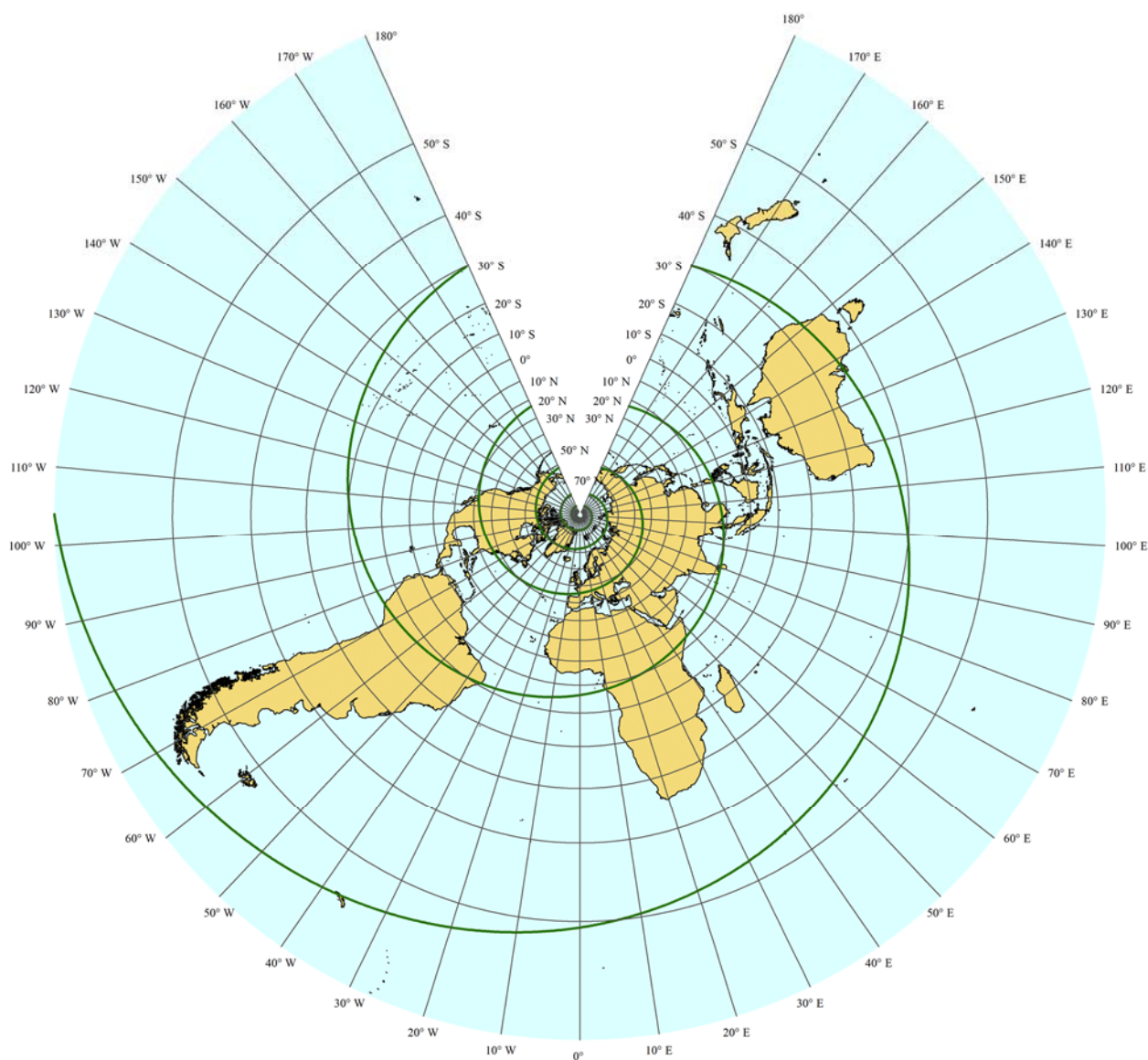


Figura 4.4.16. Derrota loxodrómica sobre una proyección cónica conforme de Lambert, con paralelo estándar 60°N.

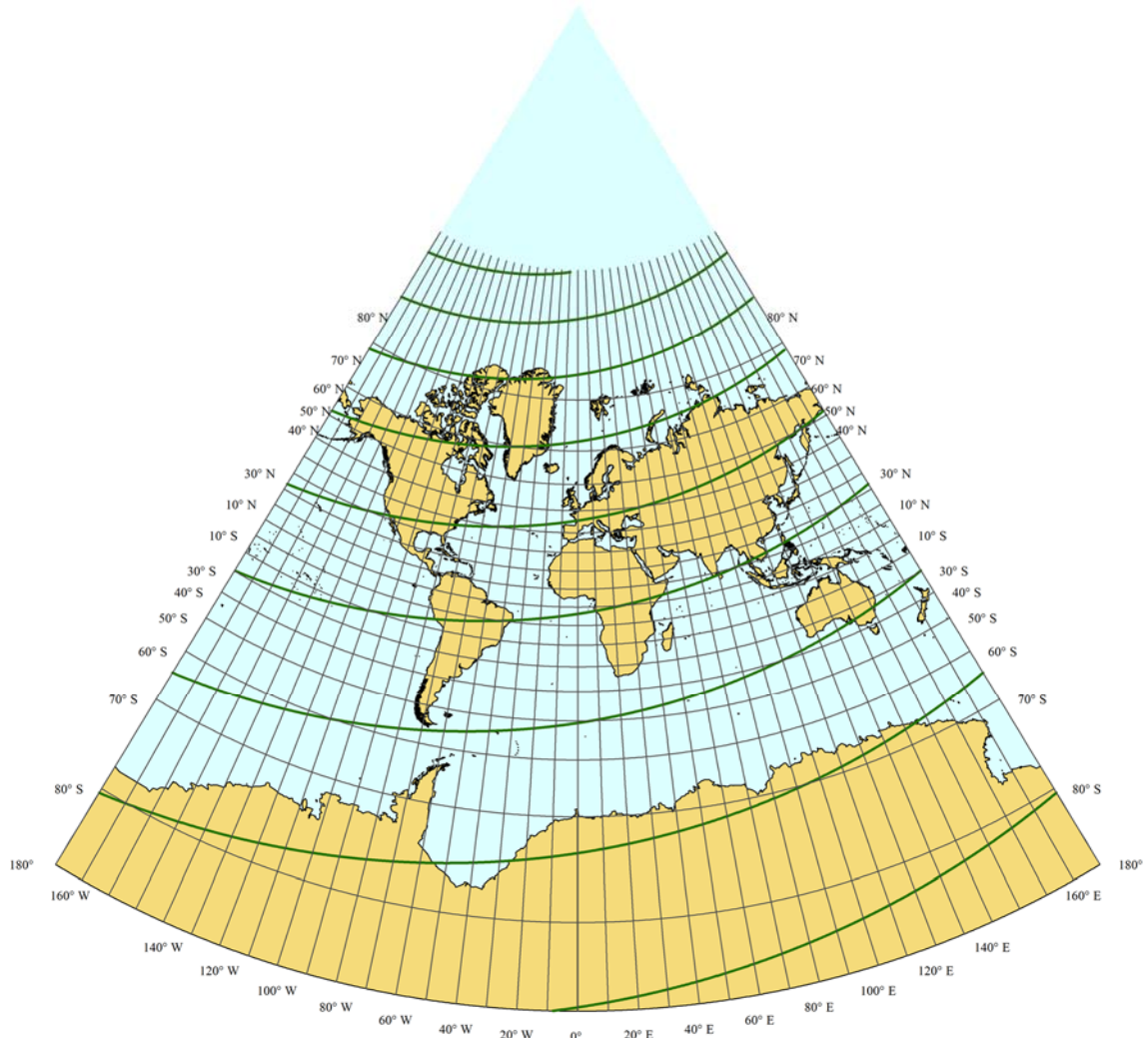


Figura 4.4.17. Derrota loxodrómica sobre una proyección cónica conforme de Lambert, con paralelo estándar 10°N.

4.4.4.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección cónica conforme de Lambert

4.4.4.2.1. Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección cónica conforme de Lambert

Sustituyendo la expresión (4.4.90) en la ecuación de la ortodrómica (4.4.7) se obtiene:

$$\frac{\left[\frac{\operatorname{tg}^{\operatorname{sen} \varphi_0} \left(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\operatorname{tg} \varphi_0 \sqrt{x^2 + (\cotg \varphi_0 - y)^2}} \right]^{\frac{2}{\operatorname{sen} \varphi_0}} - 1}{2 \left[\frac{\operatorname{tg}^{\operatorname{sen} \varphi_0} \left(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\operatorname{tg} \varphi_0 \sqrt{x^2 + (\cotg \varphi_0 - y)^2}} \right]^{\frac{1}{\operatorname{sen} \varphi_0}}} = \operatorname{sen} \left[\frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\cotg \varphi_0 - y} \right)}{\operatorname{sen} \varphi_0} + \lambda_0 - \alpha \right] \operatorname{tg} \beta \quad (4.4.93)$$

4.4.4.2.2. Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección cónica conforme de Lambert

Sustituyendo (4.4.10) en (4.4.91) se obtienen las ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en función de la latitud:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\cos \varphi_o \operatorname{tg}^{\operatorname{sen} \varphi_o} \left(45^\circ + \frac{\varphi_o}{2} \right) \operatorname{sen} \{ \operatorname{sen} \varphi_o [\arcsen (\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o] \}}{\operatorname{tg} \varphi_o \operatorname{tg}^{\operatorname{sen} \varphi_o} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} \\ y &= \cotg \varphi_o - \cotg \varphi_o \left\{ \frac{\operatorname{tg}^{\operatorname{sen} \varphi_o} \left(45^\circ + \frac{\varphi_o}{2} \right)}{\operatorname{tg}^{\operatorname{sen} \varphi_o} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} \cos \{ \operatorname{sen} \varphi_o [\arcsen (\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o] \} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.94)$$

4.4.4.2.3. Representación gráfica de la ortodrómica sobre la proyección cónica conforme de Lambert

Las líneas ortodrólicas, son líneas curvas cóncavas hacia el paralelo estándar, en la práctica pueden ser consideradas líneas rectas en la cercanía del paralelo estándar²⁹⁷.

En la figura 4.4.18 puede verse como la representada de la ortodrómica tiende a confundirse con una línea recta, en las proximidades del paralelo estándar de 60°N.

²⁹⁷ Adsuar, Joaquín C.: Navegación Aérea. Conocimientos teóricos para la licencia del piloto privado, Editorial Paraninfo, Madrid, 3ª edición 2009. P. 61.

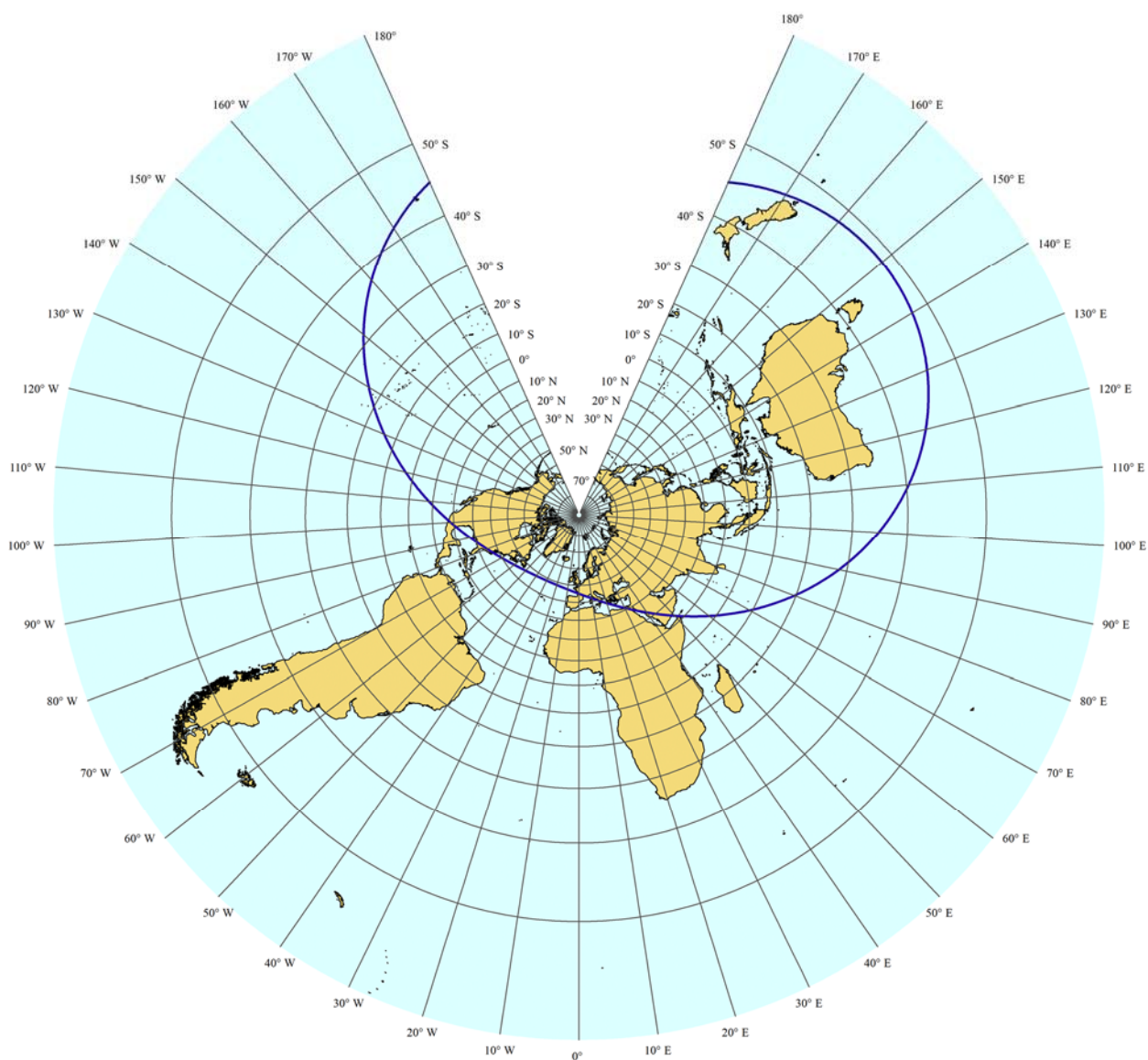


Figura 4.4.18. Derrota ortodrómica sobre una proyección cónica conforme de Lambert, con paralelo estándar de 60°N.

Y en la figura 4.4.19 puede verse la concavidad de la ortodrómica respecto al paralelo estándar de 10°N

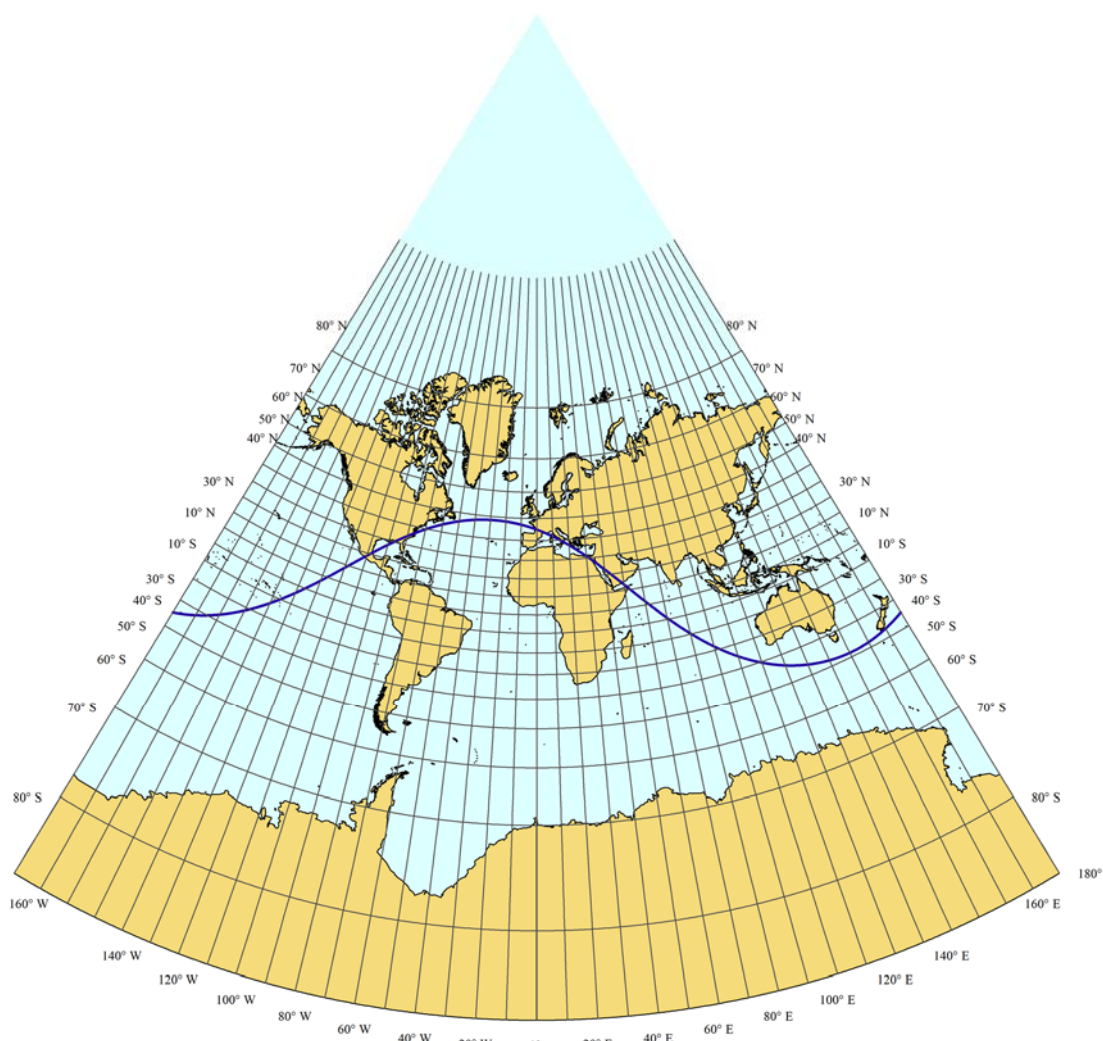


Figura 4.4.19. Derrota ortodrómica sobre una proyección cónica conforme de Lambert, con paralelo estándar de 10°N.

4.4.5. Derrota loxodrómica y ortodrómica sobre la proyección transversa de Mercator

4.4.5.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección transversa de Mercator

Para el estudio de la derrota loxodrómica, se consideró conveniente obtener su ecuación implícita y sus ecuaciones paramétricas en función de la latitud, para el supuesto $\phi_0 = 0$, $R = 1$ y $K_0 = 1$ ²⁹⁸.

4.4.5.1.1. Ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección transversa de Mercator

En la proyección transversa de Mercator las funciones de transformación de coordenadas cartesianas a geográficas son²⁹⁹:

²⁹⁸ Factor de escala en el meridiano central.

²⁹⁹ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P.60.

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen \frac{\sen y}{\cosh x} \\ \lambda &= \lambda_o + \arctg \frac{\sinh x}{\cos y} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.95)$$

Con lo que sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación de la loxodrómica (4.4.1):

$$\arctg \frac{\sinh x}{\cos y} - \Delta\lambda_{o0} = \text{tgR} \text{Ln} \sqrt{\frac{\cosh x + \sen y}{\cosh x - \sen y}} \quad (4.4.96)$$

4.4.5.1.2. Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la proyección transversa de Mercator

Las funciones de transformación de coordenadas geográficas a cartesianas en el plano son³⁰⁰:

$$\left. \begin{aligned} x &= \text{arctgh} [\cos \varphi \sen (\lambda - \lambda_o)] \\ y &= \text{arctg} \frac{\text{tg} \varphi}{\cos (\lambda - \lambda_o)} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.97)$$

Sustituyendo, el valor de la longitud despejada de la ecuación genérica de la loxodrómica (4.4.4) en las expresiones anteriores (4.4.97), se obtienen las ecuaciones paramétricas de la loxodrómica sobre la proyección transversa de Mercator en función de la latitud³⁰¹:

$$\left. \begin{aligned} x &= \text{arctgh} \left\{ \cos \varphi \sen \left[\text{tgR} \text{Ln} \text{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right] \right\} \\ y &= \text{arctg} \left\{ \frac{\text{tg} \varphi}{\cos \left[\text{tgR} \text{Ln} \text{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right]} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.98)$$

4.4.5.1.3. Representación gráfica de la loxodrómica en la proyección transversa de Mercator

La transformada de la loxodrómica será una curva, como puede verse en la figura 4.4.20, excepto en los casos puntuales de coincidencia con el meridiano central, ecuador o los meridianos que distan 90° del meridiano central, que se representaría como una línea recta.

³⁰⁰ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P.58.

³⁰¹ Siendo $\Delta\lambda_{o0} = \lambda_o - \lambda_o$.

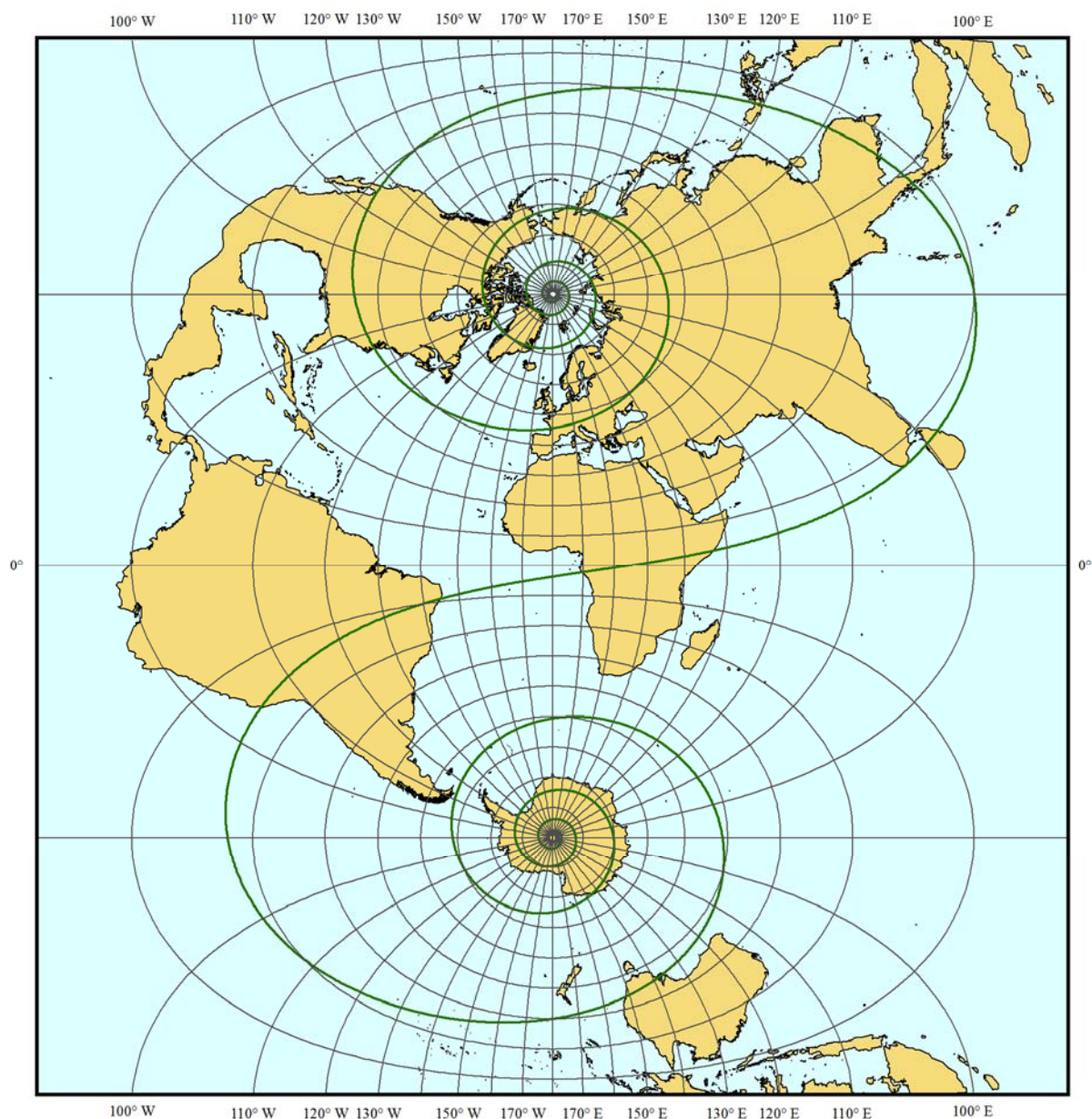


Figura 4.4.20. Derrota loxodrómica sobre una proyección transversa de Mercator.

4.4.5.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección transversa de Mercator

Al igual que para el estudio de la derrota loxodrómica, se consideró conveniente obtener la ecuación implícita de la ortodrómica y sus ecuaciones paramétricas en función de la latitud, para el supuesto $\varphi_0 = 0$, $R = 1$ y $K_0 = 1$.

4.4.5.2.1. Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección transversa de Mercator

Sustituyendo la expresión (4.4.95) en la ecuación de la ortodrómica (4.4.7) se obtiene la expresión que corresponde a la ecuación implícita de la transformada de una ortodrómica de constantes α y β :

$$\operatorname{tg}\left[\arcsen\left(\frac{\operatorname{sen} y}{\cosh x}\right)\right] = \operatorname{sen}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\sinh x}{\cos y}\right) + \lambda_o - \alpha\right] \operatorname{tg} \beta \quad (4.4.99)$$

4.4.5.2.2. Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección transversa de Mercator

Las ecuaciones paramétricas de la ortodrómica, al igual que en el resto de proyecciones ya estudiadas, se obtienen sustituyendo el valor de la longitud despejada de la expresión genérica de la ortodrómica (4.4.10) en (4.4.97):

$$\left. \begin{aligned} x &= \operatorname{arctgh}\{\cos \varphi \operatorname{sen}[\arcsen(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o]\} \\ y &= \operatorname{arctg}\left\{\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos[\arcsen(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o]}\right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.100)$$

4.4.5.2.3. Representación gráfica de la ortodrómica en la proyección transversa de Mercator

En la figura 4.4.21 se puede ver una derrota ortodrómica sobre la proyección transversa de Mercator:

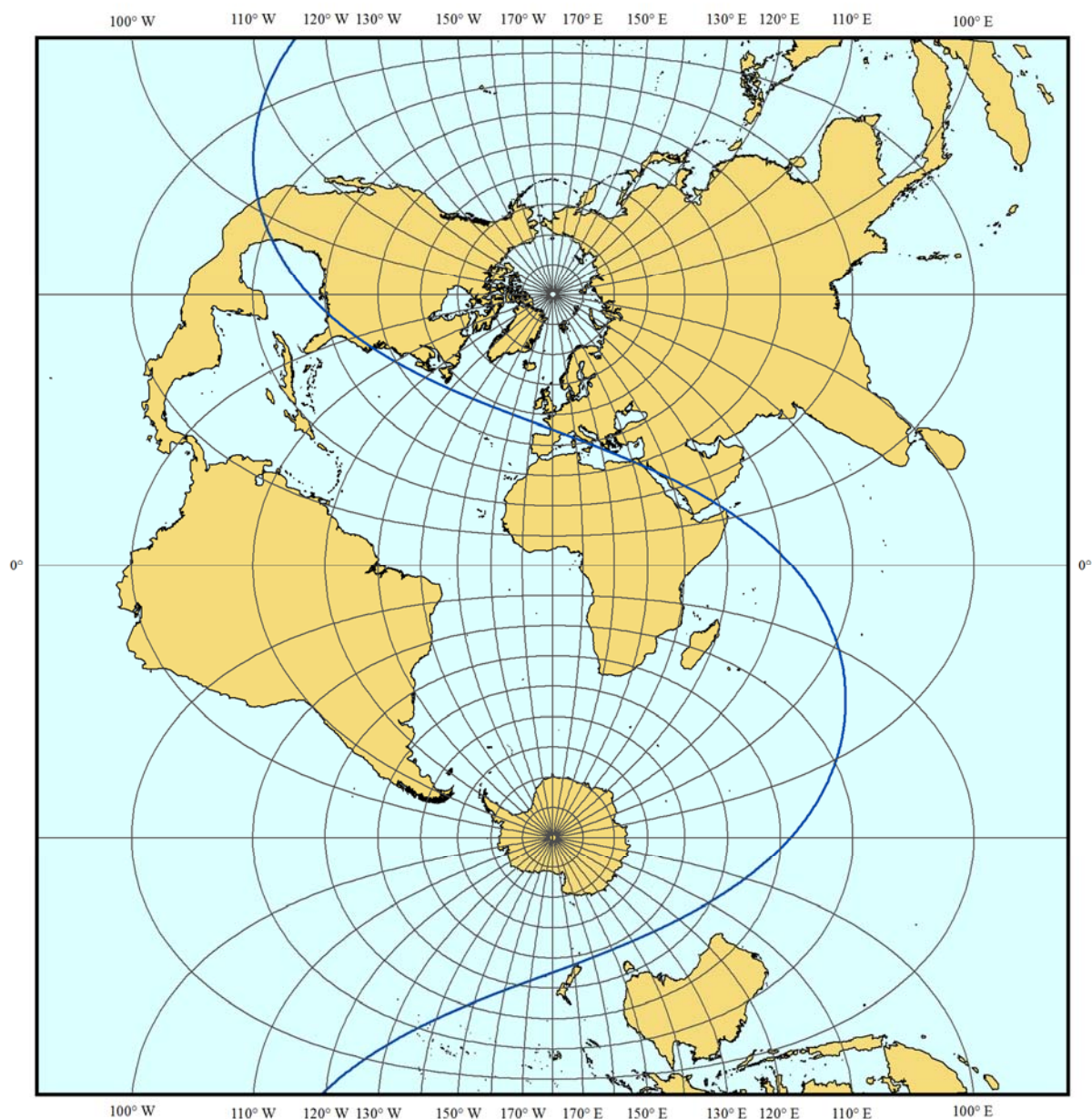


Figura 4.4.21. Derrota ortodrómica sobre una proyección transversa de Mercator.

4.4.6. Derrota loxodrómica y ortodrómica sobre la proyección ortográfica

Al igual que en las proyecciones gnomónicas y estereográficas, ya estudiadas, se desarrollarán las ecuaciones de la loxodrómica y ortodrómica sobre cada uno de los aspectos de la proyección ortográfica, cambiando únicamente las funciones de transformación propias del sistema proyectivo.

4.4.6.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección ortográfica

4.4.6.1.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección ortográfica horizontal

- Ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección ortográfica horizontal

En la proyección ortográfica horizontal las fórmulas de correspondencia de coordenadas cartesianas a geográficas son (2.5.143):

$$\varphi = \arcsen\left(\sqrt{1-\rho^2} \sen \varphi_o + y \cos \varphi_o\right)$$

$$\lambda = \lambda_o + \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{1-\rho^2} \cos \varphi_o - y \sen \varphi_o}\right)$$

De esta forma, sustituyendo los valores de (2.5.143) en la ecuación de una loxodrómica (4.4.1), se obtiene:

$$\begin{aligned} \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{1-\rho^2} \cos \varphi_o - y \sen \varphi_o}\right) - \Delta\lambda_{o0} = \\ = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1-\rho^2} \sen \varphi_o + y \cos \varphi_o}{1 - \sqrt{1-\rho^2} \sen \varphi_o + y \cos \varphi_o}} \end{aligned} \quad (4.4.101)$$

Y desarrollando el valor de ρ (2.5.53):

$$\begin{aligned} \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2} \cos \varphi_o - y \sen \varphi_o}\right) - \Delta\lambda_{o0} = \\ = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1-x^2-y^2} \sen \varphi_o + y \cos \varphi_o}{1 - \sqrt{1-x^2-y^2} \sen \varphi_o + y \cos \varphi_o}} \end{aligned} \quad (4.4.102)$$

- Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la proyección ortográfica horizontal

Para la obtención de las ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en función de la latitud, en una proyección ortográfica horizontal, se sustituirá la expresión (4.4.4) en las fórmulas de correspondencia (2.5.138):

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \varphi \sen \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right] \\ y &= \sen \varphi \cos \varphi_o - \cos \varphi \sen \varphi_o \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.103)$$

- Representación gráfica de la loxodrómica en la proyección ortográfica horizontal

Toda loxodrómica de la esfera se representará en el plano como una curva compleja manteniendo su caracterísitca forma de espiral; salvo en el supuesto en que la derrota coincida con un meridiano o un paralelo, casos en los cuales vendrá representada por una elipse.

En la figura 4.4.22 se puede ver una loxodrómica en una proyección ortográfica horizontal con centro en $\varphi_0 = 30^\circ \text{ N}$, $\lambda_0 = 030^\circ \text{ W}$.

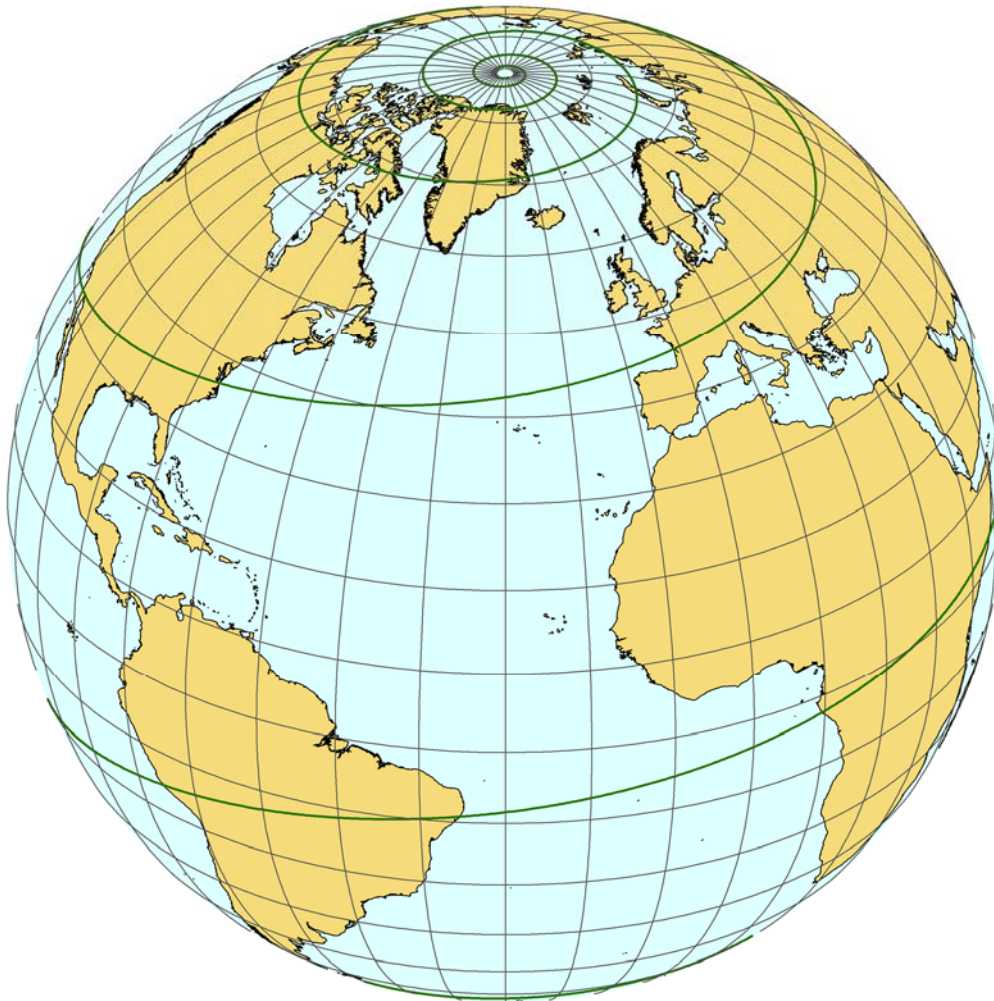


Figura 4.4.22. Representación de la loxodrómica en una proyección ortográfica horizontal con centro en: $\varphi_0 = 30^\circ \text{ N}$, $\lambda_0 = 30^\circ \text{ W}$.

4.4.6.1.2. Derrota loxodrómica sobre la proyección ortográfica polar

- Ecuación implícita de la loxodrómica sobre la proyección ortográfica polar

La ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección ortográfica polar, se obtiene introduciendo el valor $\varphi_0 = \pm 90^\circ$ en la ecuación implícita de dicha derrota en la proyección ortográfica horizontal (4.4.101).

Para una proyección ortográfica polar donde $\varphi_0 = +90^\circ$ (Polo Norte), se obtiene de (4.4.101) que la ecuación de la transformada de una loxodrómica responde a la forma:

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{x}{y}\right) - \Delta\lambda_{00} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}{1 - \sqrt{1 - \rho^2}}} \quad (4.4.104)$$

Y desarrollando el valor de ρ (2.5.53):

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{x}{y}\right) - \Delta\lambda_{o0} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}}{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}} \quad (4.4.105)$$

Para una proyección ortográfica polar donde $\varphi_o = -90^\circ$ (Polo Sur), se obtiene de (4.4.101):

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{x}{y}\right) - \Delta\lambda_{o0} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \rho^2}}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}} \quad (4.4.106)$$

Y desarrollando el valor de ρ (2.5.53):

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \Delta\lambda_{o0} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}}} \quad (4.4.107)$$

- Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica sobre la proyección ortográfica polar

Para la parametrización de la ecuación de la loxodrómica en la proyección ortográfica polar, se sustituirá $\varphi_o = \pm 90^\circ$ en las expresiones paramétricas obtenidas para la proyección ortográfica horizontal (4.4.103).

La expresión paramétrica de una derrota loxodrómica sobre una proyección ortográfica polar, en función de la latitud, y cuando $\varphi_o = +90^\circ$ (Polo Norte) es:

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \varphi \operatorname{sen} \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right] \\ y &= -\cos \varphi \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.108)$$

Mientras que para $\varphi_o = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \varphi \operatorname{sen} \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right] \\ y &= \cos \varphi \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.109)$$

- Representación gráfica de la loxodrómica sobre la proyección ortográfica polar

La derrota es una espiral con centro en el polo representado, salvo en los supuestos particulares de coincidencia con un paralelo o un meridiano, donde se representarán como una circunferencia o como una recta, respectivamente.

Aplicando las ecuaciones de la loxodrómica obtenidas para una ortográfica polar cuyo centro se encuentre en el Polo Norte, se obtiene la siguiente representación gráfica:

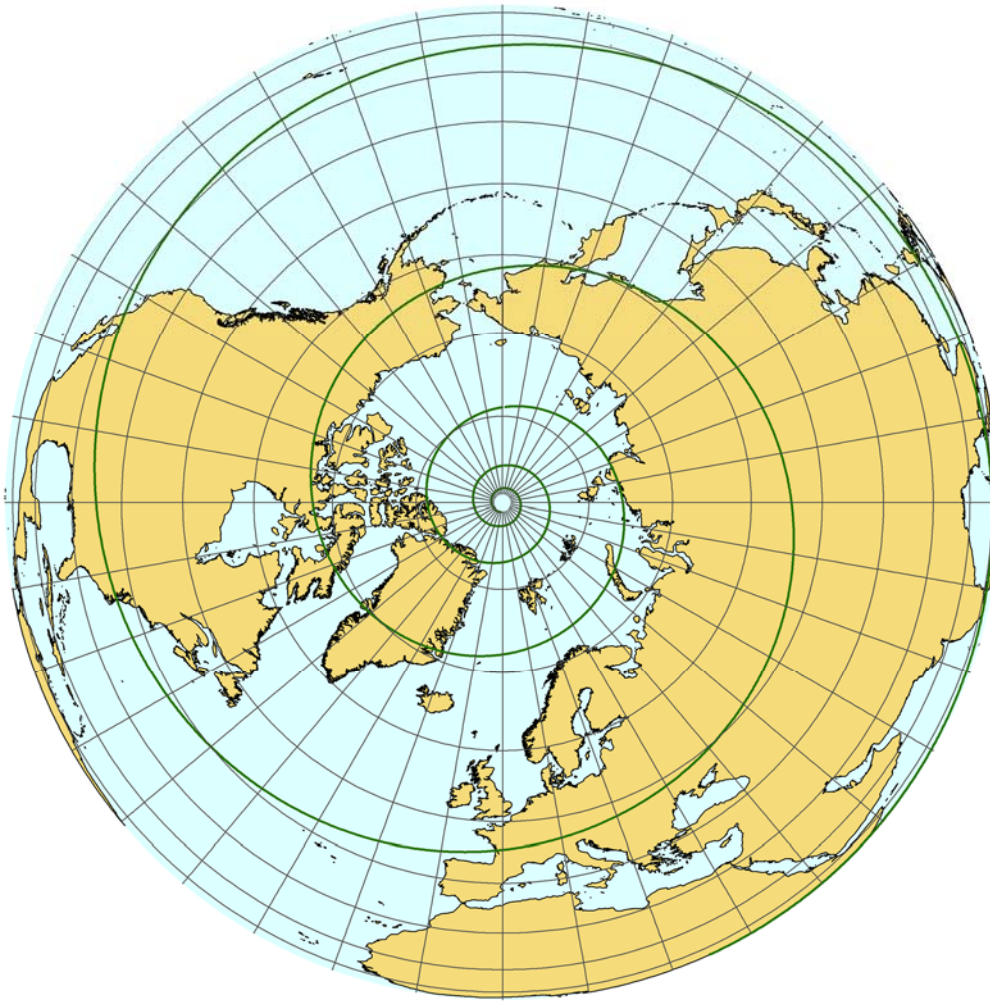


Figura 4.4.23. Representación de la loxodrómica en una proyección ortográfica polar con centro en: $\phi_0 = 90^\circ$ N.

4.4.6.1.3. Derrota loxodrómica sobre la proyección ortográfica transversa

- Ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección ortográfica transversa

Particularizando la ecuación de la loxodrómica en la proyección ortográfica horizontal (4.4.101) para $\phi_0 = 0^\circ$, se obtiene la ecuación implícita en la ortográfica transversa:

$$\arctg\left(\frac{x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - \Delta\lambda_{00} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \quad (4.4.110)$$

O desarrollando el valor de ρ (2.5.53):

$$\arctg\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) - \Delta\lambda_{00} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \quad (4.4.111)$$

- Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la proyección ortográfica transversa

Al igual que para el aspecto polar, se considerará el transverso como una particularización del horizontal, sustituyendo en este caso $\varphi_0 = 0^\circ$, en las ecuaciones obtenidas para la ortográfica horizontal (4.4.103). Así para el aspecto transverso, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \varphi \operatorname{sen} \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{00} \right] \\ y &= \operatorname{sen} \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4.4.112)$$

- Representación gráfica de la loxodrómica en la proyección gnomónica transversa

Una loxodrómica se representará en el plano como una serie de curvas complejas; salvo en el supuesto en que la derrota coincida con un meridiano o un paralelo, casos en el cual vendrá determinada por una elipse o una línea recta.

En la figura 4.4.24, se puede ver una loxodrómica en una proyección ortográfica transversa con centro en $\varphi_0 = 00^\circ$, $\lambda_0 = 000^\circ$.

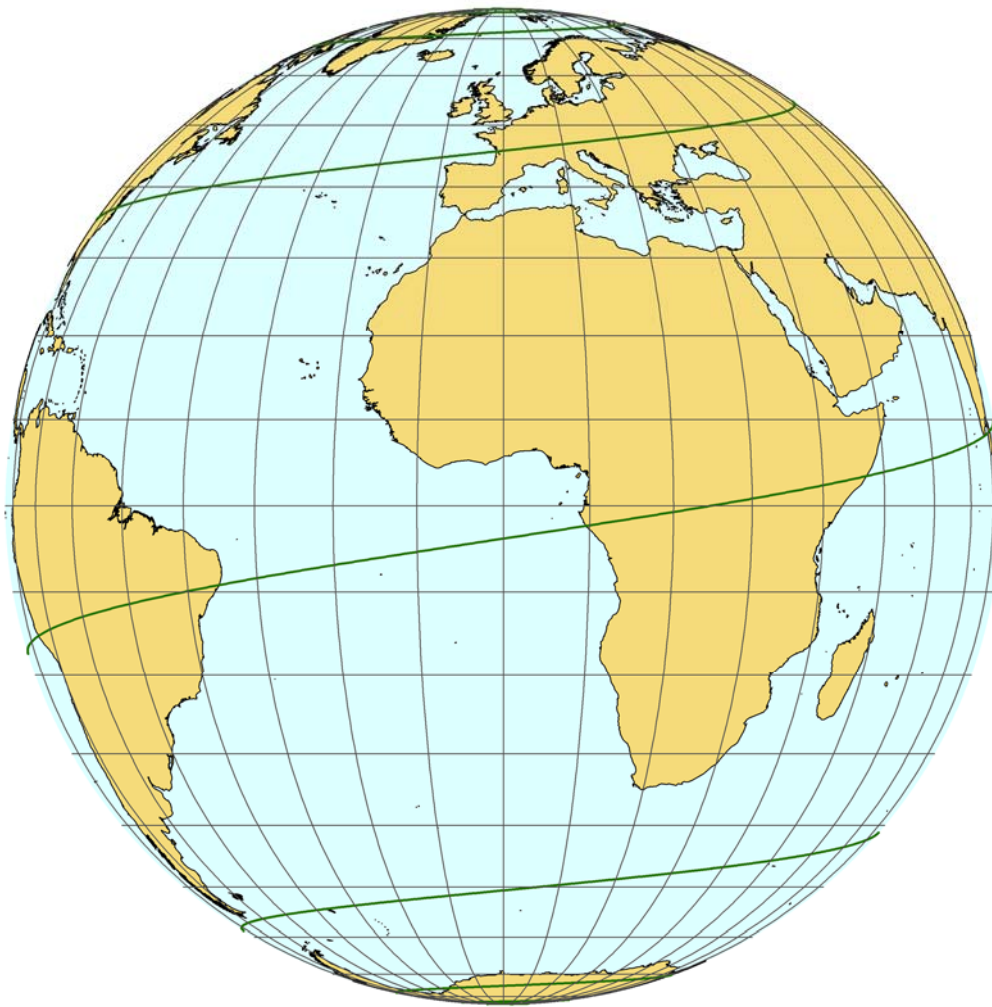


Figura 4.4.24. Representación de la loxodrómica en una proyección ortográfica transversa con centro en: $\varphi_o = 00^\circ$, $\lambda=000^\circ$.

4.4.6.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección ortográfica

Sobre una proyección ortográfica todo círculo máximo de la esfera se proyectará según una elipse a excepción de aquellos que pasen por el centro de la proyección que se representarán como rectas.

4.4.6.2.1. Derrota ortodrómica sobre la proyección ortográfica horizontal

- Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección ortográfica horizontal

Sustituyendo la expresión (2.5.143) en la ecuación de la ortodrómica (4.4.7) se obtiene la ecuación que corresponde a la ecuación implícita de una ortodrómica, en una proyección ortográfica horizontal:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \left[\arcsen \left(\sqrt{1-\rho^2} \operatorname{sen} \varphi_o + y \cos \varphi_o \right) \right] = \\ & \operatorname{sen} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{1-\rho^2} \cos \varphi_o - y \operatorname{sen} \varphi_o} \right) + \lambda_o - \alpha \right] \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \quad (4.4.113)$$

Y sustituyendo el valor de ρ (2.5.53) en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \left[\arcsen \left(\sqrt{1-x^2-y^2} \operatorname{sen} \varphi_0 + y \cos \varphi_0 \right) \right] = \\ & \operatorname{sen} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2} \cos \varphi_0 - y \operatorname{sen} \varphi_0} \right) + \lambda_0 - \alpha \right] \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \quad (4.4.114)$$

- Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección ortográfica horizontal

Las ecuaciones paramétricas de la ortodrómica, se obtienen sustituyendo el valor de la longitud despejada de la ecuación de la ortodrómica (4.4.10) en (2.5.138):

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \varphi \operatorname{sen} [\arcsen (\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_0] \\ y &= \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi_0 \cos [\arcsen (\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_0] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.115)$$

- Representación gráfica de la ortodrómica en la proyección ortográfica horizontal

En la figura 4.4.25 puede verse como la representada de una ortodrómica en una proyección ortográfica horizontal es un arco de elipse.

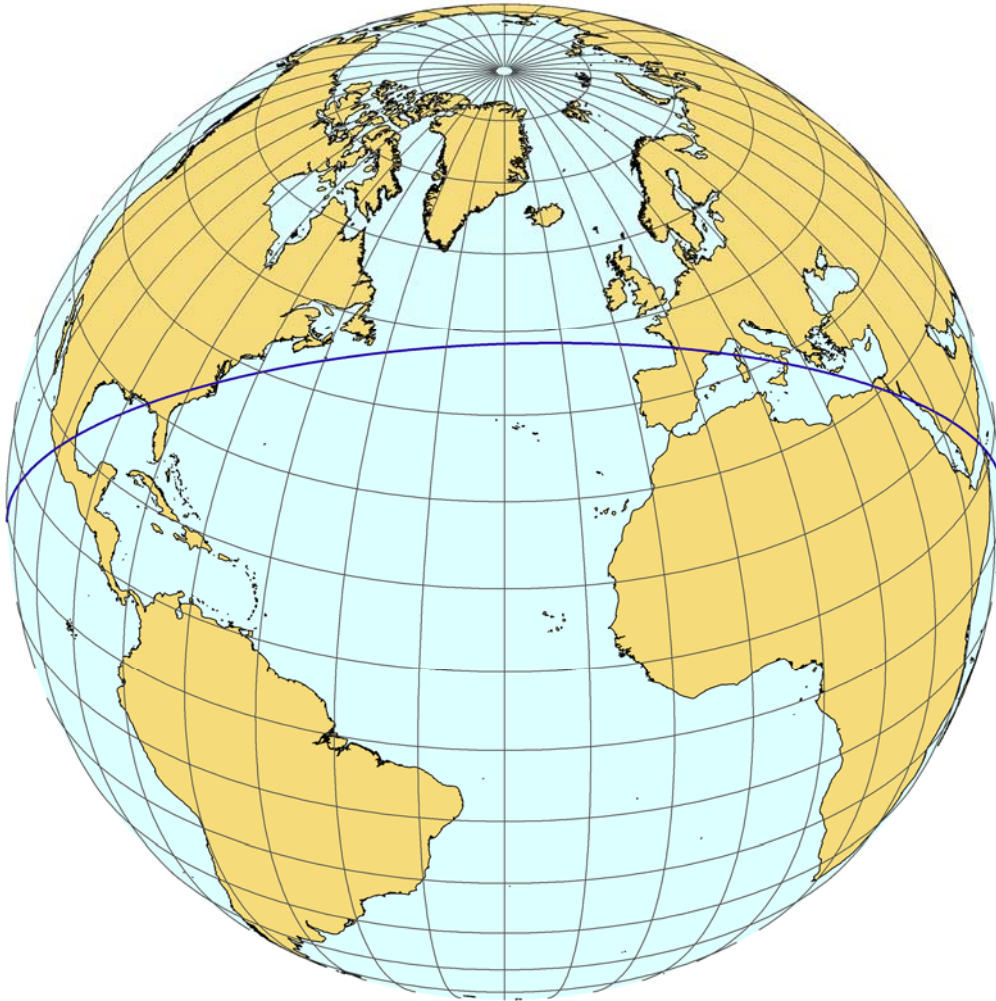


Figura 4.4.25. Representación de la ortodrómica en una proyección ortográfica horizontal con centro en: $\varphi_o = 30^\circ N$, $\lambda_o = 30^\circ W$.

4.4.6.2.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección ortográfica polar

- Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección ortográfica polar

La ecuación implícita de la derrota ortodrómica en la ortográfica polar se obtiene particularizando el aspecto horizontal para $\varphi_o = \pm 90^\circ$.

Considerando en primer lugar $\varphi_o = + 90^\circ$ (Polo Norte) se obtiene de (4.4.113) que la ecuación de la transformada de una ortodrómica será:

$$\operatorname{tg}\left(\arcsen\sqrt{1-\rho^2}\right)=\operatorname{sen}\left[\arctg\left(-\frac{x}{y}\right)+\lambda_o-\alpha\right]\operatorname{tg}\beta \quad (4.4.116)$$

O desarrollando el valor de ρ (2.5.53):

$$\operatorname{tg}\left(\arcsen\sqrt{1-x^2-y^2}\right)=\operatorname{sen}\left[\arctg\left(-\frac{x}{y}\right)+\lambda_o-\alpha\right]\operatorname{tg}\beta \quad (4.4.117)$$

- Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección ortográfica polar

Sustituyendo $\varphi_o = \pm 90^\circ$ en las expresiones paramétricas obtenidas para la ortográfica horizontal, se obtienen sus homónimas para el aspecto polar.

Para $\varphi_o = +90^\circ$ (Polo Norte), se obtiene de (4.4.115):

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \varphi \operatorname{sen}\left[\arcsen(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta)+\alpha-\lambda_o\right] \\ y &= -\cos \varphi \cos\left[\arcsen(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta)+\alpha-\lambda_o\right] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.118)$$

Y para $\varphi_o = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \varphi \operatorname{sen}\left[\arcsen(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta)+\alpha-\lambda_o\right] \\ y &= \cos \varphi \cos\left[\arcsen(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta)+\alpha-\lambda_o\right] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.119)$$

- Representación gráfica de la ortodrómica en la proyección ortográfica polar

Al igual que en el aspecto horizontal, la derrota ortodrómica se proyectará como un arco de elipse como puede verse en la siguiente figura:

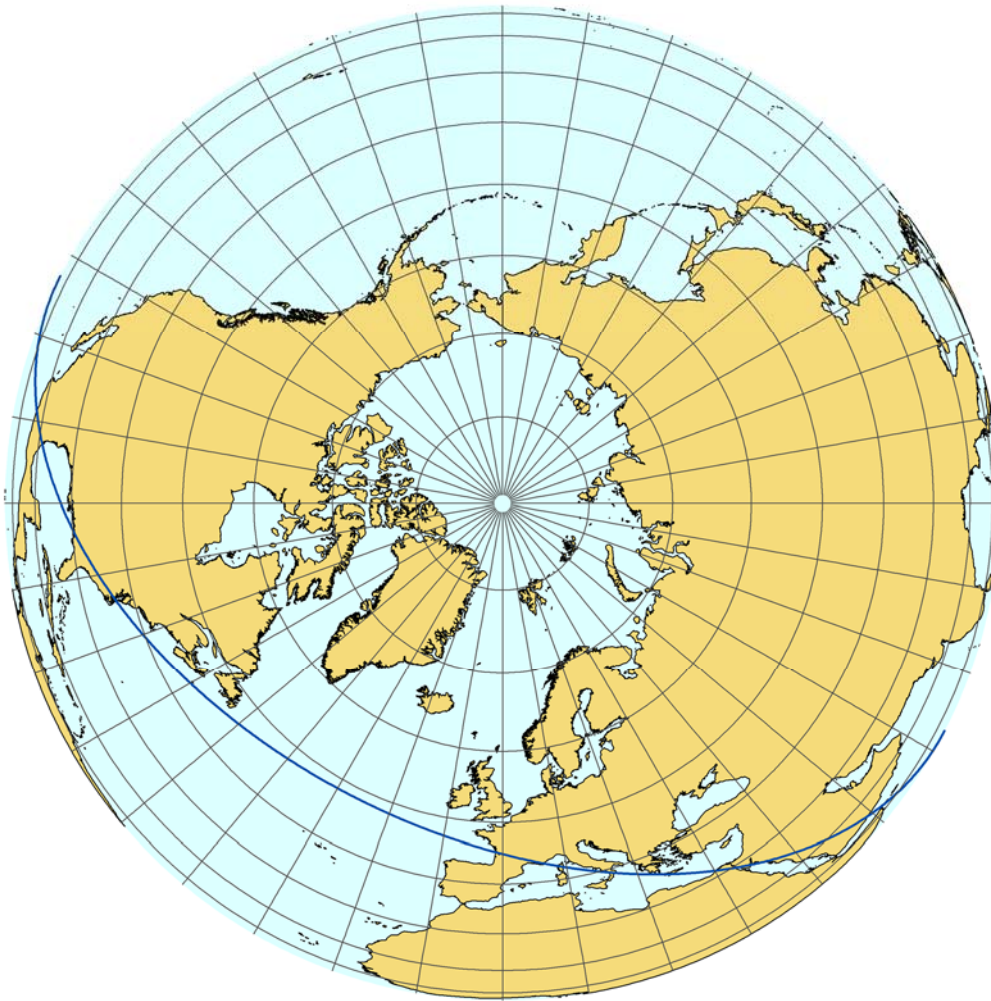


Figura 4.4.26. Representación de la ortodrómica en una proyección ortográfica polar con centro en: $\varphi_o = 90^\circ \text{ N}$.

4.4.6.2.3. Derrota ortodrómica sobre la proyección ortográfica transversa

- Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección ortográfica transversa

Al igual que para el aspecto polar, particularizando la ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección ortográfica horizontal (4.4.113) para $\varphi_o = 0^\circ$, se obtiene:

$$\operatorname{tg}(\arcsen y) = \operatorname{sen} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) + \lambda_o - \alpha \right] \operatorname{tg} \beta \quad (4.4.120)$$

Y desarrollando el valor de ρ (2.5.53):

$$\operatorname{tg}(\arcsen y) = \operatorname{sen} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) + \lambda_o - \alpha \right] \operatorname{tg} \beta \quad (4.4.121)$$

- **Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección ortográfica transversa**

Sustituyendo $\varphi_0 = 0^\circ$, en las expresiones homónimas determinadas en el supuesto horizontal (4.4.115), se obtienen las siguientes ecuaciones paramétricas para el aspecto transversa:

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \varphi \operatorname{sen} [\arcsen(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_0] \\ y &= \operatorname{sen} \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4.4.122)$$

- **Representación gráfica de la ortodrómica en la proyección ortográfica transversa**

Al igual que en los otros aspectos, la representación de una ortodrómica en la proyección ortográfica transversa es un arco de elipse, como puede verse en la siguiente figura:

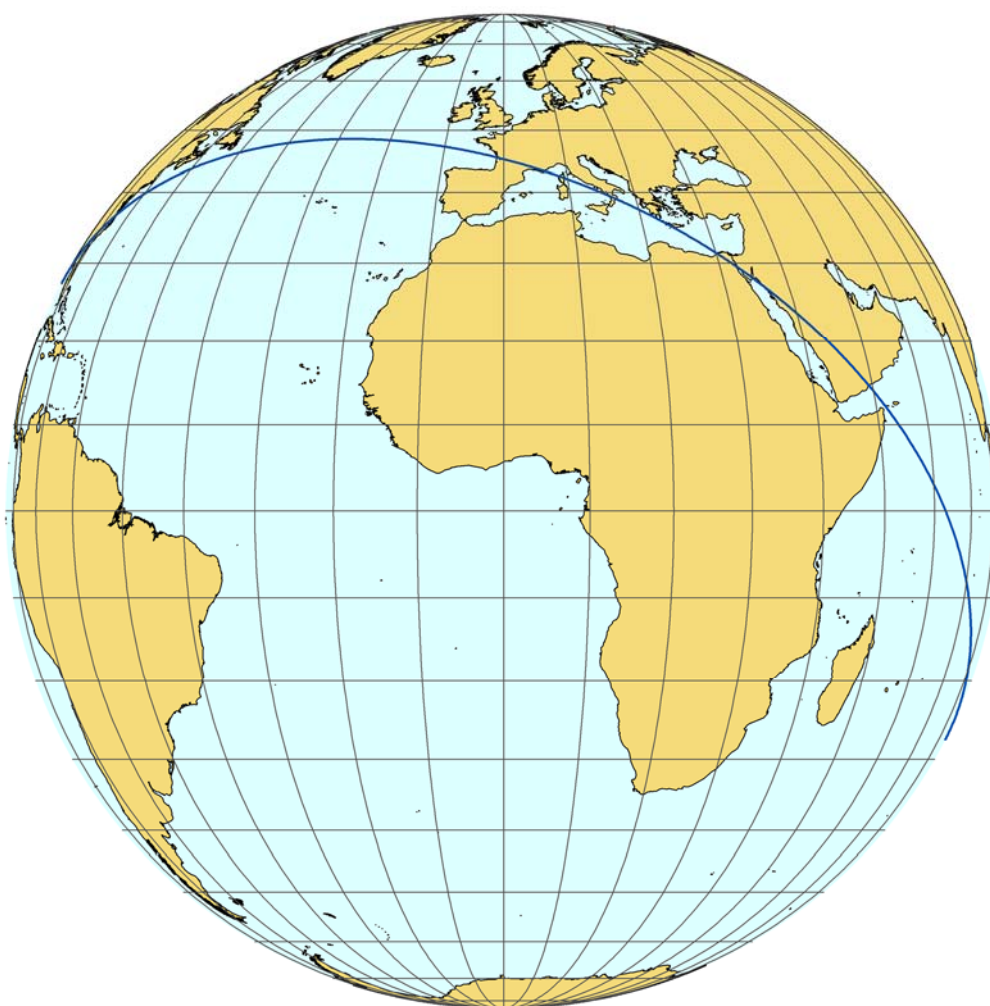


Figura 4.4.27. Representación de la ortodrómica en una proyección ortográfica transversa con centro en: $\varphi_0 = 00^\circ$ y $\lambda_0 = 000^\circ$.

4.4.7. Derrota loxodrómica y ortodrómica sobre la proyección acimutal equidistante

Del mismo modo que el resto de proyecciones acimutales ya estudiadas, se desarrollarán las ecuaciones de la loxodrómica y ortodrómica sobre cada uno de los aspectos de la proyección acimutal equidistante, cambiando únicamente las funciones de transformación propias del sistema proyectivo.

4.4.7.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección acimutal equidistante

4.4.7.1.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección acimutal equidistante horizontal

- Ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección acimutal equidistante horizontal

En la proyección acimutal equidistante horizontal las fórmulas de correspondencia de cartesianas a geográficas son (2.5.184) y (2.5.186):

$$\begin{aligned}\varphi &= \arcsen\left(\cos\phi\sin\varphi_0 + \frac{y}{\phi}\cos\varphi_0\sin\phi\right) \\ \lambda &= \lambda_0 + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\phi\cos\varphi_0\cotg\phi - y\sin\varphi_0}\right)\end{aligned}$$

Siendo $\phi = \rho^{302}$:

$$\left. \begin{aligned}\varphi &= \arcsen\left(\cos\rho\sin\varphi_0 + \frac{y}{\rho}\cos\varphi_0\sin\rho\right) \\ \lambda &= \lambda_0 + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\rho\cos\varphi_0\cotg\rho - y\sin\varphi_0}\right)\end{aligned} \right\} \quad (4.4.123)$$

Sustituyendo ρ por su valor (2.5.53) en la ecuación anterior:

$$\left. \begin{aligned}\varphi &= \arcsen\left(\cos\sqrt{x^2+y^2}\sin\varphi_0 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\varphi_0\sin\sqrt{x^2+y^2}\right) \\ \lambda &= \lambda_0 + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\cos\varphi_0\cotg\sqrt{x^2+y^2} - y\sin\varphi_0}\right)\end{aligned} \right\} \quad (4.4.124)$$

De esta forma, sustituyendo (4.4.123) en la ecuación de una loxodrómica (4.4.1) y considerando $\Delta\lambda_{00} = \lambda_0 - \lambda_0$:

$$\begin{aligned}& \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\rho\cos\varphi_0\cotg\rho - y\sin\varphi_0}\right) - \Delta\lambda_{00} \\ &= \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 + \cos\rho\sin\varphi_0 + \frac{y}{\rho}\cos\varphi_0\sin\rho}{1 - \cos\rho\sin\varphi_0 - \frac{y}{\rho}\cos\varphi_0\sin\rho}}\end{aligned} \quad (4.4.125)$$

Y desarrollando el valor de ρ (2.5.53):

³⁰² En la construcción de la proyección acimutal equidistante no intervienen fundamentos geométricos directos, se trata de una proyección analítica, y estará condicionada al cumplimiento de $\phi = \rho$ contemplada en la figura 2.5.47.

$$\begin{aligned}
& \arctg \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} \cos \varphi_0 \cotg \sqrt{x^2 + y^2} - y \sin \varphi_0} \right) - \Delta \lambda_{o0} \\
& = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 + \cos \sqrt{x^2 + y^2} \sin \varphi_0 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \varphi_0 \sin \sqrt{x^2 + y^2}}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2} \sin \varphi_0 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \varphi_0 \sin \sqrt{x^2 + y^2}}} \quad (4.4.126)
\end{aligned}$$

- Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la proyección acimutal equidistante horizontal

Las fórmulas generales de transformación de las coordenadas geográficas en la esfera a cartesianas en el plano para una proyección acimutal equidistante horizontal son (2.5.179)³⁰³:

$$\begin{aligned}
x &= \phi \frac{\cos \varphi \sin \Delta \lambda}{\sin \phi} \\
y &= \phi \frac{\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta \lambda}{\sin \phi}
\end{aligned}$$

Donde³⁰⁴:

$$\phi = \arcsin(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda) \quad (4.4.127)$$

$$\sin \phi = \sin[\arcsin(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda)] \quad (4.4.128)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (2.5.179) ϕ y $\sin \phi$ por sus valores:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\arcsin(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda)}{\sin[\arcsin(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda)]} \cos \varphi \sin \Delta \lambda \\
y &= \frac{\arcsin(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda)}{\sin[\arcsin(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda)]} \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta \lambda
\end{aligned}$$

Ecuaciones que también se pueden expresar:

$$\left. \begin{aligned}
x &= \frac{\arcsin(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda)}{\sqrt{1 - (\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda)^2}} \cos \varphi \sin \Delta \lambda \\
y &= \frac{\arcsin(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda)}{\sqrt{1 - (\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda)^2}} (\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta \lambda)
\end{aligned} \right\} \quad (4.4.129)$$

Se obtendrán las ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en función de la latitud, en una proyección acimutal equidistante horizontal, sustituyendo la expresión (4.4.4) en las fórmulas de correspondencia anteriores (4.4.129):

³⁰³ Téngase en cuenta que para estas expresiones: $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$, $\Delta \lambda_{o0} = \lambda_0 - \lambda_0$.

³⁰⁴ Los valores de ϕ y $\sin \phi$ se obtienen partiendo del triángulo esférico PTA de la figura 2.5.48.

$$\left. \begin{aligned}
 x &= \frac{\arcsin \left\{ \sin \varphi \sin \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{o0} \right] \right\}}{\sqrt{1 - \left\{ \sin \varphi \sin \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{o0} \right] \right\}^2}} \\
 &\quad \times \left\{ \cos \varphi \sin \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{o0} \right] \right\} \\
 y &= \frac{\arcsin \left\{ \sin \varphi \sin \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{o0} \right] \right\}}{\sqrt{1 - \left\{ \sin \varphi \sin \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{o0} \right] \right\}^2}} \\
 &\quad \times \left\{ \sin \varphi \cos \varphi_o - \cos \varphi \sin \varphi_o \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{o0} \right] \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.4.130)$$

- Representación gráfica de la loxodrómica en la proyección acimutal equidistante horizontal

Toda loxodrómica de la esfera se representará en el plano como una curva compleja con tendencia asintótica en los polos; salvo en el supuesto en que la derrota coincida con el meridiano central, caso en el cuál vendrá representada por una línea recta.

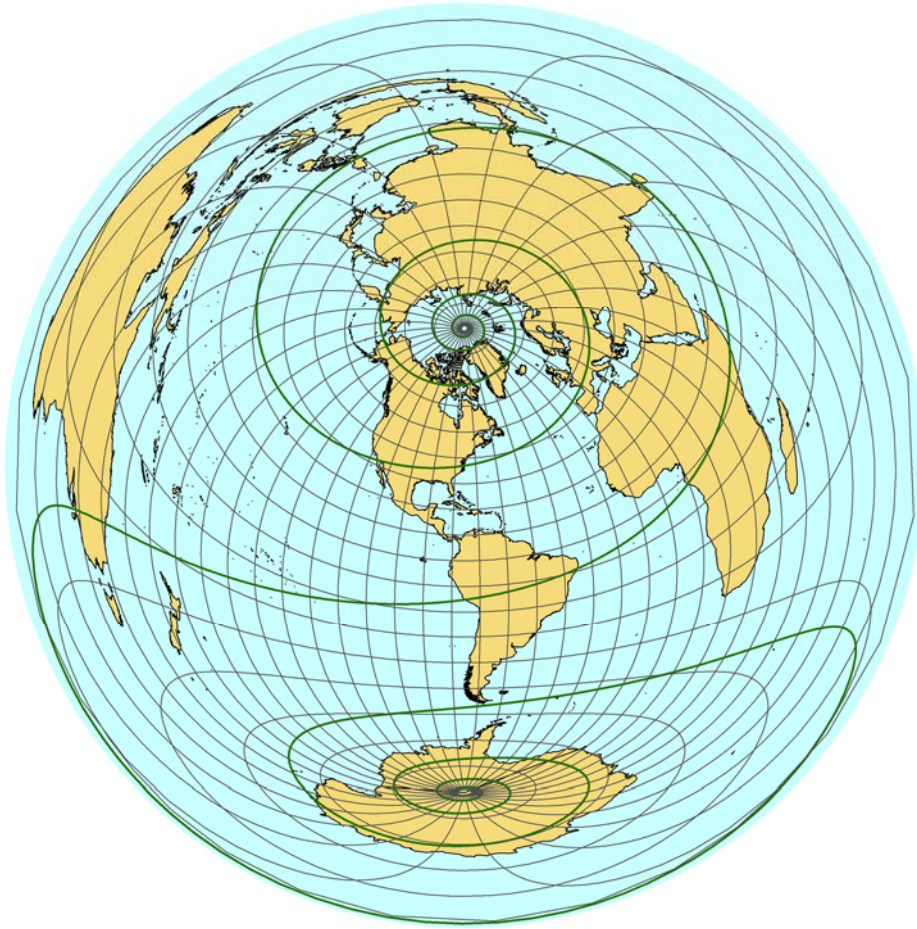


Figura 4.4.28. Representación de la loxodrómica en una proyección acimutal equidistante horizontal con centro en Norfolk.

4.4.7.1.2. Derrota loxodrómica sobre la proyección acimutal equidistante polar

- Ecuación implícita de la loxodrómica sobre la proyección acimutal equidistante polar

Para una proyección acimutal equidistante polar donde $\varphi_0 = +90^\circ$ (Polo Norte), se obtiene de (4.4.125) que la ecuación de la transformada de una loxodrómica responde a la forma:

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{x}{y}\right) - \Delta\lambda_{00} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 + \cos \rho}{1 - \cos \rho}} \quad (4.4.131)$$

Y desarrollando el valor de ρ (2.5.53):

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{x}{y}\right) - \Delta\lambda_{00} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 + \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}} \quad (4.4.132)$$

Para una proyección acimutal equidistante polar donde $\varphi_0 = -90^\circ$ (Polo Sur), se obtiene de (4.4.125):

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \Delta\lambda_{00} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 - \cos \rho}{1 + \cos \rho}} \quad (4.4.133)$$

Y desarrollando el valor de ρ (2.5.53):

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \Delta\lambda_{o0} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \cos \sqrt{x^2 + y^2}}} \quad (4.4.134)$$

- Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica sobre la proyección acimutal equidistante polar

Para la obtención de las ecuaciones paramétricas se particularizará el aspecto horizontal, sustituyendo $\varphi_0 = \pm 90^\circ$ en las expresiones (4.4.130).

La expresión paramétrica de una derrota loxodrómica sobre una proyección acimutal equidistante polar, en función de la latitud, y cuando $\varphi_0 = +90^\circ$ (Polo Norte) es:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{arccos}(\operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right] \\ y &= \operatorname{arccos}(\operatorname{sen} \varphi) \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right] \end{aligned} \quad (4.4.135)$$

Mientras que para $\varphi_0 = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\begin{aligned} x &= \frac{\operatorname{arccos}(-\operatorname{sen} \varphi)}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \varphi}} \cos \varphi \operatorname{sen} \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right] \\ y &= \frac{\operatorname{arccos}(-\operatorname{sen} \varphi)}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \varphi}} \cos \varphi \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta\lambda_{o0} \right] \end{aligned} \quad (4.4.136)$$

- Representación gráfica de la loxodrómica sobre la proyección acimutal equidistante polar

La derrota es una espiral con tendencia asintótica en los polos, salvo en los supuestos particulares de coincidencia con un paralelo o un meridiano, donde se representarán como una circunferencia o como una recta respectivamente.

En la siguiente figura puede verse una derrota loxodrómica sobre una proyección acimutal equidistante polar con centro en el Polo Norte:

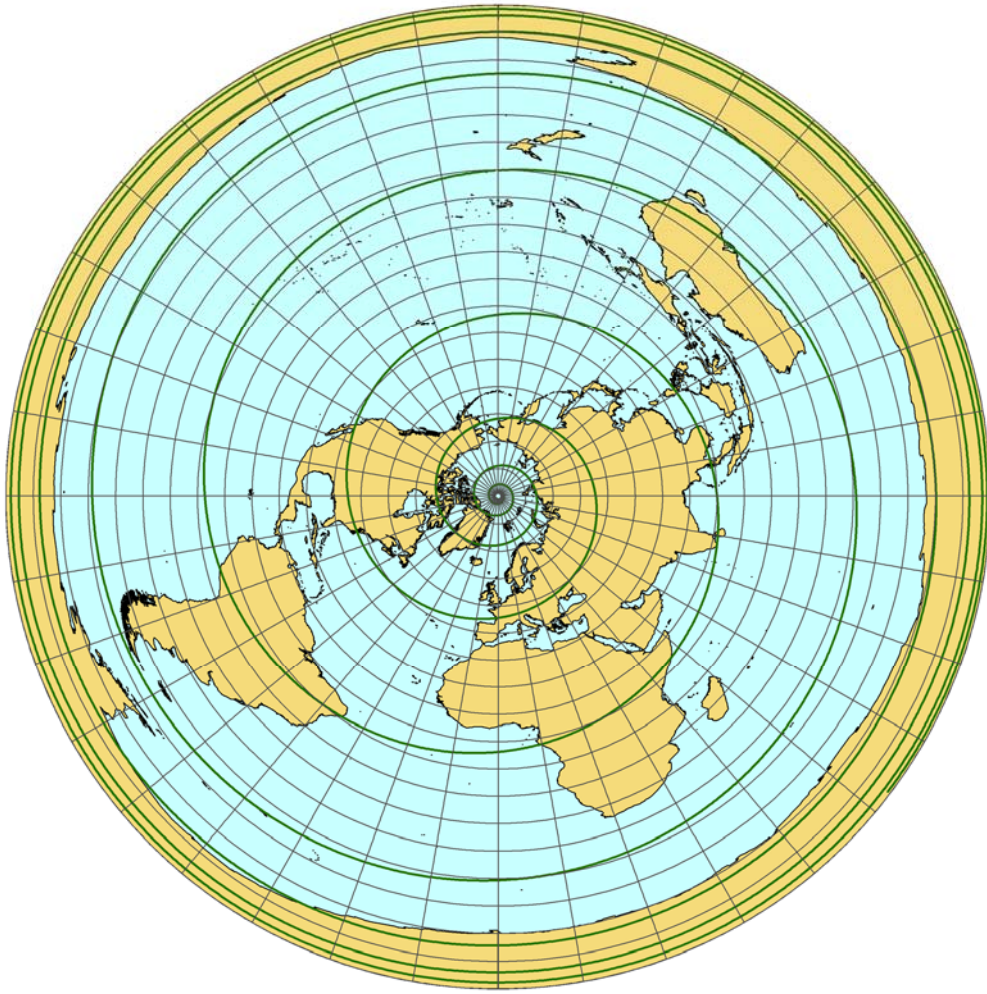


Figura 4.4.29. Representación de la loxodrómica en una proyección acimutal equidistante polar con centro en: $\varphi_0 = 90^\circ N$.

4.4.7.1.3. Derrota loxodrómica sobre la proyección acimutal equidistante transversa

- Ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección acimutal equidistante transversa

Particularizando la expresión (4.4.125) para $\varphi_0 = 0^\circ$, se obtiene la ecuación implícita en la acimutal equidistante transversa:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\rho \cotg \rho}\right) - \Delta\lambda_{00} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 + \frac{y}{\rho} \operatorname{sen} \rho}{1 - \frac{y}{\rho} \operatorname{sen} \rho}} \quad (4.4.137)$$

Desarrollando el valor de ρ (2.5.53):

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} \cotg \sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \Delta\lambda_{00} = \operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2}}{1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2}}} \quad (4.4.138)$$

- Ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la proyección acimutal equidistante transversa

Al igual que para el aspecto polar, particularizando la expresión (4.4.130) para $\varphi_0 = 0^\circ$, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la loxodrómica en la acimutal equidistante transversa:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\arcsin \left\{ \cos \varphi \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{00} \right] \right\}}{\sqrt{1 - \left\{ \cos \varphi \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{00} \right] \right\}^2}} \\ &\quad \times \left\{ \cos \varphi \operatorname{sen} \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{00} \right] \right\} \\ y &= \frac{\arcsin \left\{ \cos \varphi \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{00} \right] \right\}}{\sqrt{1 - \left\{ \cos \varphi \cos \left[\operatorname{tg} R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \Delta \lambda_{00} \right] \right\}^2}} \operatorname{sen} \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4.4.139)$$

- Representación gráfica de la loxodrómica en la proyección acimutal equidistante transversa

Al igual que en el aspecto transverso, la loxodrómica de la esfera se representará en el plano como una curva compleja con tendencia asintótica en los polos; salvo en el supuesto en que la derrota coincida con el meridiano central, caso en el cuál vendrá representada por una línea recta.

En la figura 4.4.30 se puede ver una loxodrómica en una proyección acimutal equidistante transversa con centro en $\varphi_0 = 00^\circ$, $\lambda_0 = 000^\circ$.

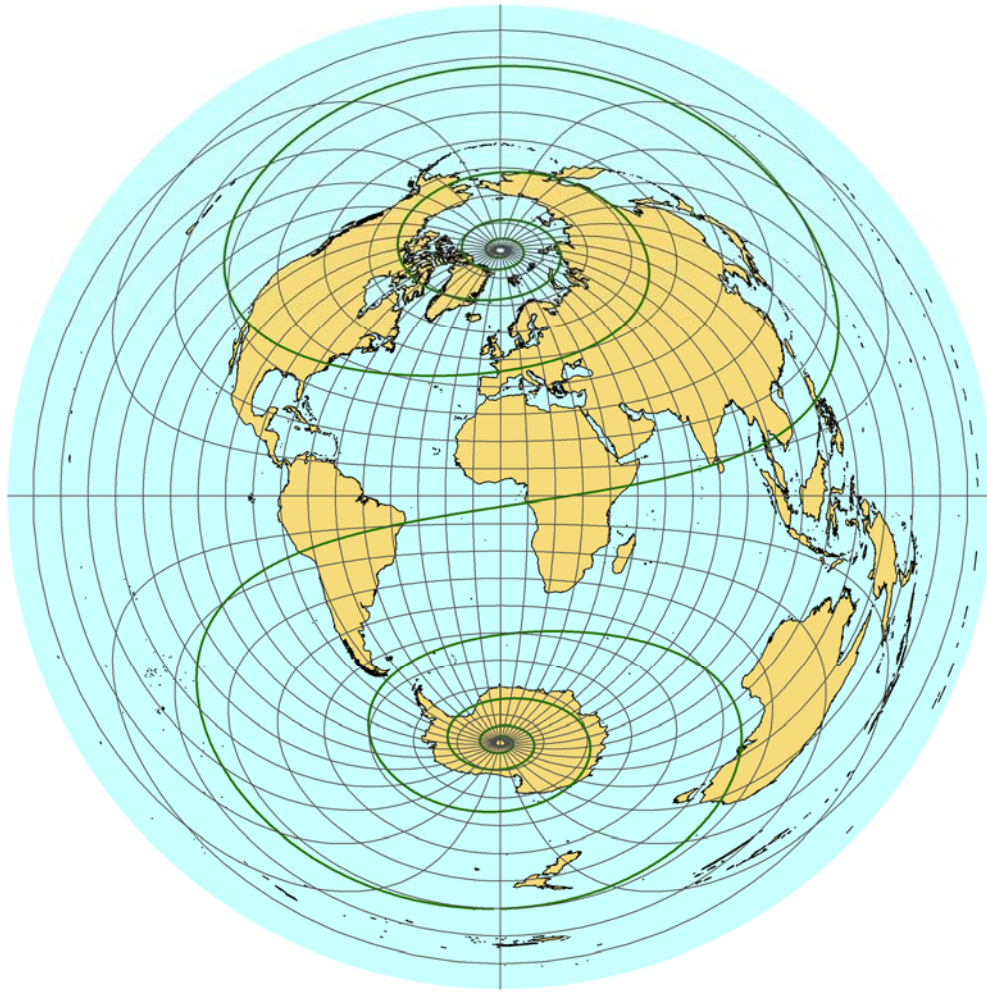


Figura 4.4.30. Representación de la loxodrómica en una proyección horizontal equidistante transversa con centro en: $\varphi_0 = 00^\circ$, $\lambda = 000^\circ$.

4.4.7.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección acimutal equidistante

Al igual que en las proyecciones perspectivas, sobre una proyección acimutal equidistante todo círculo máximo de la esfera se proyectará según una curva, a excepción de aquellos que pasen por el centro de la proyección que se representarán como rectas.

4.4.7.2.1. Derrota ortodrómica sobre la proyección acimutal equidistante horizontal

- Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección acimutal equidistante horizontal

Sustituyendo las expresiones (2.5.184) y (2.5.185) en la ecuación de la ortodrómica (4.4.7), se obtiene la ecuación que corresponde a la ecuación implícita de una ortodrómica en una proyección acimutal equidistante horizontal:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \left[\arcsen \left(\cos \phi \operatorname{sen} \varphi_0 + \frac{y}{\phi} \cos \varphi_0 \operatorname{sen} \phi \right) \right] \\ &= \operatorname{sen} \left[\arctg \left(\frac{x}{\phi \cos \varphi_0 \cotg \phi - y \operatorname{sen} \varphi_0} \right) + \lambda_0 - \alpha \right] \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \quad (4.4.140)$$

Siendo $\phi = \rho^{305}$:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \left[\arcsen \left(\cos \rho \operatorname{sen} \varphi_o + \frac{y}{\rho} \cos \varphi_o \operatorname{sen} \rho \right) \right] \\ &= \operatorname{sen} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\rho \cos \varphi_o \cotg \rho - y \operatorname{sen} \varphi_o} \right) + \lambda_o - \alpha \right] \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \quad (4.4.141)$$

Y sustituyendo ρ por su valor (2.5.53):

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \left[\arcsen \left(\cos \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{sen} \varphi_o + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \varphi_o \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] \\ &= \operatorname{sen} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} \cos \varphi_o \cotg \sqrt{x^2 + y^2} - y \operatorname{sen} \varphi_o} \right) + \lambda_o - \alpha \right] \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \quad (4.4.142)$$

- Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección acimutal equidistante horizontal

Las ecuaciones paramétricas de la ortodrómica se obtienen sustituyendo (4.4.10) en (4.4.130):

$$\begin{aligned} x &= \frac{\arcsen \{ \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos [\arcsen (\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o] \}}{\sqrt{1 - \{ \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos [\arcsen (\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o] \}^2}} \\ & \times \{ \cos \varphi \operatorname{sen} [\arcsen (\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o] \} \\ y &= \frac{\arcsen \{ \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos [\arcsen (\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o] \}}{\sqrt{1 - \{ \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_o + \cos \varphi \cos \varphi_o \cos [\arcsen (\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o] \}^2}} \\ & \times \{ \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi_o - \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi_o \cos [\arcsen (\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_o] \} \end{aligned} \quad (4.4.143)$$

- Representación gráfica de la ortodrómica en la proyección acimutal equidistante horizontal

En la figura 4.4.31 puede verse como la representada de una ortodrómica en una proyección acimutal equidistante horizontal que pasa por Norfolk es una línea recta.

³⁰⁵ Recuérdese que, en la construcción de la proyección acimutal equidistante no intervienen fundamentos geométricos directos, se trata de una proyección analítica, y estará condicionada al cumplimiento de $\phi = \rho$ contemplada en la figura 2.5.47.

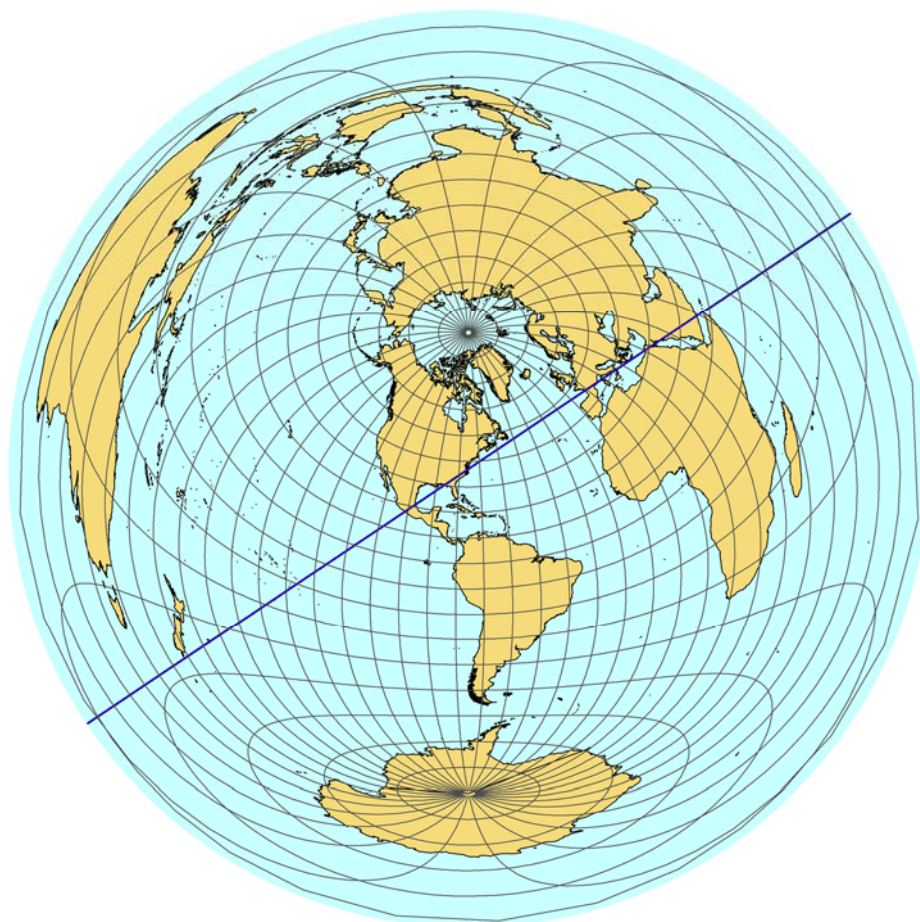


Figura 4.4.31. Representación de la ortodrómica en una proyección acimutal equidistante horizontal con centro en Norfolk.

En la figura 4.4.32 puede verse como la representación de una ortodrómica en una proyección acimutal equidistante horizontal que no pasa por el centro de proyección es una curva.

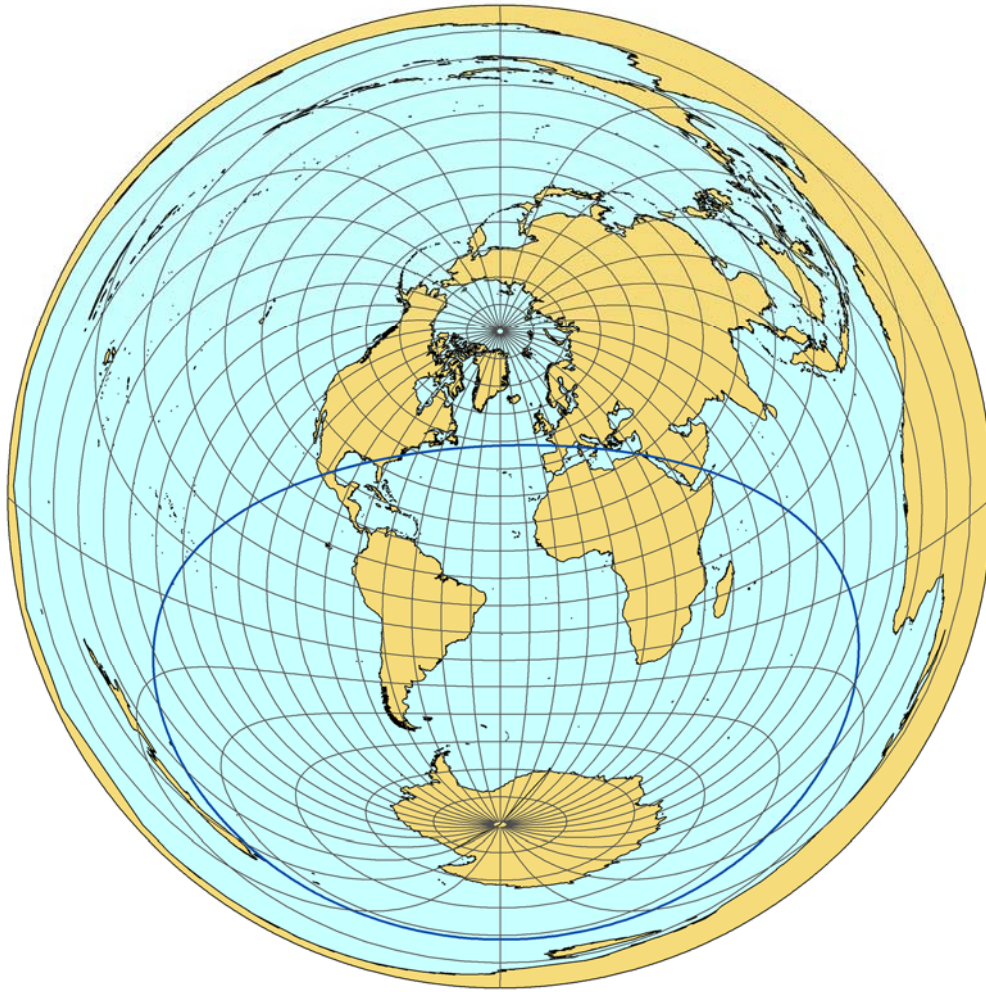


Figura 4.4.32. Representación de la ortodrómica en una proyección acimutal equidistante horizontal con centro en: $\varphi_0 = 30^\circ N$, $\lambda_0 = 30^\circ W$.

4.4.7.2.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección acimutal equidistante polar

- Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección acimutal equidistante polar

Considerando $\varphi_0 = +90^\circ$ (Polo Norte) se obtiene de (4.4.141) que la ecuación de la transformada de una ortodrómica será:

$$\operatorname{tg}[\arcsen(\cos \rho)] = \operatorname{sen}\left[\arctg\left(-\frac{x}{y}\right) + \lambda_0 - \alpha\right] \operatorname{tg} \beta \quad (4.4.144)$$

Sustituyendo el valor de ρ (2.5.53) en la expresión anterior:

$$\operatorname{tg}\left[\arcsen\left(\cos \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right] = \operatorname{sen}\left[\arctg\left(-\frac{x}{y}\right) + \lambda_0 - \alpha\right] \operatorname{tg} \beta \quad (4.4.145)$$

Y para $\varphi_0 = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\operatorname{tg}[\arcsen(-\cos \rho)] = \operatorname{sen}\left[\arctg\left(\frac{x}{y}\right) + \lambda_0 - \alpha\right] \operatorname{tg} \beta \quad (4.4.146)$$

Y sustituyendo ρ por su valor (2.5.53):

$$\operatorname{tg}\left[\arcsen\left(-\cos \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right] = \operatorname{sen}\left[\arctg\left(\frac{x}{y}\right) + \lambda_0 - \alpha\right] \operatorname{tg} \beta \quad (4.4.147)$$

- Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección acimutal equidistante polar

Sustituyendo $\varphi_0 = \pm 90^\circ$ en (4.4.143), se obtienen las ecuaciones paramétricas para el aspecto polar.

Para $\varphi_0 = +90^\circ$ (Polo Norte):

$$\left. \begin{aligned} x &= \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen}\left[\arcsen(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_0\right] \\ y &= \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} \varphi) \cos\left[\arcsen(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_0\right] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.148)$$

Y para $\varphi_0 = -90^\circ$ (Polo Sur):

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\operatorname{arcsen}(-\operatorname{sen} \varphi)}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \varphi}} \cos \varphi \operatorname{sen}\left[\arcsen(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_0\right] \\ y &= \frac{\operatorname{arcsen}(-\operatorname{sen} \varphi)}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \varphi}} \cos \varphi \cos\left[\arcsen(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_0\right] \end{aligned} \right\} \quad (4.4.149)$$

- Representación gráfica de la ortodrómica en la proyección equidistante polar

Al igual que en el aspecto horizontal, la derrota ortodrómica se proyectará como una curva compleja, como puede verse en la siguiente figura:

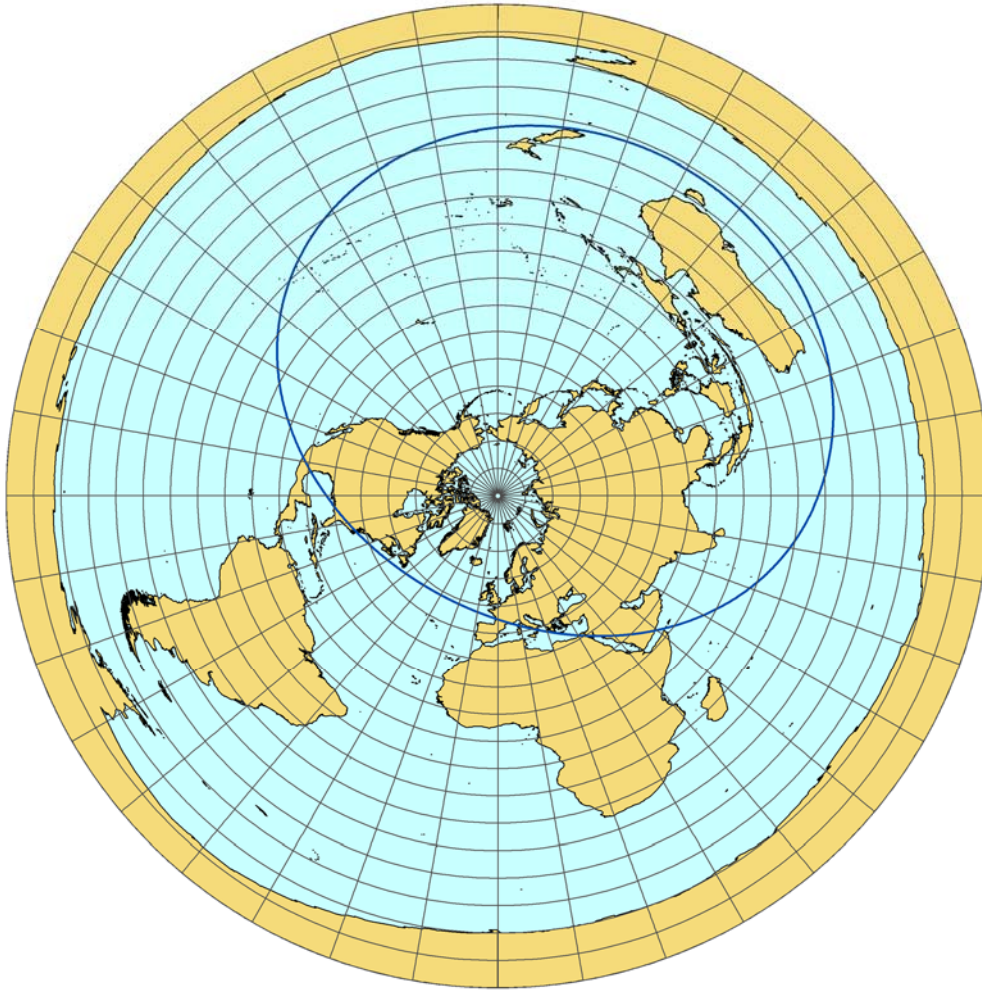


Figura 4.4.33. Representación de la ortodrómica en una proyección acimutal equidistante polar con centro en: $\varphi_o = 90^\circ N$.

4.4.7.2.3. Derrota ortodrómica sobre la proyección acimutal equidistante transversa

- Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección acimutal equidistante transversa

Al igual que para el aspecto polar, particularizando la ecuación implícita de la ortodrómica en el caso horizontal (4.4.141) para $\varphi_o = 0^\circ$, se obtiene:

$$\operatorname{tg} \left[\arcsen \left(\frac{y}{\rho} \operatorname{sen} \rho \right) \right] = \operatorname{sen} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\rho \cotg \rho} \right) + \lambda_o - \alpha \right] \operatorname{tg} \beta \quad (4.4.150)$$

Y desarrollando el valor de ρ (2.5.53):

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \left[\arcsen \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] \\ &= \operatorname{sen} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} \cotg \sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \lambda_o - \alpha \right] \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \quad (4.4.151)$$

- Ecuaciones paramétricas de la ortodrómica en la proyección acimutal equidistante transversa

Sustituyendo $\varphi_0 = 0^\circ$, en (4.4.143), se obtienen las siguientes ecuaciones paramétricas para el aspecto transversa:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\arcsin\{\cos \varphi \cos [\arcsin(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_0]\}}{\sqrt{1 - \{\cos \varphi \cos [\arcsin(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_0]\}^2}} \\ &\quad \times \{\cos \varphi \sin [\arcsin(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_0]\} \\ y &= \frac{\arcsin\{\cos \varphi \cos [\arcsin(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_0]\}}{\sqrt{1 - \{\cos \varphi \cos [\arcsin(\operatorname{tg} \varphi \cotg \beta) + \alpha - \lambda_0]\}^2}} \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.4.152)$$

- Representación gráfica de la ortodrómica en la proyección ortográfica transversa

Al igual que en los otros aspectos, la representada de una ortodrómica en la proyección acimutal equidistante transversa es una curva compleja, a excepción de aquellas que coincidan con la representada del ecuador o del meridiano central, representándose éstas como una recta.

En la siguiente figura puede verse una derrota ortodrómica sobre una proyección acimutal equidistante transversa:

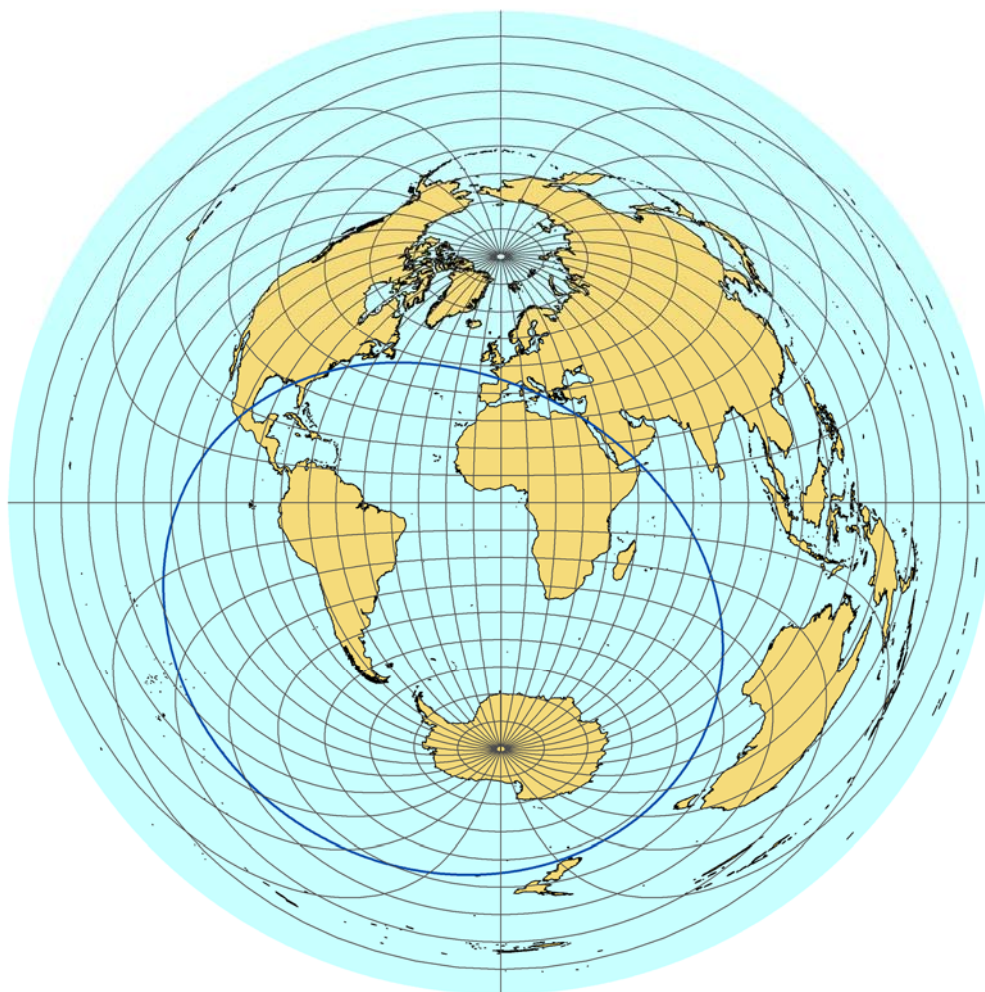


Figura 4.4.34. Representación de la ortodrómica en una proyección acimutal equidistante transversa con centro en: $\varphi_o = 00^\circ$ y $\lambda_o = 000^\circ$.

4.4.8. Derrota loxodrómica y ortodrómica sobre la proyección de Mollweide

4.4.8.1. Derrota loxodrómica sobre la proyección de Mollweide

Para el estudio de la derrota loxodrómica, se consideró conveniente obtener su ecuación implícita y sus ecuaciones paramétricas en función de la latitud, para el supuesto $R = 1$.

4.4.8.1.1. Ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección de Mollweide

En la proyección de Mollweide las funciones de transformación de coordenadas cartesianas a geográficas son (2.5.209)³⁰⁶:

³⁰⁶ Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987. P.252.

$$\varphi = \arcsen\left(\frac{2\theta + \sen 2\theta}{\pi}\right)$$

$$\lambda = \lambda_o + \frac{\pi x}{\sqrt{8R \cos \theta}}$$

Las ecuaciones anteriores también se pueden expresar:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen\left(\frac{2\theta + 2\sen\theta\sqrt{1 - \sen^2\theta}}{\pi}\right) \\ \lambda &= \lambda_o + \frac{\pi x}{2\sqrt{2}\sqrt{1 - \sen^2\theta}} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.153)$$

Donde:

$$\theta = \arcsen\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \quad (4.4.154)$$

$$\sen\theta = \frac{y}{\sqrt{2}} \quad (4.4.155)$$

Sustituyendo los valores de θ (4.4.154) y $\sen\theta$ (4.4.155) en las expresiones de transformación de coordenadas cartesianas a geográficas (4.4.153) y simplificando se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsen\left[\frac{2\arcsen\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + y\sqrt{2 - y^2}}{\pi}\right] \\ \lambda &= \lambda_o + \frac{\pi x}{2\sqrt{2 - y^2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.156)$$

Teniendo así, la ecuación implícita de la loxodrómica en la proyección de Mollweide sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación de la loxodrómica (4.4.1)³⁰⁷:

$$\frac{\pi x}{2\sqrt{2 - y^2}} - \Delta\lambda_{o0} = \text{tgR} \text{Ln} \sqrt{\frac{\pi + 2\arcsen\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + y\sqrt{2 - y^2}}{\pi - 2\arcsen\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + y\sqrt{2 - y^2}}} \quad (4.4.157)$$

4.4.8.1.2. Representación gráfica de la loxodrómica en la proyección de Mollweide

La transformada de la loxodrómica tiende a una línea recta a medida que el rumbo se aproxima a 90° o 180° y en las longitudes próximas al meridiano central, tal y como se puede ver en la siguiente figura:

³⁰⁷ Téngase en cuenta que para estas expresiones: $\Delta\lambda_{o0} = \lambda_o - \lambda_o$.

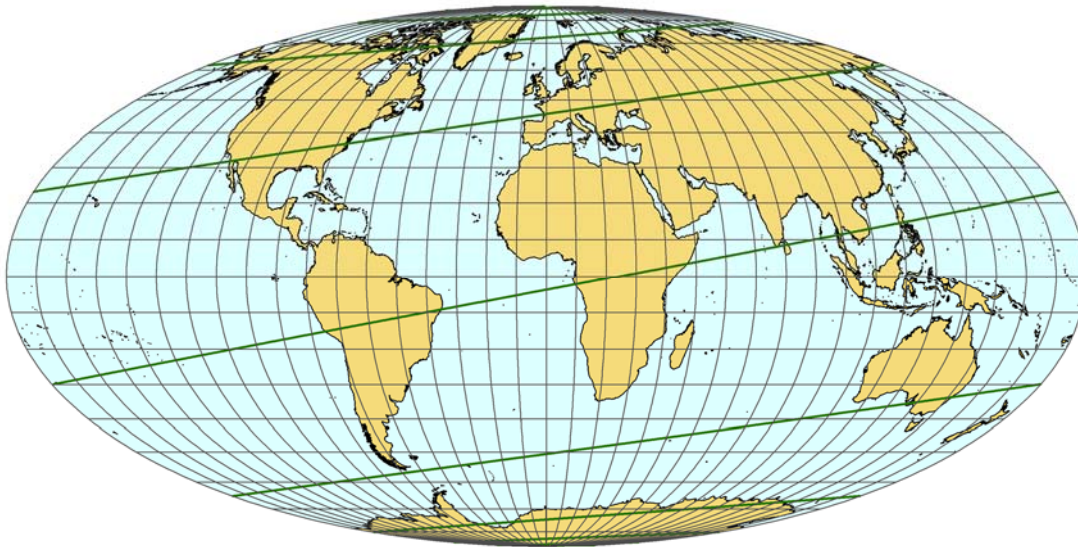


Figura 4.4.35. Derrota loxodrómica sobre una proyección de Mollweide con meridiano central: $\lambda=000^\circ$.

4.4.8.2. Derrota ortodrómica sobre la proyección de Mollweide

4.4.8.2.1. Ecuación implícita de la ortodrómica en la proyección de Mollweide

Sustituyendo la expresión (4.4.153) en la ecuación de la ortodrómica (4.4.7) se obtiene la expresión que corresponde a la ecuación implícita de la transformada de una ortodrómica de constantes α y β :

$$\operatorname{tg} \left\{ \arcsen \left[\frac{2 \arcsen \left(\frac{y}{\sqrt{2}} \right) + y \sqrt{2 - y^2}}{\pi} \right] \right\} = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{2 \sqrt{2 - y^2}} + \lambda_o - \alpha \right) \operatorname{tg} \beta \quad (4.4.158)$$

4.4.8.2.2. Representación gráfica de la ortodrómica en la de Mollweide

La transformada de una ortodrómica es una curva, tal y como se puede ver en la siguiente figura:

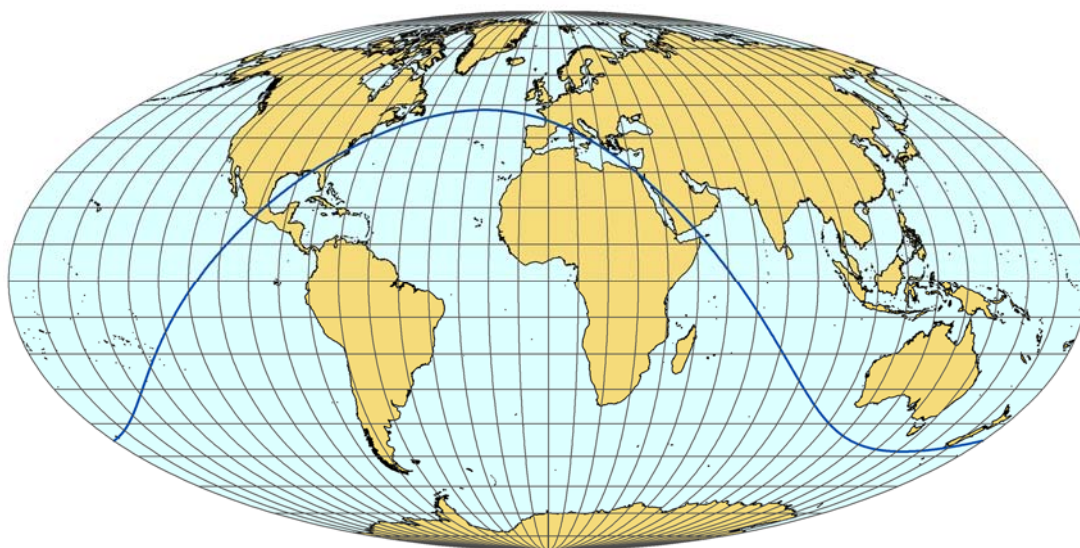


Figura 4.4.36. Derrota ortodrómica sobre una proyección de Mollweide con meridiano central: $\lambda=000^\circ$.

4.4.9. Análisis comparativo de las derrotas sobre las proyecciones propuestas, Mercator y gnomónica

Como ya se ha visto en el capítulo tres, uno de los requisitos a buscar para la construcción de cartas náuticas de papel, es que las derrotas loxodrómica y ortodrómica sean de fácil trazado, donde queda demostrado que la mejor proyección para el trazado de la loxodrómica es la de Mercator y para la ortodrómica la gnomónica, por representarse en ellas como una línea recta. Con la llegada de la cartografía electrónica, ya no prima la sencillez de trazado, sino que, a la hora de planificar o visualizar una derrota, se buscará que la loxodrómica y ortodrómica aparezcan representadas por trayectorias que se asemejen a las reales, es decir, entre dos puntos tendría que verse la ortodrómica con menor longitud que la loxodrómica.

En las figuras 4.4.37 y 4.4.38 pueden verse las derrotas sobre las proyecciones de Mercator y Mollweide. Se hace primero una comparación de estas dos por presentar un aspecto único; pudiéndose ver que, en ambas proyecciones la distancia de la loxodrómica es menor que la de la ortodrómica para todas las derrotas representadas. La loxodrómica en Mercator es una línea recta, y en Mollweide tiende a confundirse con una línea recta al aproximarse a los rumbos de 000° o 180° , e incluso para rumbos próximos a 000° y 180° en las proximidades del meridiano central. Ambas proyecciones no cumplirían con el requisito establecido en el capítulo tres de que la ortodrómica se represente con una distancia menor que la loxodrómica, pero decir que, tienen la ventaja de que el aspecto de las derrotas tiende a ser siempre el mismo.

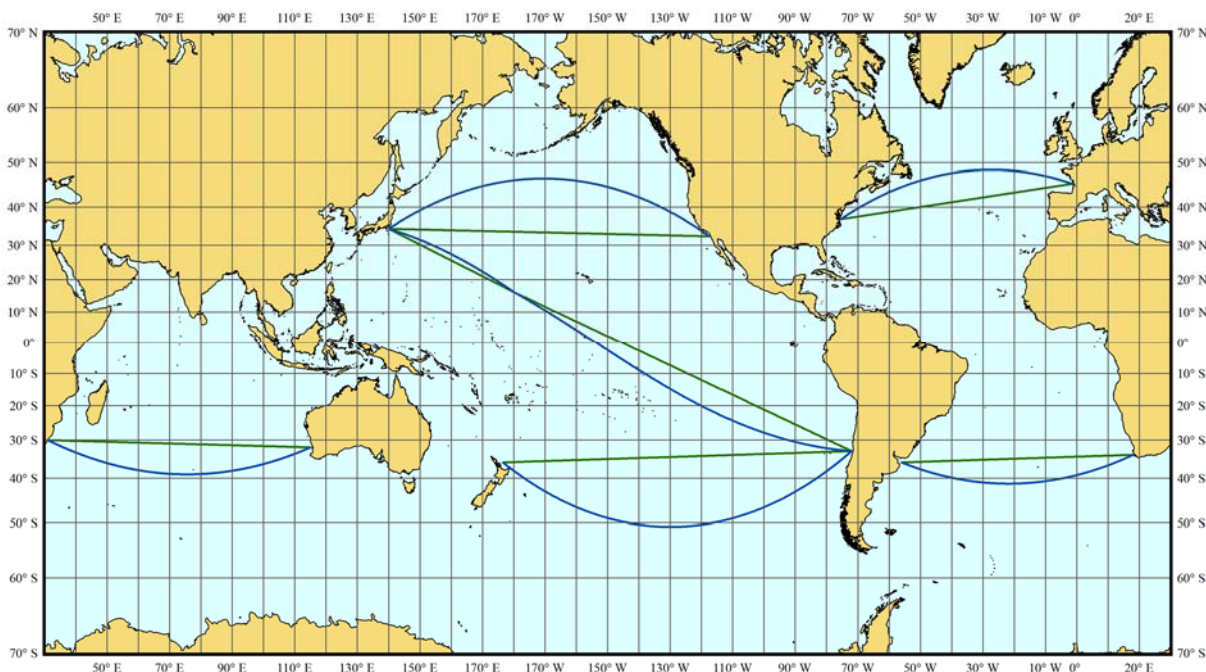


Figura 4.4.37. Derrota loxodrómica (color verde) y ortodrómica (color azul) sobre una proyección de Mercator entre los paralelos de 70° N y 70° S y centrada en $\lambda = 150^\circ W$.

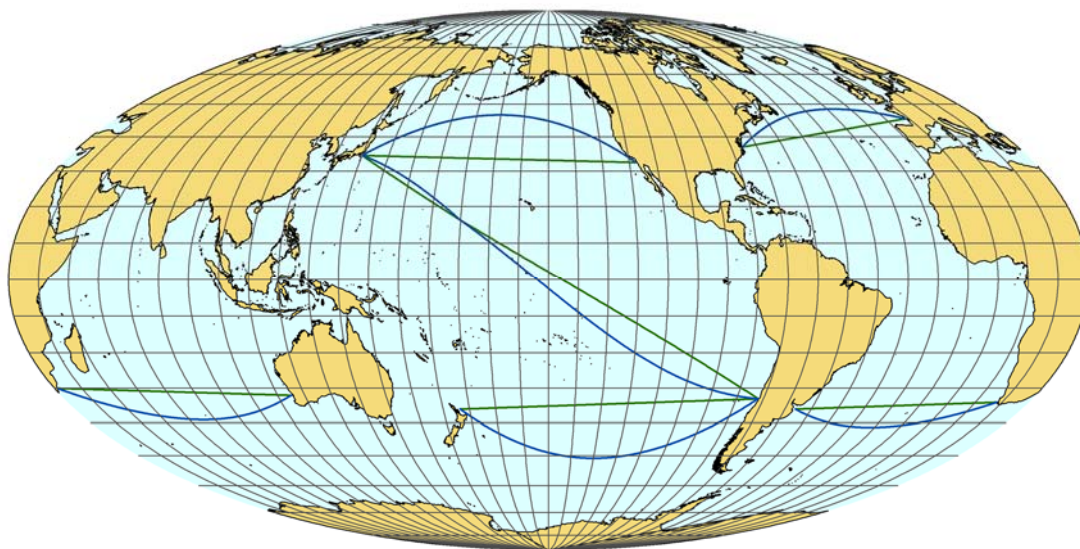


Figura 4.4.38. Derrota loxodrómica (color verde) y ortodrómica (color azul) sobre una proyección de Mollweide centrada en $\lambda = 150^\circ W$.

Dentro de las acimutales estudiadas³⁰⁸, la proyección gnomónica (figura 4.4.39) presenta la particularidad respecto al resto, de que todas las ortodrómicas se representan como líneas rectas. Esto es una gran ventaja en sí mismo, pero el problema fundamental aparecerá cuando se trate de representar zonas amplias, donde la deformación en los extremos de la proyección puede llegar a ser inasumible.

³⁰⁸ Las proyecciones acimutales estudiadas en esta Tesis son la proyección gnomónica, estereográfica, ortográfica y acimutal equidistante.

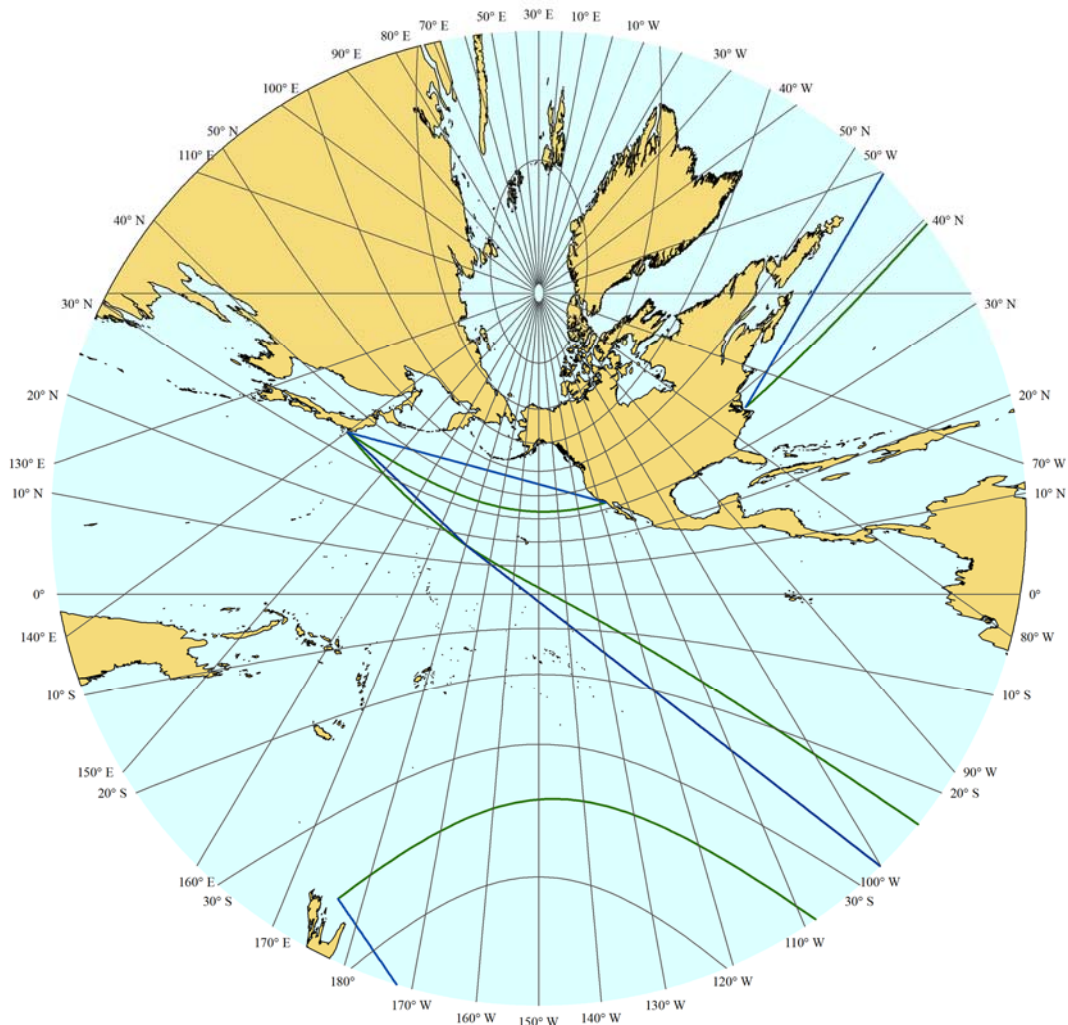
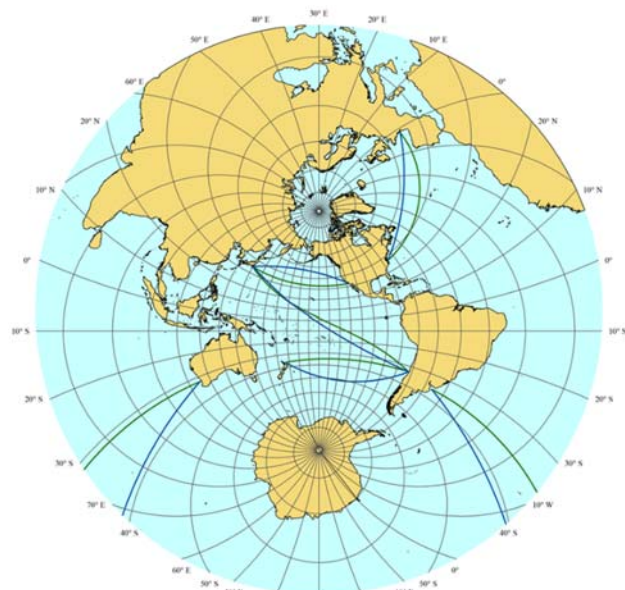


Figura 4.4.39. Derrota loxodrómica (color verde) y ortodrómica (color azul) sobre una proyección de gnomónica centrada en: $\varphi_o = 30^\circ N$, $\lambda = 150^\circ W$.

En el resto de proyecciones acimutales, las ortodrómicas que pasan por el centro de la proyección se representan como líneas rectas. Esto supone el inconveniente de tener que condicionar la representación a la derrota a trazar. Sin embargo, este hecho puede obviarse centrando la representación en un punto medio de la zona a navegar. En este caso, aunque la derrota ortodrómica no pase exactamente por el centro, ésta se presentará como una imagen más próxima a la real de ambas trayectorias sobre la esfera terrestre.

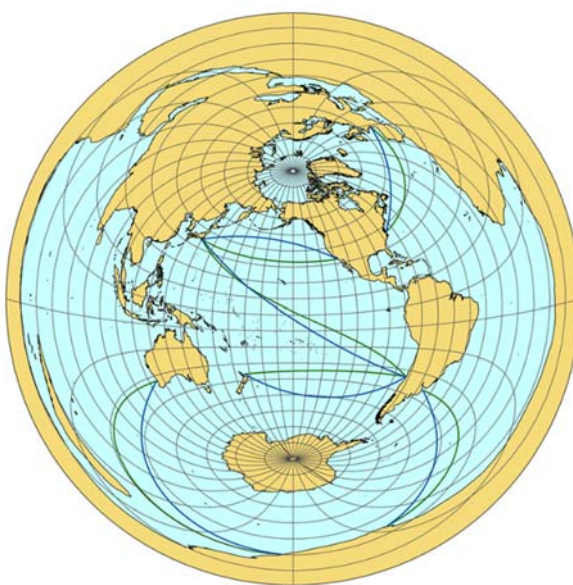
En la figura 4.4.40 pueden verse las proyecciones estereográfica, ortográfica y acimutal equidistante con centro en $\varphi_o = 10^\circ N$ y $\lambda = 150^\circ W$.



Proyección estereográfica



Proyección ortográfica



Proyección acimutal equidistante

Figura 4.4.40. Derrota loxodrómica (color verde) y ortodrómica (color azul) sobre las proyecciones estereográfica, ortográfica y acimutal equidistante centrada en $\phi_0 = 10^\circ N$ y $\lambda = 150^\circ W$.

En las tres imágenes de la figura 4.4.40 al poner el centro de proyección en un punto medio del Pacífico, la derrota ortodrómica entre los puertos de Valparaíso y Yokohama es más corta que la loxodrómica correspondiente. Sin embargo, también puede apreciarse que al alejarse de dicho punto, este principio puede no cumplirse, como puede verse en la derrota entre los puertos de Valparaíso y Auckland. También puede apreciarse en la figura 4.4.40 que la proyección ortográfica es la que ofrece una imagen más intuitiva de la verdadera forma de la ortodrómica y loxodrómica, pero, al igual que en la proyección gnomónica, presenta el problema de que las deformaciones entre los extremos de derrota muy largas (a medida que se aproximan a puntos de salida y llegada antípodas) es tan grande que hace la línea de costa prácticamente inidentificable, tal y como se puede apreciar en la derrota entre los puertos de Valparaíso y Yokohama.

La proyección cónica conforme de Lambert presenta la importante ventaja de que en las proximidades del paralelo estándar la ortodrómica tiende a confundirse con una línea recta, como en el caso de la derrota entre los puertos de San Diego y Yokohama de la figura 4.4.41. También puede verse en el resto de derrotas representadas, que a medida que se alejan del paralelo estándar la ortodrómica es más larga, salvo en el caso de la derrota entre Norfolk y Burdeos que se ve más corta por estar todavía cerca de la latitud de dicho paralelo.

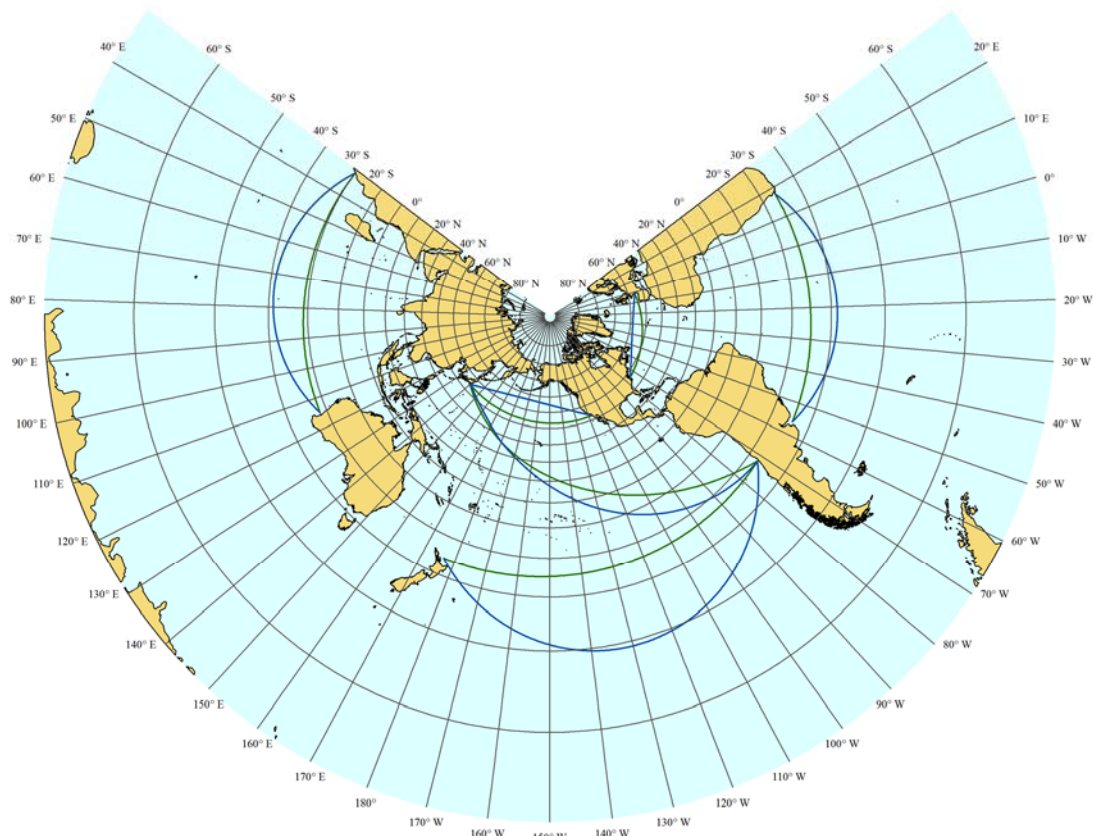


Figura 4.4.41. Derrota loxodrómica (color verde) y ortodrómica (color azul) sobre una proyección cónica conforme de Lambert, con paralelo estándar 45° N.

La proyección cónica de Lambert presenta otro problema adicional, cuando se quieren representar derrotas muy largas que no siguen la dirección de un paralelo (derrota entre Valparaíso y Yokohama), que aunque se ponga como paralelo estándar el de aproximadamente el centro de la zona a representar, al separarse en latitud de éste, la ortodrómica volverá a curvarse y puede perderse la deseada propiedad de representarla más corta que la loxodrómica correspondiente (figura 4.4.42).

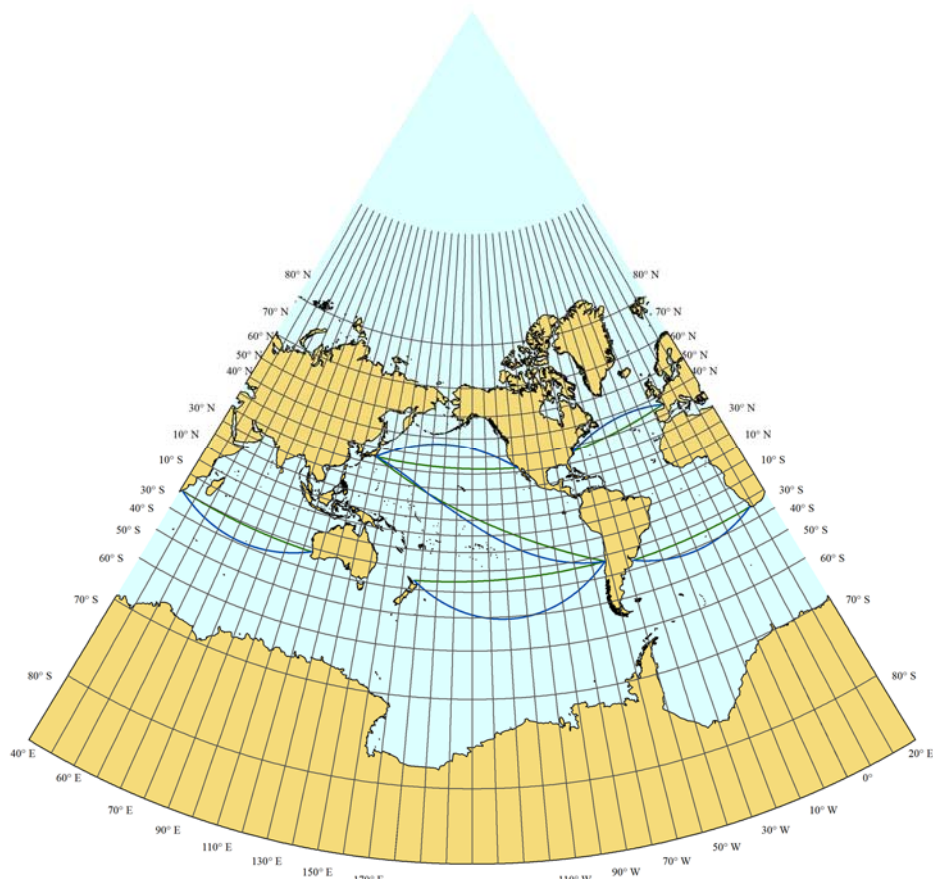


Figura 4.4.42. Derrota loxodrómica (color verde) y ortodrómica (color azul) sobre una proyección cónica conforme de Lambert, con paralelo estándar 10° N.

En la proyección transversa de Mercator ocurre algo parecido a la cónica conforme de Lambert, pero en lugar de respecto a un paralelo, al meridiano central. Así, la ortodrómica tenderá a ser una recta a medida que se aproxime al meridiano central. Además, permite representar zonas de mayor extensión, manteniendo la característica de representar las ortodrómicas como trayectorias más cortas que las loxodrómicas en la carta, tal y como puede verse en la figura 4.4.43.

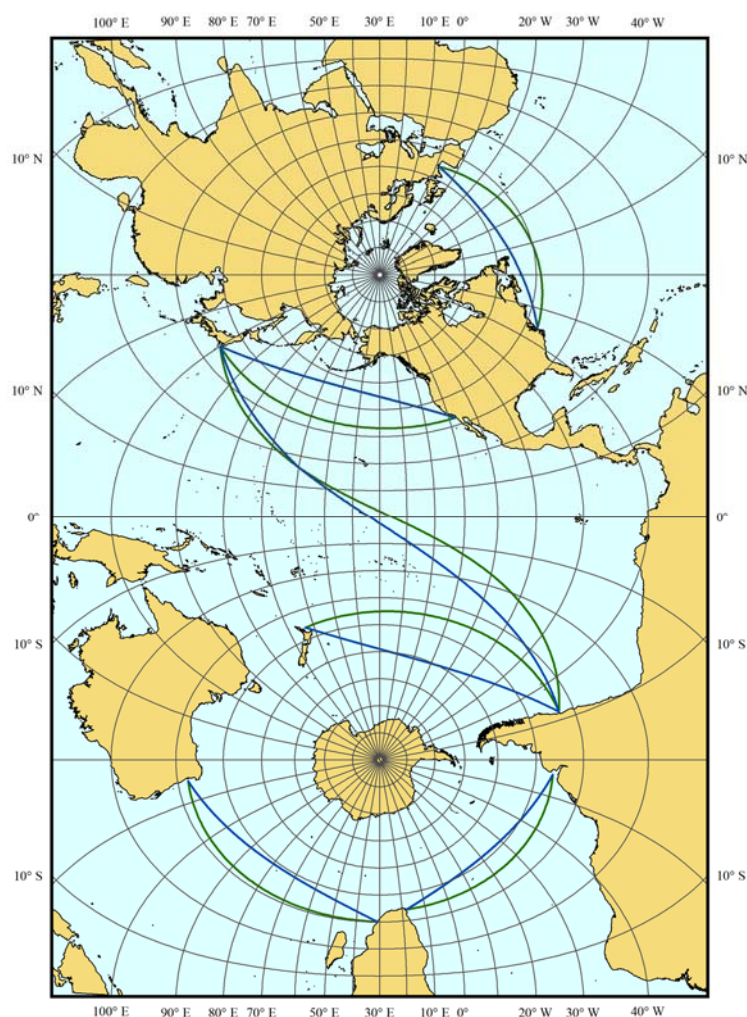


Figura 4.4.43. Derrota loxodrómica (color verde) y ortodrómica (color azul) sobre una proyección transversa de Mercator, con meridiano central 150° W.

En la figura anterior, todas las ortodrómicas representadas son más cortas que las loxodrómicas correspondientes, con el inconveniente de que a partir de una separación de 60° en distancia angular desde el meridiano central, la costa se deforma de una forma exagerada.

En resumen, a la hora de representar derrota no se puede cumplir con todos los requisitos deseados a la hora de representarlas sobre una carta de navegación electrónica. Si se quiere que siempre sea la derrota ortodrómica más corta que la loxodrómica se tendría que recurrir a la proyección gnomónica, con el inconveniente de su deformación exagerada con la distancia al centro de proyección. Si por el contrario, se quiere que exista siempre entre ambas una proporción, se elegiría la proyección de Mercator o Mollweide siempre que se tenga el cuidado de centrarla en medio de la zona donde se quiere planificar o visualizar la derrota, pero siempre teniendo en cuenta que en esta proyección la loxodrómica es más corta. En el resto de proyecciones hay buenas soluciones para visualizar y planificar, pero siempre condicionado a centrar la proyección en el centro aproximado de la zona por donde navegar; en cuanto se mueve el centro de proyección la imagen comparativa de la derrota se distorsiona.

CAPÍTULO V. CONTRASTE DE RESULTADOS TEÓRICOS MEDIANTE UN ESTUDIO DE CAMPO

5. CONTRASTE DE RESULTADOS TEÓRICOS MEDIANTE UN ESTUDIO DE CAMPO

5.1. DESCRIPCIÓN DE LA ENCUESTA

Para el contraste de los resultados teóricos obtenidos en los capítulos anteriores se hace necesario evaluar de forma empírica las proyecciones cartográficas propuestas para la elaboración de cartas de navegación. Se consideró que el método más eficiente para realizar esto sería a través de una encuesta, dirigida a la población de usuarios de cartografía náutica.

Como medio de difusión del cuestionario se decidió recurrir a una página web, de modo que no fuese necesaria la presencia física del encuestado, facilitando su difusión dentro de una población tan desperdigada geográficamente. En el anexo I de la presente Tesis Doctoral se recoge la encuesta actualmente alojada en la web www.cartonav.com, para que sirva de referencia al desarrollo realizado en este capítulo³⁰⁹. La elaboración de esta página web fue financiada por la Universidade da Coruña dentro del programa de ayudas a la investigación 2013, en la categoría de proyectos de investigación para equipos en formación, en la cual la doctoranda participó en calidad de investigadora.

5.1.1 Directrices seguidas en el diseño de la página web

En el momento de plantear la encuesta para referenciar los resultados de la investigación llevada a cabo, se pensó en aprovechar el diseño de la misma para su uso en futuras líneas de investigación, realizando y adaptando el mismo cuestionario a las particularidades de varias poblaciones distintas. A pesar de que los resultados que realmente interesan para la presente Tesis Doctoral son los de una población de marinos mercantes, usuarios finales de la cartografía náutica electrónica, se considera que debe comentarse este hecho aquí para justificar parte del diseño final de la página web. De este modo, se espera ampliar el estudio en el futuro a un público general y a otros grupos de usuarios de cartografía, que pudieran ofrecer puntos de vista diferentes al de los marinos, los cuales, por costumbre, pueden estar condicionados en gran manera por la proyección de Mercator. Se identificaron a priori cuatro poblaciones de estudio: marinos civiles, personas relacionadas laboralmente con el ámbito aeronáutico, marinos de la armada y público general, diseñándose por tanto cuatro cuestionarios diferentes.

La encuesta web se ha estructurado en dos bloques, de los cuales el segundo es común a las cuatro encuestas, tan solo se adaptó en algunos casos la redacción de las preguntas a las particularidades de las poblaciones objeto de estudio. Además, cada cuestionario se incluyó en dos idiomas, castellano e inglés.

Posteriormente se detallará y justificará el contenido del cuestionario de interés para esta investigación, el destinado a marinos mercantes, pero para dar una visión global del diseño de la encuesta, a continuación se describen de forma global los dos bloques en los que se encuentra dividida.

³⁰⁹ Posteriormente se verá que en dicha página web se encuentran alojados cuatro cuestionarios, destinados a cuatro poblaciones diferentes. En el citado anexo solo se recoge la encuesta diseñada para marinos mercantes, por ser la única utilizada en la presente investigación. Cada cuestionario se redactó en castellano e inglés, pero para no sobrecargar de información repetitiva dicho anexo, se optó por incluir únicamente la versión en castellano.

Bloque 1: Compuesto por una página dedicada a la identificación del encuestado, obteniendo para ello datos referentes a su perfil profesional y personal, y a la identificación de submuestras, ya que al elegir algunas poblaciones muy amplias se consideró de interés hacer una segregación posterior para poder comparar resultados en función del perfil profesional del encuestado. Este bloque es diferente para cada uno de los grupos objeto del estudio, ya que las variables de interés a determinar varían enormemente de uno a otro. Este hecho impuso la necesidad de romper la uniformidad de la base de datos a obtener, ya que el número de preguntas y respuestas es diferente en cada una de ellas. El trabajo de interpretación de los datos se verá incrementado con esta decisión, pero se espera que suponga un beneficio considerable, si no para este estudio, si para futuras investigaciones.

Bloque 2: Compuesto por 10 páginas. En las 9 primeras se agrupan una serie de 18 preguntas, que constituyen el grueso de la encuesta, reservando la última página para la recopilación de aquellos comentarios y sugerencias que los encuestados tengan a bien realizar sobre la misma. En este bloque se ha optado por realizar las mismas preguntas, empleando los mismos mapas, de modo que los resultados se almacenan en una base de datos común y podrán ser objeto de análisis comparativo en futuras investigaciones. Sin embargo, en el caso de la encuesta destinada a público general, las preguntas han sido redactadas de forma diferente al resto, teniendo en mente que los encuestados pueden no estar familiarizados con determinados conceptos propios de la navegación. Así, por ejemplo, en este caso se vio necesario explicar brevemente la diferencia entre derrotas loxodrómicas y ortodrómicas, ya que este grupo no tendría por qué conocerla.

El acceso a la página web se realiza mediante una contraseña, lo cual permite segregar los resultados entre las poblaciones objeto de estudio, de modo que en función de la contraseña introducida se accederá a un cuestionario u otro. Esta segregación se graba en la base de datos generada, de modo que cada caso puede asignarse a una muestra concreta. En el caso de estudio, el de marinos mercantes, se crearon 1.000 contraseñas particulares y una contraseña general. Cada contraseña particular sirve para cubrir el cuestionario una única vez, pero puede emplearse para acceder al mismo cuantas veces sea necesario. De este modo, se facilita que un usuario pueda entrar con su contraseña de acceso, cubrir la encuesta parcialmente, y con posterioridad volver sobre ella para finalizarla o modificarla. Por el contrario, la contraseña general puede emplearse para cubrir la encuesta un número indefinido de veces. Esta contraseña se creó para uso interno a la hora de realizar las pruebas necesarias para asegurar el correcto grabado de resultados en la base de datos, ya que de otro modo este proceso habría consumido un número considerable de contraseñas particulares. En este sentido debe decirse que a fecha 13 de octubre de 2014 se ha borrado la base de datos de resultados, para que estuviera en blanco en el momento de comenzar el estudio de campo.

En el caso de que alguien accediera a la portada de la página web y no dispusiera de contraseña, se ha insertado un enlace bajo la denominación de “no tengo contraseña”, en el cual se incluye una contraseña genérica que da acceso a la encuesta de público general, y se proporciona una dirección de correo electrónico: request@cartonav.com, junto con instrucciones para que aquellos que deseen cubrir la encuesta y consideren que se encuentran dentro de una de las poblaciones especificadas para su estudio, tengan un medio de contacto para solicitar que se les facilite una contraseña particular.

Para obtener los resultados de la encuesta se creó una página, a la cual se accede a través de una contraseña de administrador y desde la cual se puede descargar la base de datos almacenada en formato Excel. En esta página también se recogen los datos sobre las últimas diez encuestas cubiertas.

Se crearon dos direcciones de correo electrónico vinculadas a la página web: info@cartonav.com y request@cartonav.com. De la primera de ellas se da publicidad en los créditos

de la web, y la segunda en la página de información para aquellas personas que no disponen de una contraseña.

Respecto al diseño gráfico, se buscó una configuración lo más simple posible. Se eligió un fondo blanco y un color de texto negro para que las imágenes a evaluar resalten lo más posible, sin ningún tipo de animaciones ni gráficos. Para que la web no diera un aspecto demasiado pobre, se añadieron algunos detalles de contraste, como un marco gris y un pie de página negro. También se hicieron algunas concesiones en las preguntas del bloque 1 y en las de valorar criterios del bloque 2, creando cuadros de fondo grises que se activan al pasar el ratón sobre ellos, y que tendrían por finalidad recalcar la pregunta que se está evaluando en cada momento.

Todos los mapas de las preguntas del cuestionario fueron realizados con el software *ArcGIS*. Se dio instrucciones a la empresa que elaboró la web para la composición de los mapas dentro de cada página, aunque no se logró el resultado esperado de forma plena. Así, en los mapamundis de las preguntas 1.1 y 2.1, se indicó que estos deberían guardar una proporción de tamaño determinada, sin embargo, los creadores de la web se declararon incapaces de hacerlo, debiendo limitarse su tamaño verticalmente. Para que fuera más sencillo realizar un estudio comparativo de los diferentes mapas a evaluar, se consideró que en las preguntas de seleccionar un mapa entre varios, estos deberían estar en dos filas. Al hacer esto, los mapas podían resultar muy pequeños para verse bien, por lo que se pidió que debían agrandarse al pasar el cursor sobre ellos. Aquí tampoco se consiguió el resultado esperado, ya que en las preguntas 5.1 y 5.2, donde las imágenes en un primer momento se ampliaban, en la versión final de la web ya no lo hacen, debido nuevamente a problemas en la programación. A pesar de los dos problemas mencionados en el diseño, achacables a errores de programación, el resultado final de la encuesta se considera perfectamente adecuado para los propósitos perseguidos.

Respecto a la encuesta en idioma inglés, debido a que en el futuro se espera contar con la colaboración de asociaciones de pilotos norteamericanas para participar en la encuesta destinada a este sector, se optó por realizar la redacción con tendencia a la gramática americana, ya que aun intentando mantener el idioma lo más neutro posible, hubo palabras tales como “license” en las cuales era necesario decantarse por una tendencia concreta (británica o americana). El idioma en que se cubre la encuesta se almacena junto con los resultados en la base de datos.

5.1.2 Determinación de la población y selección de la muestra

Para la determinación de la población estudio, en la presente Tesis Doctoral se estableció desde el primer momento que la encuesta debía dirigirse a capitanes y oficiales de marina mercante de la sección de navegación, por ser estos a quienes afectaría directamente las propuestas estudiadas. Sin embargo, a la hora de acotar esta población, se consideró de interés ampliar el estudio no sólo a marinos con titulación profesional (capitanes, pilotos de primera y segunda de la marina mercante), sino a tres grupos adicionales, a saber:

- Personas en posesión del título de alumno de náutica, es decir, aquellos que habiendo finalizado los estudios universitarios que los capacitan para la profesión, estén habilitados para realizar las prácticas de embarque obligatorias. De este modo, no sólo se tiene acceso a una muestra mayor, sino que también se obtiene resultados más globales, ya que en este caso concreto, la experiencia profesional y la familiarización con los actuales sistemas de información y visualización de carta náutica (ECDIS) se consideran factores que pueden influenciar de forma determinante en las respuestas de los encuestados.

- Estudiantes de las titulaciones universitarias de náutica, sin titulación profesional ni título de alumno, preferentemente del último curso. Incluyendo a este perfil se pretende evaluar mejor los resultados en función de la experiencia profesional, ya que se recogerán casos que se espera que aporten una valoración desde el punto de vista teórico, careciendo de la experiencia de la práctica. Esta inclusión también se espera que pueda servir para futuros estudios centrados en la evaluación de las capacidades adquiridas por los alumnos de los nuevos títulos de grado
- Otras titulaciones profesionales habilitantes para trabajar como oficiales y patronos en buques civiles. Finalmente, los casos que entraron dentro de esta categoría debieron descartarse, por detectarse situaciones en las cuales se podía estar quebrantando el criterio de exclusión mutua entre categorías, a la hora de clasificar la población. En concreto se detectaron dos supuestos, el de alumnos de náutica con una titulación de formación profesional, y el de marinos mercantes con titulaciones de radioelectrónica.

Posteriormente, se verá que en la encuesta aparece la opción de seleccionar como titulación profesional títulos de la sección de máquinas. Este hecho no constituye la inclusión de este grupo dentro de la población, sino un modo de filtrar estos casos, ya que no se aseguraba que el contacto con egresados de las titulaciones de marina civil pudiera limitarse de forma exclusiva a titulados de náutica. Además, la inclusión de estos casos pudiera dar lugar, en estudios futuros, a una segunda muestra de contraste que pudiera ser interesante, teniendo en cuenta que en estos estudios ambas secciones tienen niveles académicos parejos. Así, se tendrían las valoraciones de dos colectivos con un nivel académico similar, pero donde uno de ellos tendrá un conocimiento de cartografía náutica muy superior al otro.

La selección de la muestra para una población tan dispersa geográficamente ha sido complicada, y el contacto y posterior envío de contraseñas ha sido un proceso más lento de lo que en principio se esperaba. Debe tenerse en cuenta que los profesionales a los cuales se pretendía involucrar pasan largos periodos de tiempo embarcados, durante los cuales no suelen tener acceso a internet, excepto a través de teléfonos móviles y tabletas, dispositivos que no resultan idóneos para cubrir el cuestionario suministrado, debido al reducido tamaño de sus pantallas. Además, una vez desembarcados, durante sus periodos de vacaciones, es de esperar que no se muestren demasiado cooperativos a la hora de ponerse a cubrir una encuesta. En primer lugar, se ha solicitado la colaboración, a través del correo electrónico, de los contactos profesionales de la doctoranda y de los profesores con experiencia en navegación de la E.T.S. de Náutica y Máquinas de la Universidade da Coruña, así como de los egresados del centro con los todavía mantienen contacto. Posteriormente, se ha recurrido a contactar con egresados más antiguos, a través de las redes sociales, en especial *Facebook*. Y por último, se ha solicitado la colaboración de los alumnos del Master y del cuarto curso del Grado en Náutica y Transporte Marítimo de dicho centro. También se ha solicitado la colaboración de otros centros en los que se imparten dichas titulaciones, tanto a nivel estatal como internacional. Aunque en este último caso tan solo se ha recibido una pequeña colaboración por parte de la Hogere Zeevaartschool de Amberes, con quien se mantiene una relación de intercambio erasmus. En todo caso se ha tratado de distribuir la encuesta cubriendo de forma homogénea los rangos de titulación profesional objeto de estudio, y debe mencionarse que la encuesta seguirá abierta para poder aumentar progresivamente la muestra, y así poder emplearla en futuras investigaciones.

5.1.3 Diseño del cuestionario

5.1.3.1 Bloque 1

La identificación de los encuestados y la segregación de resultados de la muestra, se realiza en el bloque 1 de la encuesta (primera página), donde se debe responder a las siguientes preguntas: edad, sexo, titulación profesional, años de experiencia en navegación y años de experiencia en el uso de cartas náuticas electrónicas a bordo.

Edad

Se ha considerado dividir los resultados en cinco grupos de edad: menores de 24 años, entre 24 y 35, entre 36 y 45, entre 46 y 55, y más de 55. El principal motivo es el de estimar el año en el que los encuestados han cursado sus estudios de náutica, ya que en función del plan de estudios los contenidos referidos a navegación, cartografía, y especialmente sistemas de navegación electrónicos, varían sensiblemente. También puede resultar interesante comprobar si existe una relación entre la edad de los encuestados y su predisposición para aceptar nuevos enfoques a viejos problemas.

Sexo

No se espera obtener conclusiones relevantes sobre la percepción del problema en función del sexo de los encuestados, sin embargo, se considera que es una pregunta común en la mayoría de las encuestas sobre evaluación sensorial y perceptiva, por lo que se ha optado por incluirla. Además, también pudiera llegar a proporcionar información útil sobre la integración de las mujeres en una profesión tradicionalmente masculina, y podría llegar a emplearse por otros investigadores con líneas de trabajo enmarcadas en ese ámbito.

Titulación profesional

Pregunta que, como se ha explicado anteriormente, será clave a la hora de segregar grupos y resultados dentro de la muestra. En ella se dividen claramente las titulaciones de náutica: capitán, piloto de primera, piloto de segunda, alumno de puente (sin titulación profesional pero finalizada la diplomatura, licenciatura o grado en náutica), sin titulación pero realizando estudios de náutica y otra titulación: patrón de altura, de litoral, mayor de cabotaje, de cabotaje o patrón portuario; y las de máquinas: jefe de máquinas, oficial de máquinas de primera, oficial de máquinas de segunda, alumno de máquinas (sin titulación profesional pero finalizada la diplomatura, licenciatura o grado en máquinas) y sin titulación pero realizando estudios de máquinas.

Años de experiencia en navegación

La titulación profesional no puede considerarse un medidor fiable de la experiencia. Como ejemplo, en el caso de los capitanes, cada vez es más habitual que los egresados de náutica accedan a la máxima titulación profesional en un periodo de tiempo no superior a los cuatro o cinco años, y que alcanzada dicha meta busquen puestos de trabajo en tierra. En este aspecto se han establecido seis posibilidades: sin experiencia, menos de 1 año, entre 1 y 2, entre 3 y 5, entre 6 y 10, y más de 10. El grado de experiencia será importante a la hora de determinar la familiarización del encuestado con la rutina propia del trabajo a bordo, y su familiarización con los sistemas electrónicos de navegación que se han venido implementando a lo largo de la última década.

Años de experiencia en el uso de cartas náuticas electrónicas a bordo

Los equipos de ECDIS se encuentran en un proceso de implantación obligatoria y progresiva a bordo de los buques mercantes, siguiendo un calendario establecido por la Organización Marítima

Internacional en función del tipo de buque, tonelaje y tipo de viaje al que se destina. De modo que es importante no solo conocer la experiencia a bordo de los encuestados, sino también el grado de experiencia y familiarización en el manejo de las cartas de navegación electrónica, campo en el que se centra el fin último de la presente encuesta.

5.1.3.2 Bloque 2

El segundo bloque está formado por las preguntas diseñadas específicamente para evaluar diferentes mapas, realizados en una serie de proyecciones cartográficas, tanto para fines genéricos de representación geográfica, como para el fin particular de visualizar y planificar una derrota.

Siguiendo la estructura general planteada, este bloque está compuesto por cuatro encuestas, de las cuales solo se analizará aquí la destinada a marinos mercantes, estando todas disponibles en dos idiomas, castellano e inglés. En él se recogen dieciocho preguntas, separadas por contenido y zona a representar en nueve páginas sobre las que se puede navegar hacia delante o atrás, con vistas a poder revisar resultados. Se añade a estas una página final agradeciendo la participación en la encuesta, y se incluye un cuadro de texto donde el encuestado puede realizar los comentarios o sugerencias que estime oportuno. Cubierto el cuestionario la página web remite a una página donde se informa que se ha finalizado y se le da nuevamente las gracias al usuario por participar.

A continuación se realizará una breve exposición sobre la estructura del segundo bloque de preguntas del cuestionario, detallándolo página a página.

- *Página 1:*

Tanto la pregunta de esta página, como las de la página 2, no se diseñaron específicamente para la presente investigación. Sin embargo, se consideró esta iniciativa como una buena oportunidad de obtener datos sobre la percepción de la realidad geográfica más amplios, para su uso futuro.

Tal vez la decisión más difícil a la que un cartógrafo debe enfrentarse a la hora de elaborar un mapa es la de seleccionar la proyección cartográfica a utilizar, especialmente si se desea representar la totalidad de la superficie terrestre, o una parte importante de la misma. Muchas veces esta decisión termina tomándose por cuestiones no técnicas y sin una base científica en la que apoyarse. En la década de 1970, surgieron un gran número de opiniones críticas en torno al uso abusivo de la proyección de Mercator para fines diferentes al náutico, basadas en la gran deformación superficial que presentan los mapamundis realizados en Mercator, lo que provoca que los países más próximos al Ecuador vean reducida su superficie respecto a aquellos situados en latitudes elevadas. Sin embargo, estas opiniones críticas proponían alternativas que en la mayoría de las ocasiones se basaban en aspectos no técnicos, sin una base científica contrastable, generando una situación de tal polémica en el sector, que hoy en día se conoce como la “guerra de mapas”. No es intención de esta investigación involucrarse en esta polémica, pero del estudio de esta situación resulta incuestionable concluir que es muy probable que el abuso de la proyección de Mercator, en la elaboración de atlas y mapas generales utilizados en la enseñanza, haya producido que la sociedad tenga una percepción mental distorsionada de la realidad geográfica de la Tierra. En este sentido, se ve útil introducir en el cuestionario preguntas que permitan aportar una valoración objetiva de hasta qué punto la proyección de Mercator condiciona la imagen mental que la gente tiene de su entorno geográfico.

Retomando la descripción de esta primera página de la encuesta, en ella solo se contempla una pregunta, la 1.1, referida a evaluar la imagen mental del encuestado respecto a la configuración de la superficie terrestre, pidiendo que se seleccione uno de entre 6 mapas, ya que fue esta la cifra máxima

que se estableció a la hora de evaluar representaciones. Se hicieron pruebas para contemplar más de 6 mapas en una misma pregunta, pero el diseño propio de la web hacía que debiera optarse por imágenes de menor tamaño y preguntas demasiado largas.

Las proyecciones elegidas fueron Hammer, Mercator, Ortográfica, Peters, Robinson y Van Der Griten I. El criterio de selección seguido puede resumirse como sigue. Resultaba interesante incluir tres proyecciones aquí: Mercator, por ser la proyección base de la comparativa de esta investigación, Peters, para evaluarla en una población no influida por las “guerras de mapas”, y la ortográfica, por ser desde el punto de vista de la doctoranda, la proyección más intuitiva a la hora de representar la verdadera forma de la Tierra. Para elegir las tres proyecciones restante, se optó por llegar a un compromiso entre las condiciones de conformidad, equivalencia, forma de paralelos y meridianos, forma de los límites del mapa, y directrices para selección de mapamundis genéricas establecidas por autores de reconocido prestigio³¹⁰. Habiendo preseleccionado dos proyecciones con un entramado de paralelos y meridianos ortogonal, se decidió que las tres restantes deberían presentar meridianos y paralelos curvos. También por contar ya con dos mapamundis con límites rectangulares, se consideró que las tres restantes los deberían tener curvos. Así, se optó por la proyección de Hammer, por ser una de las proyecciones equivalentes que menor deformación presenta en la forma de los continentes, y por su particular entramado de meridianos y paralelos curvos (desechando otras posibilidades como: Mollweide y Eckert IV o VI por presentar paralelos rectos). Se vio necesario también incluir proyecciones de compromiso, diseñadas para obtener deformaciones mínimas, tanto en el aspecto angular como superficial, por lo que se optó por las de Robinson y Van Der Griten I, de modo que se emplearan dos opciones de compromiso con una clara diferencia de entramado y límites exteriores, estando ambas opciones disponibles en los árboles de toma de decisiones estándares para mapamundis divulgativos (de hecho ambas fueron adoptadas en diferentes momentos por la *National Geographic Society* para la elaboración de mapamundis de referencia).

- Página 2:

Se establece aquí una de las estructuras que más se emplea en la encuesta, la de valorar un mapa en una escala de 1 a 5, en función de alguna premisa. En primer lugar, en la pregunta 2.1, se pide que se evalúen 6 mapamundis de 1 a 5, en función de su capacidad para representar fielmente la superficie terrestre. Respecto a la pregunta 1.1, se consideró eliminar la proyección ortográfica, por no representar más que un hemisferio. Para sustituirla se optó por introducir una proyección de Goode discontinua, lo que permitiría evaluar la importancia de la forma exterior de un mapa en la percepción de los encuestados. Posteriormente, en la pregunta 2.2, se pide que se evalúen de 1 a 5 una serie de criterios estándar para la elección de una proyección u otra, en función de la importancia que hayan tenido a la hora de responder a la pregunta 2.1. Estos criterios son³¹¹:

- Forma que adoptan los meridianos
- Forma que adoptan los paralelos
- Forma de los accidentes geográficos y masas continentales

³¹⁰ Se considera que los establecidos por Snyder en 1987 son los más universales y reconocidos por la mayoría de autores de textos de cartografía general: Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987.

³¹¹ Para la elección de estos criterios se ha seguido: Canters, Frank: *Small-scale map projection design*, Taylor & Francis, London 2002. P. 261-271.

- Superficie de los accidentes geográficos y masas continentales (dentro del mismo mapa, no comparativamente entre ellos)
- Similitud con la imagen mental que tienes de la configuración geográfica de la superficie terrestre
- Geometría de los límites del mapa (forma de sus bordes)

Estos criterios (excepto el último, ya que no tendría sentido para evaluar un mapa de una zona concreta), se volverán a emplear a la hora de evaluar mapas particulares en preguntas posteriores.

En las preguntas de esta página, así como en las posteriores, donde se solicita valorar una determinada cualidad o criterio, se deseaba recurrir a respuestas de valoración cuantitativa, ya que la información proporcionada permitiría un análisis mayor que de recurrirse a una escala de Likert. Los resultados de este tipo de escala se consideran generalmente como variables cualitativas de tipo ordinal, ya que no puede asumirse que los sujetos perciban las respuestas a seleccionar como equidistantes³¹². Normalmente, en este tipo de ítems, el encuestado debe marcar su grado de aceptación o rechazo hacia una proposición mediante la selección de una respuesta del tipo: totalmente de acuerdo, de acuerdo, indiferente, en desacuerdo, totalmente en desacuerdo. No existe un consenso claro, pero una forma de asumir la equidistancia entre respuestas suele ser la de acompañar cada ítem con una escala visual horizontal, en la cual cada una de las posibles respuestas esté situada de forma equidistante. Esta era la intención inicial en el diseño de esta encuesta, que se pudiera valorar las proposiciones mediante un cursor de desplazamiento horizontal, de modo que los resultados pudieran tratarse como variables cuantitativas sin género de duda. Sin embargo, por problemas de programación, debió optarse por una situación donde cada sujeto seleccionara directamente un número entero en una escala del 1 al 5. Para establecer los niveles de la escala de medición se optó por ítems de 5 puntos, por ser los más utilizados, y los que se espera que supongan un menor esfuerzo para el encuestado, aspecto muy importante en una encuesta tan larga como esta. La fiabilidad de la medición habría mejorado de haber empleado una escala con un mayor número de ítems, pero posiblemente esto hubiera aumentado el número de casos perdidos, por suponer un esfuerzo adicional por parte de los sujetos. Así, en un estudio exploratorio de este tipo, se vio más útil obtener una mayor cantidad de información, aun a costa de perjudicar su precisión, dejando para investigaciones futuras la elaboración de nuevas encuestas más breves, enfocadas a aspectos más concretos, y con instrumentos de medición más sensibles.

Respecto al tratamiento de los datos obtenidos en este tipo de preguntas, debido a que la muestra está compuesta por sujetos con nivel de estudios universitarios, se considera que estos apreciarán directamente la escala propuesta como continua, con valores intermedios equidistantes. Para fomentar esta idea, en las preguntas se han dado los valores extremos de las posibles respuestas, de modo que el 1 se corresponda con “nada” y el 5 con “todo”, o con un mínimo y un máximo absolutos. Por tanto, resulta evidente que los sujetos responden sobre una escala discreta con valores enteros, y la variable generada será en su naturaleza continua, limitada por la precisión del aparato medidor.

³¹² Sánchez, F. y otros: *Psicología social*, McGraw-Hill, Madrid, 1998.

- Página 3:

En esta página comienzan las preguntas directamente involucradas en la investigación actual. En ellas se evalúan las proyecciones propuestas en la investigación previa realizada, incluyendo necesariamente la de Mercator. También se consideró interesante incluir la proyección gnomónica al estudio, ya que aunque a priori no es una de las propuestas, será la única en la cual una ortodrómica se represente por una línea recta. Así, finalmente se evaluarán las siguientes proyecciones:

- Mercator.
- Estereográfica.
- Cónica conforme de Lambert.
- Transversa de Mercator.
- Acimutal equidistante.
- Ortográfica.
- Mollweide.
- Gnomónica.

Al resultar ocho proyecciones a evaluar, y haber establecido el máximo por pregunta en seis, estas se contemplarán en dos preguntas similares para zonas diferentes.

En la pregunta 3.1 se evalúa la capacidad de seis mapas para representar lo más fielmente posible el Atlántico Norte. De las seis proyecciones anteriormente mencionadas, se dejaron para una evaluación posterior la acimutal equidistante y la de Mollweide. En el caso de la acimutal equidistante, el motivo fue que el mapa obtenido de la zona resulta visualmente muy parecido al construido en proyección estereográfica. Respecto a la de Mollweide, se descartó por ser a la que menos utilidad se le presupone a priori.

En este caso, las proyecciones acimutales empleadas se centraron en $\phi_0 = 30^\circ\text{N}$, $\lambda_0 = 035^\circ\text{W}$, por ser aproximadamente las coordenadas centrales de la zona a representar. Igualmente, para la transversa de Mercator se tomó como meridiano central el de $\lambda = 035^\circ\text{W}$, y para la cónica conforme de Lambert se empleó un paralelo estándar de $\phi = 30^\circ\text{N}$. Para determinar la escala se decidió que debían tener representación en la carta: el canal de Panamá, la costa noruega hasta al menos una latitud de 60°N , la costa africana hasta los 02°S y la brasileña hasta los 10°S .

Posteriormente, en la pregunta 3.2, se evalúan los mismos criterios que en la 2.2, excepto el referido a los límites del mapa.

- Página 4:

En esta ocasión no se pide evaluar los mapas en función de su capacidad para representar la superficie terrestre, sino para representar las derrotas entre dos puntos. Así, en la pregunta 4.1, se evalúa la utilidad de los mismos mapas que en 3.1, para representar lo más fielmente posible la diferencia real entre las derrotas ortodrómica y loxodrómica que unen Norfolk y Burdeos, incluyendo estas trayectorias en los mapas en dos colores diferentes para su identificación.

Para este caso, y ya que se trata de centrar la atención en las derrotas a representar, se desplazó hacia el norte el centro de las proyecciones acimutales, de modo que se aproximara más al punto de latitud media entre los puertos mencionados: $\phi_0 = 40^\circ\text{N}$, $\lambda_0 = 035^\circ\text{W}$. Tomando estos mismos valores de latitud y longitud para definir el paralelo y meridiano estándar de las proyecciones cónica conforme de Lambert y transversa de Mercator, respectivamente. Respecto al área a abarcar por las cartas, se trató de cubrir los mismos puntos geográficos que en los mapas de la página anterior, pero permitiendo

más flexibilidad en la costa africana (buscando representar al menos la isla que se sitúa a aproximadamente 05°N), para poder aumentar la escala ligeramente y dar mayor visibilidad a las derrotas.

En la pregunta 4.2, por tratarse de evaluar la diferencia entre dos derrotas y no la capacidad del mapa para representar la zona abarcada, tan solo se pide evaluar dos criterios:

- Forma de las derrotas en la carta.
- Longitud de las derrotas en la carta.

- Página 5:

En esta página se pide evaluar la utilidad de cada uno de los mapas anteriores para planificar de forma independiente una sola de las derrotas vistas en 4.1: en la pregunta 5.1 la loxodrómica y en la 5.2 la ortodrómica. Para evitar repetir preguntas y no sobrecargar a los encuestados, estas dos preguntas se configuraron para elegir uno de los mapas frente al resto.

Para este caso, y ya que se trataba de centrar la atención en las derrotas a representar, las proyecciones acimutales se centraron aproximadamente en el punto de latitud y longitud media entre los puertos de Norfolk y Burdeos: $\varphi_0 = 41,25^\circ\text{N}$, $\lambda_0 = 040^\circ\text{W}$. Tomando estos mismos valores de latitud y longitud para definir el paralelo y meridiano estándar de las proyecciones cónica conforme de Lambert y transversa de Mercator, respectivamente. Respecto al área a abarcar por las cartas, se pensó en no relacionarla con puntos geográficos como en el caso anterior, sino en mantener una separación entre los puertos extremos de las derrotas y los márgenes de la carta constante en todas ellas. Así, se intentó situar dichos puertos a la misma distancia de los bordes de las cartas, tomando como patrón la proyección estereográfica, por ser en ella donde ambas derrotas tienen longitudes parecidas, y tomando como punto central de la carta (que no centro de proyección) el de $\varphi = 40^\circ\text{N}$, $\lambda_0 = 040^\circ\text{W}$

- Páginas 6, 7 y 8:

En las páginas 6, 7 y 8, se repiten las mismas preguntas que las realizadas en las 3, 4 y 5, pero para mapas del océano Pacífico y para derrotas entre los puertos de Valparaíso y Okinawa. De este modo se evalúa una zona más amplia que la anterior y con un rasgo distintivo, en esta ocasión se representan zonas al norte y al sur del Ecuador, y se incluirá la proyección acimutal equidistante y la de Mollweide, que no se habían empleado en el caso anterior (Atlántico Norte). Para incluir estas proyecciones debían descartarse dos de las elegidas para las representaciones del Atlántico Norte, habiéndose elegido para ello la proyección gnomónica, ya que para una zona tan amplia la deformación es inasumible, y la cónica conforme de Lambert, ya que para una zona con igual extensión al norte y al sur del Ecuador debería tomarse éste como paralelo estándar, y la proyección resultante sería la de Mercator.

En este caso el aspecto de las proyecciones acimutales será transversa, con centro en un punto del Ecuador de longitud 150°W. Longitud que también determinará el meridiano estándar de la proyección transversa de Mercator. Respecto a la zona a representar, se ha optado por mantenerla en todas las preguntas de estas tres páginas, se represente o no derrotas en la carta, y se ha establecido, al igual que en las de la página 5 para el Atlántico Norte, buscar centrar la derrota manteniendo los puertos extremos a distancias similares de los márgenes en todas las cartas.

- **Página 9:**

Por último, en esta página se evalúa la utilidad de diferentes proyecciones para elaborar mapas de zonas próximas a los polos. Así, en la pregunta 9.1 la zona a evaluar es la comprendida entre Tierra de Fuego y el cabo de Buena Esperanza, y en la 9.2 la zona de las islas Aleutianas y el estrecho de Bering. Posteriormente, en la 9.3 se evalúan los mismos criterios de selección que los empleados en 3.2 y 6.2.

En este caso, en las preguntas 9.1 y 9.2 tan solo se evalúan 4 proyecciones:

- Gnomónica.
- Estereográfica.
- Ortográfica.
- Transversa de Mercator.

Se han descartado por tanto cuatro de las proyecciones que originariamente se había decidido evaluar, bien porque no permiten representar zonas polares, bien porque el resultado es visualmente similar a alguno de los anteriores. En el primer caso se encontrarían las proyecciones de Mercator, ya que en ella el polo no tiene representación, y la de Mollweide, ya que si variamos su aspecto, su entramado característico sería totalmente diferente al de su aspecto directo, perdiendo la utilidad de representar los paralelos como líneas rectas horizontales

Respecto a la cónica conforme de Lambert y a la acimutal equidistante, no se incluyen por que tras realizar los correspondientes mapas con ellas, el resultado visual no se separa de forma apreciable, dado el tamaño de las imágenes empleadas, del obtenido con la estereográfica.

Debe hacerse mención de que, a pesar de evaluar las mismas proyecciones, las acimutales evaluadas en la pregunta 9.1 se han construido en aspecto oblicuo, centradas todas ellas en: $\varphi_0 = 55^\circ\text{S}$, $\lambda_0 = 025^\circ\text{W}$, longitud esta última que también sirve de meridiano estándar para la transversa de Mercator. Por el contrario, las proyecciones acimutales empleadas en la pregunta 9.2 son polares, con centro el Polo Norte, donde se mantiene como meridiano central de la carta (y estándar para la transversa de Mercator) el de longitud 175°W .

Para establecer la extensión geográfica de las cartas, y con ello su escala, se establecieron puntos geográficos de obligada representación. Para las cartas de la pregunta 9.1 se buscó incluir la zona archipelágica de Chile y el paso de Magallanes al oeste, Cape Agulhas en Sudáfrica al este, y cubrir una latitud entre los 30°S y 80°S sobre el meridiano central. Para las de la pregunta 9.2, el criterio para obtener la extensión de las cartas ha sido el de incluir al norte la isla de Zemlya Bunge, al Oeste la Bahía de Tokio y al Este el puerto de Seattle.

5.2. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA

A fecha 24 de agosto de 2015, se ha realizado la obtención de la muestra con la que se trabajará. En ella se han obtenido un total de 264 casos, con 53 sujetos que no finalizaron la encuesta, de los cuales 9 no llegaron a contestar nada, por lo que se descartaron de forma inmediata. De los 255 casos restantes, 26 de ellos pertenecían a titulaciones de máquinas, los cuales como ya se explicó en su momento, también se descartaron. Finalmente, de los 229 casos de estudio para titulaciones de náutica, también se decidió por descartar aquellos que contestaron a la pregunta de titulación como “otros”, ya que a pesar de que en la encuesta se vinculaban a titulaciones no universitarias de puente, existían indicios de que entre ellos figuraban al menos dos titulados en otras ramas diferentes que pudieran

perjudicar la homogeneidad de la muestra y el criterio de exclusión mutua entre categorías, tales como titulados radioelectrónicos o estudiantes de náutica con titulaciones de formación profesional.

La muestra final se compone de 224 casos, de los cuales 35 no llegaron a finalizar la encuesta, pero que se consideran de todos modos, constando como datos perdidos en aquellas preguntas que no llegaron a contestar. En este caso, se considera que los datos perdidos no influyen en el resultado, ya que no puede considerarse que los encuestados hayan desistido por no desear que su opinión fuese conocida³¹³, sino que simplemente han abandonado la misma en algún punto. El criterio de inclusión ha sido la posesión, o la capacitación para la obtención, de una titulación profesional de marina mercante en la sección de puente.

La definición de las variables del estudio ya se ha establecido en la descripción de la encuesta. Como puede comprobarse, la descripción de las variables mediante el enunciado de la pregunta a la que corresponden resultaría en nombres demasiado largos, por lo que se ha procedido a codificarlos para la realización del posterior estudio estadístico según se muestra a continuación:

	Nombre completo de la variable	Nombre codificado
Datos personales	Idioma	Idioma
	Edad	Edad
	Sexo	Sexo
	Titulación Profesional	Titulación
	Años de experiencia en navegación	Exp.Nav.
	Años de experiencia en el uso de cartas electrónicas a bordo	Exp.ECDIS
Mapamundis	1.1 Cuál de las siguientes representaciones cartográficas se asemeja más a la imagen mental que tienes de la configuración de la superficie terrestre (seleccionar 1)	1.1
	2.1 Valorar mapamundi Goode Homolosine Interrupted para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)	2.1.1
	2.1 Valorar mapamundi Hammer para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)	2.1.2
	2.1 Valorar mapamundi Mercator para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)	2.1.3
	2.1 Valorar mapamundi Peters para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)	2.1.4
	2.1 Valorar mapamundi Robinson para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)	2.1.5
	2.1 Valorar mapamundi Van Der Grinten I para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)	2.1.6
	2.2 Valorar el criterio de forma de los meridianos a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)	2.2.1
	2.2 Valorar el criterio de forma de los paralelos a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)	2.2.2
	2.2 Valorar el criterio de forma de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)	2.2.3
	2.2 Valorar el criterio de superficie de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)	2.2.4

³¹³ Rachad, Antonius: *Interpreting Quantitative Data with SPSS*, SAGE Publications, London, 2003. Pp. 36 y 37.

	2.2 Valorar el criterio de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)	2.2.5
	2.2 Valorar el criterio de geometría de los límites del mapa a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)	2.2.6
Atlántico Norte	3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección de Mercator para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)	3.1.1
	3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección ortográfica para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)	3.1.2
	3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección cónica conforme de Lambert para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)	3.1.3
	3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección estereográfica para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)	3.1.4
	3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección gnomónica para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)	3.1.5
	3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección transversa de Mercator para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)	3.1.6
	3.2 Valorar el criterio de forma de los meridianos a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)	3.2.1
	3.2 Valorar el criterio de forma de los paralelos a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)	3.2.2
	3.2 Valorar el criterio de forma de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)	3.2.3
	3.2 Valorar el criterio de superficie de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)	3.2.4
	3.2 Valorar el criterio de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)	3.2.5
	4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección de Mercator para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)	4.1.1
	4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección ortográfica para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)	4.1.2
	4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección cónica conforme de Lambert para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)	4.1.3
	4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección estereográfica para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)	4.1.4
	4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección gnomónica para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)	4.1.5
	4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección transversa de Mercator para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)	4.1.6

	4.2 Valorar el criterio de forma de las derrotas en la carta a la hora de contestar la pregunta 4.1 (valorar de 1 a 5)	4.2.1
	4.2 Valorar el criterio de longitud de las derrotas en la carta a la hora de contestar la pregunta 4.1 (valorar de 1 a 5)	4.2.2
	5.1 Qué carta del Atlántico Norte es la más útil para planificar una ortodrómica (seleccionar 1)	5.1
	5.2 Qué carta del Atlántico Norte es la más útil para planificar una loxodrómica (seleccionar 1)	5.2
Océano Pacífico	6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección de Mercator para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del océano Pacífico (valorar de 1 a 5)	6.1.1
	6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección de Mollweide para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del océano Pacífico (valorar de 1 a 5)	6.1.2
	6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección acimutal equidistante para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del océano Pacífico (valorar de 1 a 5)	6.1.3
	6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección estereográfica para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del océano Pacífico (valorar de 1 a 5)	6.1.4
	6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección ortográfica para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del océano Pacífico (valorar de 1 a 5)	6.1.5
	6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección transversa de Mercator para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del océano Pacífico (valorar de 1 a 5)	6.1.6
	6.2 Valorar el criterio de forma de los meridianos a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)	6.2.1
	6.2 Valorar el criterio de forma de los paralelos a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)	6.2.2
	6.2 Valorar el criterio de forma de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)	6.2.3
	6.2 Valorar el criterio de superficie de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)	6.2.4
	6.2 Valorar el criterio de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)	6.2.5
	7.1 Valorar la utilidad de una carta del océano Pacífico en proyección de Mercator para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)	7.1.1
	7.1 Valorar la utilidad de una carta del océano Pacífico en proyección de Mollweide para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)	7.1.2
	7.1 Valorar la utilidad de una carta del océano Pacífico en proyección acimutal equidistante para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)	7.1.3
	7.1 Valorar la utilidad de una carta del océano Pacífico en proyección estereográfica para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)	7.1.4
	7.1 Valorar la utilidad de una carta del océano Pacífico en proyección ortográfica para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)	7.1.5

	7.1 Valorar la utilidad de una carta del océano Pacífico en proyección transversa de Mercator para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)	7.1.6
	7.2 Valorar el criterio de forma de las derrotas en la carta a la hora de contestar la pregunta 7.1 (valorar de 1 a 5)	7.2.1
	7.2 Valorar el criterio de longitud de las derrotas en la carta a la hora de contestar la pregunta 7.1 (valorar de 1 a 5)	7.2.2
	8.1 Qué carta del océano Pacífico es la más útil para planificar una ortodrómica (seleccionar 1)	8.1
	8.2 Qué carta del océano Pacífico es la más útil para planificar una loxodrómica (seleccionar 1)	8.2
Altas latitudes	9.1 Qué carta es la más útil para representar la realidad geográfica de la zona entre Tierra de Fuego y el cabo de Buena Esperanza (seleccionar 1)	9.1
	9.2 Qué carta es la más útil para representar la realidad geográfica de la zona de las islas Aleutianas y el estrecho de Bering (seleccionar 1)	9.2
	9.3 Valorar el criterio de forma de los meridianos a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)	9.3.1
	9.3 Valorar el criterio de forma de los paralelos a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)	9.3.2
	9.3 Valorar el criterio de forma de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)	9.3.3
	9.3 Valorar el criterio de superficie de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)	9.3.4
	9.3 Valorar el criterio de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)	9.3.5

Sobre el tratamiento posterior de dichas variables, se considera necesario realizar una serie de aclaraciones a la hora de su tratamiento informático. Resulta inmediato que las variables del grupo de datos personales serán cualitativas, tratándose en el programa “IBM SPSS Statistics” como nominal la de sexo, y como ordinales el resto. El resto de la encuesta se puede dividir entre preguntas de selección (variables 1.1, 5.1, 5.2, 8.1, 8.2, 9.1 y 9.2), cualitativas ordinales, y preguntas en las cuales se debe valorar una determinada cualidad de 1 a 5 (resto de variables). La clasificación de los resultados de este tipo de preguntas ya se justificó en el epígrafe dedicado a la descripción de la encuesta, pero debe recordarse que no se tratarán como escalas de tipo Likert, sino como escalas continuas de valores extremos absolutos (todo o nada) y una graduación que inequívocamente los sujetos de estudio, dado su nivel universitario, percibirán como equidistante, asumiéndose por tanto que se tratan de variables cuantitativas discretas, y serán tratadas en el *software* referido como escala.

5.3. RESULTADOS

5.3.1. Descriptivos

5.3.1.1 Índices de tendencia central, dispersión y distribución

	N		Media	Mediana	Moda	Desviación estándar	Asimetría	Curtosis	Mínimo	Máximo
	Válido	Perdidos								
Idioma	224	0		1,00	1				1	2
Edad	224	0		3,00	2				1	5
Sexo	224	0		1,00	1				1	2
Titulación	224	0		2,00	1				1	5
Exp.Nav.	224	0		5,00	6				1	6
Exp.ECDIS	224	0		3,00	1				1	6
1.1	224	0		3,00	3				1	6
2.1.1	212	12	3,05	3,00	4	1,329	-,182	-1,182	1	5
2.1.2	212	12	3,47	4,00	4	,985	-,491	,047	1	5
2.1.3	212	12	2,69	3,00	2	1,179	,171	-,930	1	5
2.1.4	212	12	2,13	2,00	2	1,128	,898	,014	1	5
2.1.5	212	12	3,63	4,00	4	1,019	-,620	,025	1	5
2.1.6	212	12	2,75	3,00	3	1,211	,110	-,924	1	5
2.2.1	212	12	3,32	3,00	3	1,246	-,382	-,745	1	5
2.2.2	212	12	3,19	3,00	3	1,253	-,269	-,853	1	5
2.2.3	212	12	3,60	4,00	4	1,077	-,500	-,410	1	5
2.2.4	212	12	3,56	4,00	4	1,098	-,503	-,328	1	5
2.2.5	212	12	3,79	4,00	4	1,086	-,833	,097	1	5
2.2.6	212	12	2,83	3,00	3	1,265	,012	-1,079	1	5
3.1.1	211	13	3,36	4,00	4	1,392	-,408	-1,138	1	5
3.1.2	211	13	3,44	4,00	4	1,171	-,556	-,540	1	5
3.1.3	211	13	3,09	3,00	3	,956	,040	-,509	1	5
3.1.4	211	13	3,09	3,00	3	1,029	-,093	-,452	1	5
3.1.5	211	13	2,35	2,00	2	1,051	,549	-,277	1	5
3.1.6	211	13	2,66	3,00	2	1,111	,318	-,616	1	5
3.2.1	211	13	3,96	4,00	4	,980	-,843	,310	1	5
3.2.2	211	13	3,92	4,00	4	,955	-,698	,068	1	5
3.2.3	211	13	3,09	3,00	3	1,094	-,114	-,580	1	5
3.2.4	211	13	3,07	3,00	3	1,130	-,141	-,560	1	5
3.2.5	211	13	3,50	4,00	4	1,119	-,540	-,312	1	5
4.1.1	206	18	3,41	4,00	5	1,520	-,446	-1,304	1	5
4.1.2	206	18	3,18	3,00	4	1,362	-,224	-1,154	1	5
4.1.3	206	18	2,79	3,00	3	1,123	-,008	-,801	1	5
4.1.4	206	18	2,82	3,00	3	1,127	-,033	-,860	1	5
4.1.5	206	18	2,81	3,00	2	1,260	,200	-,989	1	5
4.1.6	206	18	2,99	3,00	3	1,243	,012	-,992	1	5
4.2.1	206	18	4,19	4,00	5	1,006	-1,635	2,745	1	5
4.2.2	206	18	3,39	4,00	5	1,334	-,330	-1,091	1	5
5.1	204	20		2,00	1				1	6
5.2	204	20		2,00	2				1	6
6.1.1	201	23	3,24	3,00	4	1,346	-,171	-1,214	1	5
6.1.2	201	23	3,15	3,00	3 ^a	1,076	-,107	-,721	1	5
6.1.3	201	23	2,95	3,00	3	,979	-,191	-,471	1	5
6.1.4	201	23	2,89	3,00	3	1,081	,004	-,630	1	5
6.1.5	201	23	2,36	2,00	2	1,154	,575	-,456	1	5
6.1.6	201	23	2,17	2,00	1	1,267	,890	-,270	1	5
6.2.1	201	23	3,85	4,00	4	1,001	-,623	-,002	1	5
6.2.2	201	23	3,70	4,00	4	1,054	-,543	-,215	1	5
6.2.3	201	23	3,29	3,00	4	1,116	-,329	-,642	1	5
6.2.4	201	23	3,20	3,00	3	1,110	-,146	-,574	1	5

	N		Media	Mediana	Moda	Desviación estándar	Asimetría	Curtosis	Mínimo	Máximo
	Válido	Perdidos								
6.2.5	201	23	3,60	4,00	4	1,217	-,543	-,684	1	5
7.1.1	194	30	3,46	4,00	5	1,400	-,470	-1,108	1	5
7.1.2	194	30	3,04	3,00	3	1,223	-,087	-,891	1	5
7.1.3	194	30	2,95	3,00	3	1,199	-,028	-,824	1	5
7.1.4	194	30	2,97	3,00	3	1,193	-,098	-,879	1	5
7.1.5	194	30	2,47	2,00	1	1,276	,458	-,874	1	5
7.1.6	194	30	2,04	2,00	1	1,103	,958	,182	1	5
7.2.1	194	30	4,14	4,00	5	,971	-1,152	1,014	1	5
7.2.2	194	30	3,54	4,00	4	1,268	-,536	-,716	1	5
8.1	191	33		3,00	1				1	6
8.2	191	33		1,00	1				1	6
9.1	189	35		2,00	1				1	4
9.2	189	35		2,00	2				1	4
9.3.1	189	35	3,77	4,00	4	1,096	-,629	-,372	1	5
9.3.2	189	35	3,66	4,00	4	1,092	-,457	-,552	1	5
9.3.3	189	35	3,28	3,00	3	,995	-,261	-,239	1	5
9.3.4	189	35	3,16	3,00	3	1,047	-,052	-,554	1	5
9.3.5	189	35	3,59	4,00	4	1,180	-,539	-,533	1	5

5.3.1.2 Tablas de frecuencias

5.3.1.2.1 Datos personales

Idioma

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido Castellano	213	95,1	95,1	95,1
Inglés	11	4,9	4,9	100,0
Total	224	100,0	100,0	

Edad

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido menos de 24 años	11	4,9	4,9	4,9
entre 24 y 35 años	72	32,1	32,1	37,1
entre 36 y 45 años	72	32,1	32,1	69,2
entre 46 y 55 años	26	11,6	11,6	80,8
más de 55 años	43	19,2	19,2	100,0
Total	224	100,0	100,0	

Sexo

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido Hombre	170	75,9	75,9	75,9
Mujer	54	24,1	24,1	100,0
Total	224	100,0	100,0	

Titulación Profesional

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido Capitán	90	40,2	40,2	40,2
Piloto de 1ª	39	17,4	17,4	57,6
Piloto de 2ª	50	22,3	22,3	79,9
Alumno de puente	33	14,7	14,7	94,6
Estudiante de náutica	12	5,4	5,4	100,0
Total	224	100,0	100,0	

Años de experiencia en navegación

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido Sin experiencia	17	7,6	7,6	7,6
Menos de 1 año	28	12,5	12,5	20,1
Entre 1 y 2 años	34	15,2	15,2	35,3
Entre 3 y 5 años	32	14,3	14,3	49,6
Entre 6 y 10 años	35	15,6	15,6	65,2
Más de 10 años	78	34,8	34,8	100,0
Total	224	100,0	100,0	

Años de experiencia en el uso de cartas electrónicas a bordo

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido Sin experiencia	65	29,0	29,0	29,0
Menos de 1 año	39	17,4	17,4	46,4
Entre 1 y 2 años	38	17,0	17,0	63,4
Entre 3 y 5 años	43	19,2	19,2	82,6
Entre 6 y 10 años	19	8,5	8,5	91,1
Más de 10 años	20	8,9	8,9	100,0
Total	224	100,0	100,0	

5.3.1.2.2 Mapamundis

1.1Cuál de las siguientes representaciones cartográficas se asemeja más a la imagen mental que tienes de la configuración de la superficie terrestre (seleccionar 1)

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido Hammer	37	16,5	16,5	16,5
Mercator	32	14,3	14,3	30,8
Ortográfica 30°N	92	41,1	41,1	71,9
Peters	4	1,8	1,8	73,7
Robinson	56	25,0	25,0	98,7
Van Der Grinten I	3	1,3	1,3	100,0
Total	224	100,0	100,0	

2.1 Valorar mapamundi Goode Homolosine Interrupted para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	37	16,5	17,5	17,5
	2	40	17,9	18,9	36,3
	3	40	17,9	18,9	55,2
	4	65	29,0	30,7	85,8
	5	30	13,4	14,2	100,0
	Total	212	94,6	100,0	
Perdidos	Sistema	12	5,4		
Total		224	100,0		

2.1 Valorar mapamundi Hammer para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	9	4,0	4,2	4,2
	2	21	9,4	9,9	14,2
	3	71	31,7	33,5	47,6
	4	83	37,1	39,2	86,8
	5	28	12,5	13,2	100,0
	Total	212	94,6	100,0	
Perdidos	Sistema	12	5,4		
Total		224	100,0		

2.1 Valorar mapamundi Mercator para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	39	17,4	18,4	18,4
	2	60	26,8	28,3	46,7
	3	54	24,1	25,5	72,2
	4	46	20,5	21,7	93,9
	5	13	5,8	6,1	100,0
	Total	212	94,6	100,0	
Perdidos	Sistema	12	5,4		
Total		224	100,0		

2.1 Valorar mapamundi Peters para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	73	32,6	34,4	34,4
	2	78	34,8	36,8	71,2
	3	30	13,4	14,2	85,4
	4	22	9,8	10,4	95,8
	5	9	4,0	4,2	100,0
	Total	212	94,6	100,0	
Perdidos	Sistema	12	5,4		
Total		224	100,0		

2.1 Valorar mapamundi Robinson para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	8	3,6	3,8	3,8
	2	20	8,9	9,4	13,2
	3	55	24,6	25,9	39,2
	4	88	39,3	41,5	80,7
	5	41	18,3	19,3	100,0
	Total	212	94,6	100,0	
Perdidos	Sistema	12	5,4		
Total		224	100,0		

2.1 Valorar mapamundi Van Der Grinten I para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	40	17,9	18,9	18,9
	2	50	22,3	23,6	42,5
	3	61	27,2	28,8	71,2
	4	44	19,6	20,8	92,0
	5	17	7,6	8,0	100,0
	Total	212	94,6	100,0	
Perdidos	Sistema	12	5,4		
Total		224	100,0		

2.2 Valorar el criterio de forma de los meridianos a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	25	11,2	11,8	11,8
	2	25	11,2	11,8	23,6
	3	61	27,2	28,8	52,4
	4	60	26,8	28,3	80,7
	5	41	18,3	19,3	100,0
	Total	212	94,6	100,0	
Perdidos	Sistema	12	5,4		
Total		224	100,0		

2.2 Valorar el criterio de forma de los paralelos a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	28	12,5	13,2	13,2
	2	30	13,4	14,2	27,4
	3	62	27,7	29,2	56,6
	4	57	25,4	26,9	83,5
	5	35	15,6	16,5	100,0
	Total	212	94,6	100,0	
Perdidos	Sistema	12	5,4		
Total		224	100,0		

2.2 Valorar el criterio de forma de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	8	3,6	3,8	3,8
	2	27	12,1	12,7	16,5
	3	53	23,7	25,0	41,5
	4	78	34,8	36,8	78,3
	5	46	20,5	21,7	100,0
	Total	212	94,6	100,0	
Perdidos	Sistema	12	5,4		
Total		224	100,0		

2.2 Valorar el criterio de superficie de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	11	4,9	5,2	5,2
	2	23	10,3	10,8	16,0
	3	60	26,8	28,3	44,3
	4	73	32,6	34,4	78,8
	5	45	20,1	21,2	100,0
	Total	212	94,6	100,0	
Perdidos	Sistema	12	5,4		
Total		224	100,0		

2.2 Valorar el criterio de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	9	4,0	4,2	4,2
	2	20	8,9	9,4	13,7
	3	37	16,5	17,5	31,1
	4	86	38,4	40,6	71,7
	5	60	26,8	28,3	100,0
	Total	212	94,6	100,0	
Perdidos	Sistema	12	5,4		
Total		224	100,0		

2.2 Valorar el criterio de geometría de los límites del mapa a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	42	18,8	19,8	19,8
	2	44	19,6	20,8	40,6
	3	54	24,1	25,5	66,0
	4	52	23,2	24,5	90,6
	5	20	8,9	9,4	100,0
	Total	212	94,6	100,0	
Perdidos	Sistema	12	5,4		
Total		224	100,0		

5.3.1.2.3 Atlántico Norte

3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección de Mercator para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	30	13,4	14,2	14,2
	2	34	15,2	16,1	30,3
	3	31	13,8	14,7	45,0
	4	61	27,2	28,9	73,9
	5	55	24,6	26,1	100,0
	Total	211	94,2	100,0	
Perdidos	Sistema	13	5,8		
Total		224	100,0		

3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección ortográfica para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	17	7,6	8,1	8,1
	2	30	13,4	14,2	22,3
	3	44	19,6	20,9	43,1
	4	83	37,1	39,3	82,5
	5	37	16,5	17,5	100,0
	Total	211	94,2	100,0	
Perdidos	Sistema	13	5,8		
Total		224	100,0		

3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección cónica conforme de Lambert para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	7	3,1	3,3	3,3
	2	52	23,2	24,6	28,0
	3	80	35,7	37,9	65,9
	4	58	25,9	27,5	93,4
	5	14	6,3	6,6	100,0
	Total	211	94,2	100,0	
Perdidos	Sistema	13	5,8		
Total		224	100,0		

3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección estereográfica para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	14	6,3	6,6	6,6
	2	44	19,6	20,9	27,5
	3	80	35,7	37,9	65,4
	4	56	25,0	26,5	91,9
	5	17	7,6	8,1	100,0
	Total	211	94,2	100,0	
Perdidos	Sistema	13	5,8		
Total		224	100,0		

3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección gnomónica para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	47	21,0	22,3	22,3
	2	81	36,2	38,4	60,7
	3	52	23,2	24,6	85,3
	4	24	10,7	11,4	96,7
	5	7	3,1	3,3	100,0
	Total	211	94,2	100,0	
Perdidos	Sistema	13	5,8		
Total		224	100,0		

3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección transversa de Mercator para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	31	13,8	14,7	14,7
	2	71	31,7	33,6	48,3
	3	60	26,8	28,4	76,8
	4	36	16,1	17,1	93,8
	5	13	5,8	6,2	100,0
	Total	211	94,2	100,0	
Perdidos	Sistema	13	5,8		
Total		224	100,0		

3.2 Valorar el criterio de forma de los meridianos a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	4	1,8	1,9	1,9
	2	14	6,3	6,6	8,5
	3	39	17,4	18,5	27,0
	4	83	37,1	39,3	66,4
	5	71	31,7	33,6	100,0
	Total	211	94,2	100,0	
Perdidos	Sistema	13	5,8		
Total		224	100,0		

3.2 Valorar el criterio de forma de los paralelos a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	3	1,3	1,4	1,4
	2	14	6,3	6,6	8,1
	3	45	20,1	21,3	29,4
	4	84	37,5	39,8	69,2
	5	65	29,0	30,8	100,0
	Total	211	94,2	100,0	
Perdidos	Sistema	13	5,8		
Total		224	100,0		

3.2 Valorar el criterio de forma de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	18	8,0	8,5	8,5
	2	42	18,8	19,9	28,4
	3	75	33,5	35,5	64,0
	4	55	24,6	26,1	90,0
	5	21	9,4	10,0	100,0
	Total	211	94,2	100,0	
Perdidos	Sistema	13	5,8		
Total		224	100,0		

3.2 Valorar el criterio de superficie de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	23	10,3	10,9	10,9
	2	35	15,6	16,6	27,5
	3	80	35,7	37,9	65,4
	4	50	22,3	23,7	89,1
	5	23	10,3	10,9	100,0
	Total	211	94,2	100,0	
Perdidos	Sistema	13	5,8		
Total		224	100,0		

3.2 Valorar el criterio de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	14	6,3	6,6	6,6
	2	23	10,3	10,9	17,5
	3	58	25,9	27,5	45,0
	4	76	33,9	36,0	81,0
	5	40	17,9	19,0	100,0
	Total	211	94,2	100,0	
Perdidos	Sistema	13	5,8		
Total		224	100,0		

4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección de Mercator para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	38	17,0	18,4	18,4
	2	27	12,1	13,1	31,6
	3	24	10,7	11,7	43,2
	4	46	20,5	22,3	65,5
	5	71	31,7	34,5	100,0
	Total	206	92,0	100,0	
Perdidos	Sistema	18	8,0		
Total		224	100,0		

4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección ortográfica para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	33	14,7	16,0	16,0
	2	34	15,2	16,5	32,5
	3	44	19,6	21,4	53,9
	4	53	23,7	25,7	79,6
	5	42	18,8	20,4	100,0
	Total	206	92,0	100,0	
Perdidos	Sistema	18	8,0		
Total		224	100,0		

4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección cónica conforme de Lambert para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	32	14,3	15,5	15,5
	2	49	21,9	23,8	39,3
	3	67	29,9	32,5	71,8
	4	47	21,0	22,8	94,7
	5	11	4,9	5,3	100,0
	Total	206	92,0	100,0	
Perdidos	Sistema	18	8,0		
Total		224	100,0		

4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección estereográfica para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	30	13,4	14,6	14,6
	2	51	22,8	24,8	39,3
	3	62	27,7	30,1	69,4
	4	52	23,2	25,2	94,7
	5	11	4,9	5,3	100,0
	Total	206	92,0	100,0	
Perdidos	Sistema	18	8,0		
Total		224	100,0		

4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección gnomónica para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	35	15,6	17,0	17,0
	2	57	25,4	27,7	44,7
	3	50	22,3	24,3	68,9
	4	40	17,9	19,4	88,3
	5	24	10,7	11,7	100,0
	Total	206	92,0	100,0	
Perdidos	Sistema	18	8,0		
Total		224	100,0		

4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección transversa de Mercator para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	28	12,5	13,6	13,6
	2	49	21,9	23,8	37,4
	3	54	24,1	26,2	63,6
	4	48	21,4	23,3	86,9
	5	27	12,1	13,1	100,0
	Total	206	92,0	100,0	
Perdidos	Sistema	18	8,0		
Total		224	100,0		

4.2 Valorar el criterio de forma de las derrotas en la carta a la hora de contestar la pregunta 4.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	10	4,5	4,9	4,9
	2	3	1,3	1,5	6,3
	3	19	8,5	9,2	15,5
	4	80	35,7	38,8	54,4
	5	94	42,0	45,6	100,0
	Total	206	92,0	100,0	
Perdidos	Sistema	18	8,0		
Total		224	100,0		

4.2 Valorar el criterio de longitud de las derrotas en la carta a la hora de contestar la pregunta 4.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	22	9,8	10,7	10,7
	2	37	16,5	18,0	28,6
	3	41	18,3	19,9	48,5
	4	51	22,8	24,8	73,3
	5	55	24,6	26,7	100,0
	Total	206	92,0	100,0	
Perdidos	Sistema	18	8,0		
Total		224	100,0		

5.1 Qué carta del Atlántico Norte es la más útil para planificar una ortodrómica (seleccionar 1)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	Gnomónica	79	35,3	38,7	38,7
	Mercator	70	31,3	34,3	73,0
	Ortográfica	12	5,4	5,9	78,9
	Cónica Conforme de Lambert	11	4,9	5,4	84,3
	Estereográfica	6	2,7	2,9	87,3
	Transversa de Mercator	26	11,6	12,7	100,0
	Total	204	91,1	100,0	
Perdidos	Sistema	20	8,9		
Total		224	100,0		

5.2 Qué carta del Atlántico Norte es la más útil para planificar una loxodrómica (seleccionar 1)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	Gnomónica	5	2,2	2,5	2,5
	Mercator	181	80,8	88,7	91,2
	Ortográfica	5	2,2	2,5	93,6
	Cónica Conforme de Lambert	3	1,3	1,5	95,1
	Estereográfica	5	2,2	2,5	97,5
	Transversa de Mercator	5	2,2	2,5	100,0
	Total	204	91,1	100,0	
Perdidos	Sistema	20	8,9		
Total		224	100,0		

5.3.1.2.4 Pacífico

6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección de Mercator para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del océano Pacífico (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	24	10,7	11,9	11,9
	2	45	20,1	22,4	34,3
	3	37	16,5	18,4	52,7
	4	49	21,9	24,4	77,1
	5	46	20,5	22,9	100,0
	Total	201	89,7	100,0	
Perdidos	Sistema	23	10,3		
Total		224	100,0		

6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección de Mollweide para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del océano Pacífico (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	12	5,4	6,0	6,0
	2	47	21,0	23,4	29,4
	3	61	27,2	30,3	59,7
	4	61	27,2	30,3	90,0
	5	20	8,9	10,0	100,0
	Total	201	89,7	100,0	
Perdidos	Sistema	23	10,3		
Total		224	100,0		

6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección acimutal equidistante para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del océano Pacífico (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	16	7,1	8,0	8,0
	2	46	20,5	22,9	30,8
	3	78	34,8	38,8	69,7
	4	54	24,1	26,9	96,5
	5	7	3,1	3,5	100,0
	Total	201	89,7	100,0	
Perdidos	Sistema	23	10,3		
Total		224	100,0		

6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección estereográfica para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del océano Pacífico (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	22	9,8	10,9	10,9
	2	50	22,3	24,9	35,8
	3	70	31,3	34,8	70,6
	4	46	20,5	22,9	93,5
	5	13	5,8	6,5	100,0
	Total	201	89,7	100,0	
Perdidos	Sistema	23	10,3		
Total		224	100,0		

6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección ortográfica para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del océano Pacífico (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	54	24,1	26,9	26,9
	2	65	29,0	32,3	59,2
	3	48	21,4	23,9	83,1
	4	23	10,3	11,4	94,5
	5	11	4,9	5,5	100,0
	Total	201	89,7	100,0	
Perdidos	Sistema	23	10,3		
Total		224	100,0		

6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección transversa de Mercator para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del océano Pacífico (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	80	35,7	39,8	39,8
	2	56	25,0	27,9	67,7
	3	31	13,8	15,4	83,1
	4	18	8,0	9,0	92,0
	5	16	7,1	8,0	100,0
	Total	201	89,7	100,0	
Perdidos	Sistema	23	10,3		
Total		224	100,0		

6.2 Valorar el criterio de forma de los meridianos a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	5	2,2	2,5	2,5
	2	11	4,9	5,5	8,0
	3	55	24,6	27,4	35,3
	4	69	30,8	34,3	69,7
	5	61	27,2	30,3	100,0
	Total	201	89,7	100,0	
Perdidos	Sistema	23	10,3		
Total		224	100,0		

6.2 Valorar el criterio de forma de los paralelos a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	7	3,1	3,5	3,5
	2	17	7,6	8,5	11,9
	3	57	25,4	28,4	40,3
	4	68	30,4	33,8	74,1
	5	52	23,2	25,9	100,0
	Total	201	89,7	100,0	
Perdidos	Sistema	23	10,3		
Total		224	100,0		

6.2 Valorar el criterio de forma de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	14	6,3	7,0	7,0
	2	36	16,1	17,9	24,9
	3	55	24,6	27,4	52,2
	4	70	31,3	34,8	87,1
	5	26	11,6	12,9	100,0
	Total	201	89,7	100,0	
Perdidos	Sistema	23	10,3		
Total		224	100,0		

6.2 Valorar el criterio de superficie de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	15	6,7	7,5	7,5
	2	35	15,6	17,4	24,9
	3	72	32,1	35,8	60,7
	4	52	23,2	25,9	86,6
	5	27	12,1	13,4	100,0
	Total	201	89,7	100,0	
Perdidos	Sistema	23	10,3		
Total		224	100,0		

6.2 Valorar el criterio de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	13	5,8	6,5	6,5
	2	28	12,5	13,9	20,4
	3	42	18,8	20,9	41,3
	4	61	27,2	30,3	71,6
	5	57	25,4	28,4	100,0
	Total	201	89,7	100,0	
Perdidos	Sistema	23	10,3		
Total		224	100,0		

7.1 Valorar la utilidad de una carta del océano Pacífico en proyección de Mercator para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	25	11,2	12,9	12,9
	2	31	13,8	16,0	28,9
	3	27	12,1	13,9	42,8
	4	52	23,2	26,8	69,6
	5	59	26,3	30,4	100,0
	Total	194	86,6	100,0	
Perdidos	Sistema	30	13,4		
Total		224	100,0		

7.1 Valorar la utilidad de una carta del océano Pacífico en proyección de Mollweide para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	26	11,6	13,4	13,4
	2	38	17,0	19,6	33,0
	3	58	25,9	29,9	62,9
	4	47	21,0	24,2	87,1
	5	25	11,2	12,9	100,0
	Total	194	86,6	100,0	
Perdidos	Sistema	30	13,4		
Total		224	100,0		

7.1 Valorar la utilidad de una carta del océano Pacífico en proyección acimutal equidistante para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	28	12,5	14,4	14,4
	2	39	17,4	20,1	34,5
	3	63	28,1	32,5	67,0
	4	43	19,2	22,2	89,2
	5	21	9,4	10,8	100,0
	Total	194	86,6	100,0	
Perdidos	Sistema	30	13,4		
Total		224	100,0		

7.1 Valorar la utilidad de una carta del océano Pacífico en proyección estereográfica para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	27	12,1	13,9	13,9
	2	40	17,9	20,6	34,5
	3	57	25,4	29,4	63,9
	4	51	22,8	26,3	90,2
	5	19	8,5	9,8	100,0
	Total	194	86,6	100,0	
Perdidos	Sistema	30	13,4		
Total		224	100,0		

7.1 Valorar la utilidad de una carta del océano Pacífico en proyección ortográfica para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	56	25,0	28,9	28,9
	2	51	22,8	26,3	55,2
	3	42	18,8	21,6	76,8
	4	29	12,9	14,9	91,8
	5	16	7,1	8,2	100,0
	Total	194	86,6	100,0	
Perdidos	Sistema	30	13,4		
Total		224	100,0		

7.1 Valorar la utilidad de una carta del océano Pacífico en proyección transversa de Mercator para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	77	34,4	39,7	39,7
	2	63	28,1	32,5	72,2
	3	31	13,8	16,0	88,1
	4	16	7,1	8,2	96,4
	5	7	3,1	3,6	100,0
	Total	194	86,6	100,0	
Perdidos	Sistema	30	13,4		
Total		224	100,0		

7.2 Valorar el criterio de forma de las derrotas en la carta a la hora de contestar la pregunta 7.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	4	1,8	2,1	2,1
	2	9	4,0	4,6	6,7
	3	28	12,5	14,4	21,1
	4	67	29,9	34,5	55,7
	5	86	38,4	44,3	100,0
	Total	194	86,6	100,0	
Perdidos	Sistema	30	13,4		
Total		224	100,0		

7.2 Valorar el criterio de longitud de las derrotas en la carta a la hora de contestar la pregunta 7.1 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	18	8,0	9,3	9,3
	2	23	10,3	11,9	21,1
	3	44	19,6	22,7	43,8
	4	55	24,6	28,4	72,2
	5	54	24,1	27,8	100,0
	Total	194	86,6	100,0	
Perdidos	Sistema	30	13,4		
Total		224	100,0		

8.1 Qué carta del océano Pacífico es la más útil para planificar una ortodrómica (seleccionar 1)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	Mercator	71	31,7	37,2	37,2
	Mollweide	16	7,1	8,4	45,5
	Ortográfica	19	8,5	9,9	55,5
	Acimutal Equidistante	21	9,4	11,0	66,5
	Estereográfica	54	24,1	28,3	94,8
	Transversa de Mercator	10	4,5	5,2	100,0
	Total	191	85,3	100,0	
Perdidos	Sistema	33	14,7		
Total		224	100,0		

8.2 Qué carta del océano Pacífico es la más útil para planificar una loxodrómica (seleccionar 1)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	Mercator	147	65,6	77,0	77,0
	Mollweide	25	11,2	13,1	90,1
	Ortográfica	6	2,7	3,1	93,2
	Acimutal Equidistante	6	2,7	3,1	96,3
	Estereográfica	6	2,7	3,1	99,5
	Transversa de Mercator	1	,4	,5	100,0
	Total	191	85,3	100,0	
Perdidos	Sistema	33	14,7		
Total		224	100,0		

5.3.1.2.5 Altas latitudes

9.1 Qué carta es la más útil para representar la realidad geográfica de la zona entre Tierra de Fuego y el cabo de Buena Esperanza (seleccionar 1)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	Gnomónica	68	30,4	36,0	36,0
	Ortográfica	49	21,9	25,9	61,9
	Estereográfica	42	18,8	22,2	84,1
	Transversa de Mercator	30	13,4	15,9	100,0
	Total	189	84,4	100,0	
Perdidos	Sistema	35	15,6		
Total		224	100,0		

9.2 Qué carta es la más útil para representar la realidad geográfica de la zona de las islas Aleutianas y el estrecho de Bering (seleccionar 1)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	Gnomónica	53	23,7	28,0	28,0
	Ortográfica	58	25,9	30,7	58,7
	Estereográfica	38	17,0	20,1	78,8
	Transversa de Mercator	40	17,9	21,2	100,0
	Total	189	84,4	100,0	
Perdidos	Sistema	35	15,6		
Total		224	100,0		

9.3 Valorar el criterio de forma de los meridianos a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	6	2,7	3,2	3,2
	2	21	9,4	11,1	14,3
	3	41	18,3	21,7	36,0
	4	64	28,6	33,9	69,8
	5	57	25,4	30,2	100,0
	Total	189	84,4	100,0	
Perdidos	Sistema	35	15,6		
Total		224	100,0		

9.3 Valorar el criterio de forma de los paralelos a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	6	2,7	3,2	3,2
	2	23	10,3	12,2	15,3
	3	50	22,3	26,5	41,8
	4	60	26,8	31,7	73,5
	5	50	22,3	26,5	100,0
	Total	189	84,4	100,0	
Perdidos	Sistema	35	15,6		
Total		224	100,0		

9.3 Valorar el criterio de forma de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	9	4,0	4,8	4,8
	2	28	12,5	14,8	19,6
	3	72	32,1	38,1	57,7
	4	61	27,2	32,3	89,9
	5	19	8,5	10,1	100,0
	Total	189	84,4	100,0	
Perdidos	Sistema	35	15,6		
Total		224	100,0		

9.3 Valorar el criterio de superficie de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)

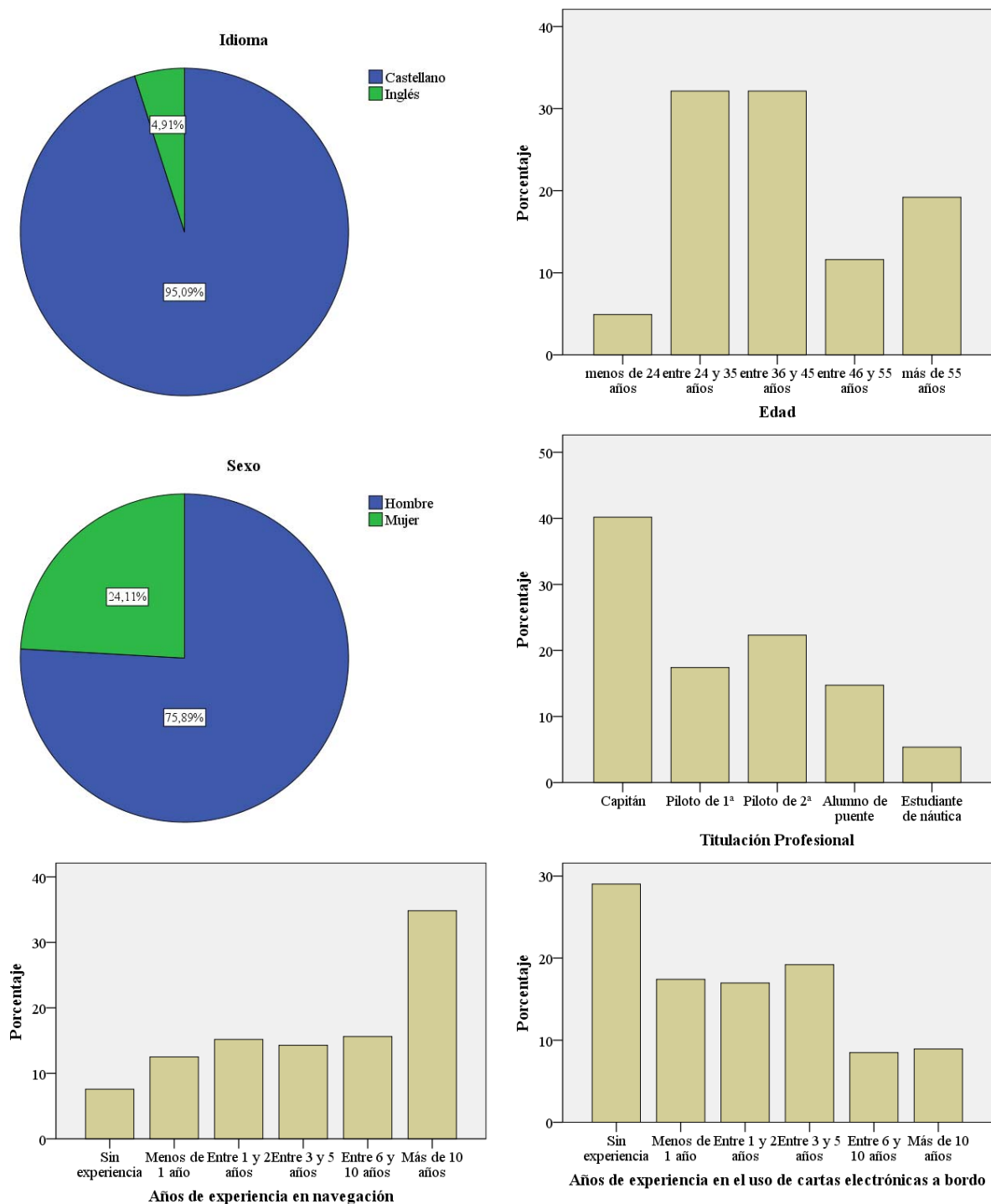
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	10	4,5	5,3	5,3
	2	40	17,9	21,2	26,5
	3	68	30,4	36,0	62,4
	4	51	22,8	27,0	89,4
	5	20	8,9	10,6	100,0
	Total	189	84,4	100,0	
Perdidos	Sistema	35	15,6		
Total		224	100,0		

9.3 Valorar el criterio de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)

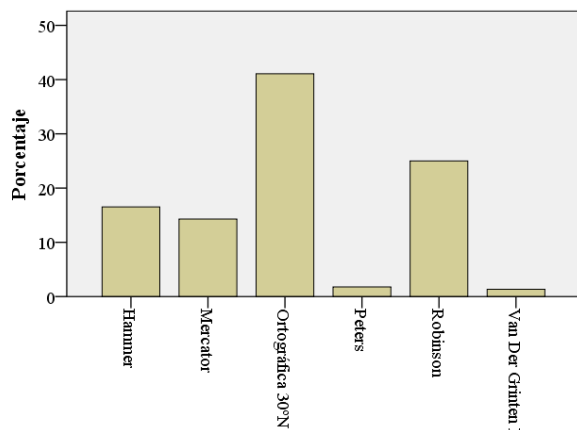
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	12	5,4	6,3	6,3
	2	22	9,8	11,6	18,0
	3	47	21,0	24,9	42,9
	4	58	25,9	30,7	73,5
	5	50	22,3	26,5	100,0
	Total	189	84,4	100,0	
Perdidos	Sistema	35	15,6		
Total		224	100,0		

5.3.1.3 Representaciones gráficas

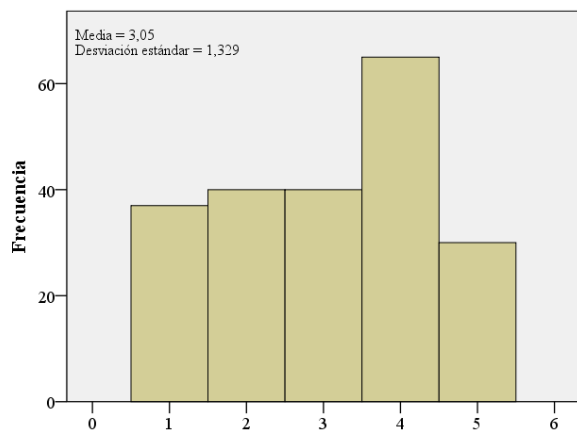
5.3.1.3.1 Datos personales



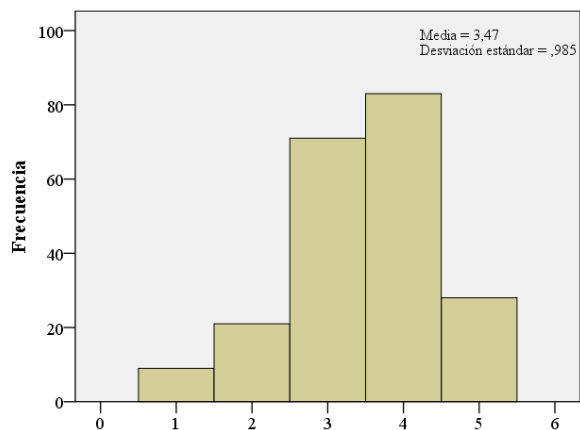
5.3.1.3.2 Mapamundis



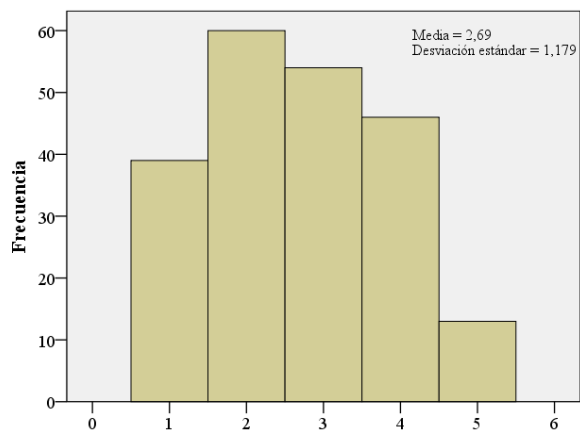
1.1 Cual de las siguientes representaciones cartográficas se asemeja más a la imagen mental que tienes de la configuración de la superficie terrestre (seleccionar 1)



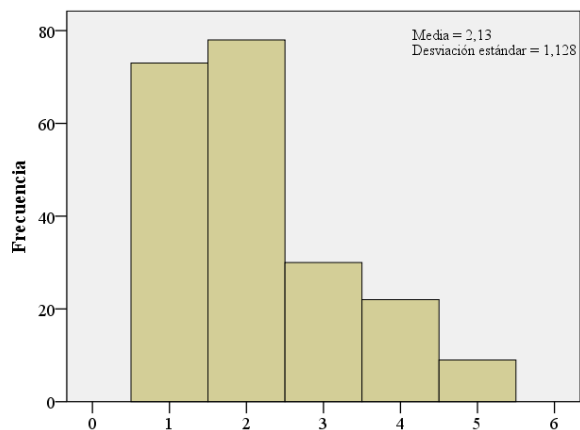
2.1 Valorar mapamundi Goode Homolosine Interrupted para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)



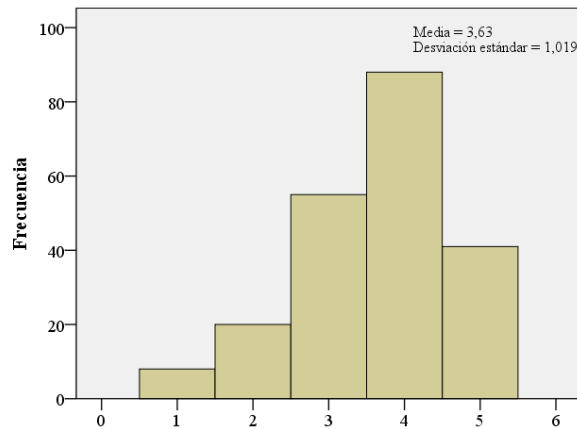
2.1 Valorar mapamundi Hammer para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)



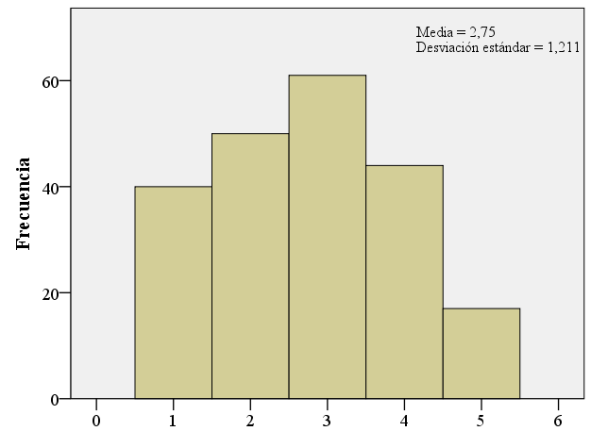
2.1 Valorar mapamundi Mercator para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)



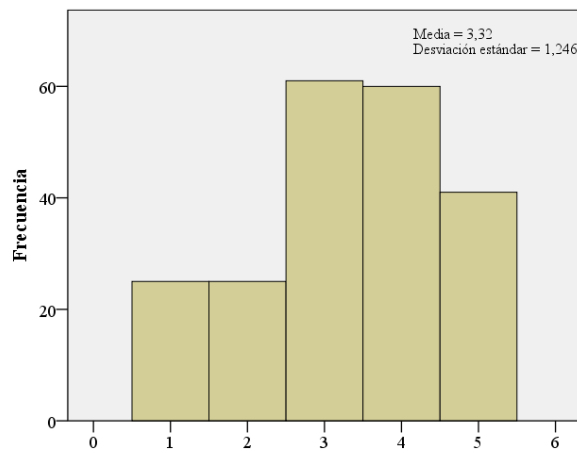
2.1 Valorar mapamundi Peters para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)



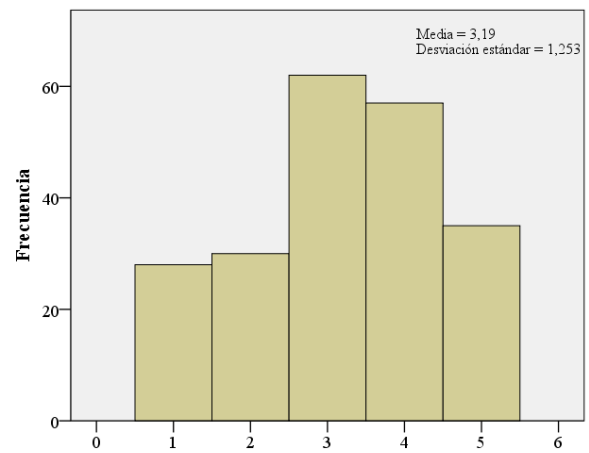
2.1 Valorar mapamundi Robinson para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)



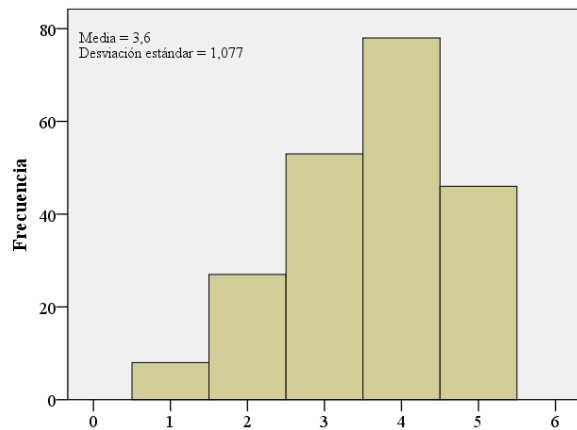
2.1 Valorar mapamundi Van Der Grinten I para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre (valorar de 1 a 5)



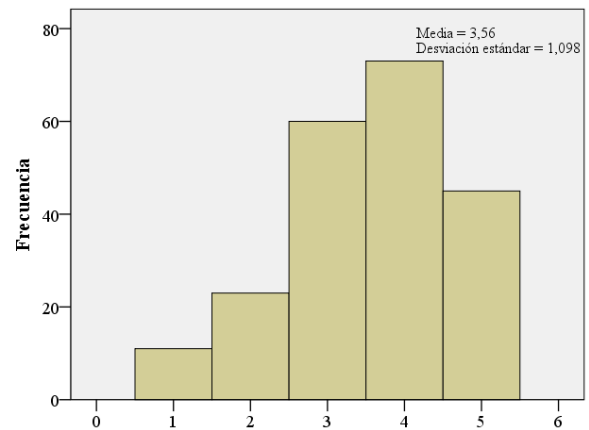
2.2 Valorar el criterio de forma de los meridianos a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)



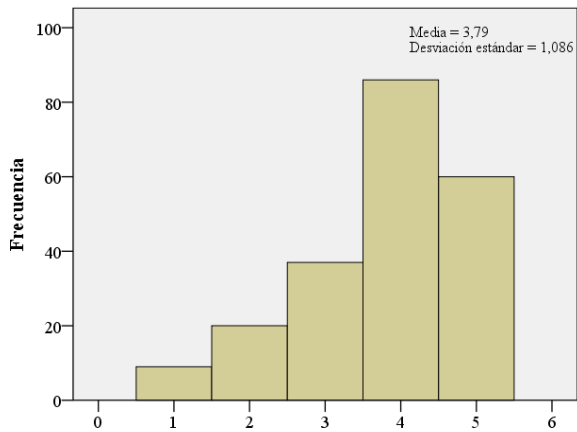
2.2 Valorar el criterio de forma de los paralelos a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)



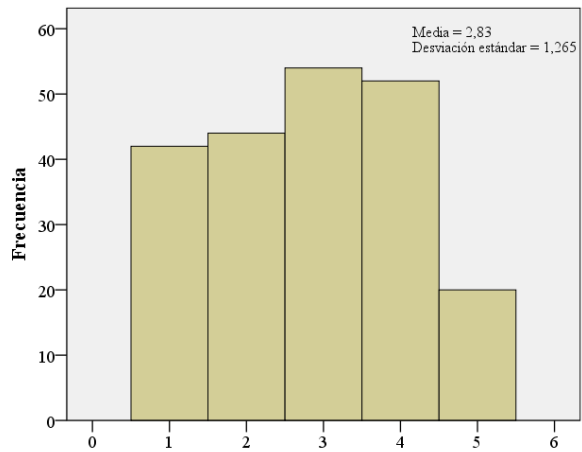
2.2 Valorar el criterio de forma de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)



2.2 Valorar el criterio de superficie de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)

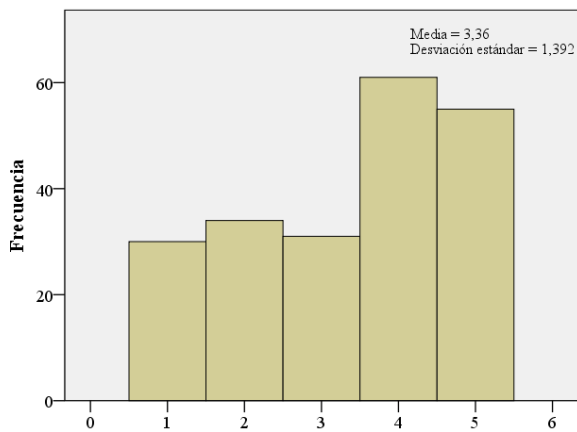


2.2 Valorar el criterio de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)

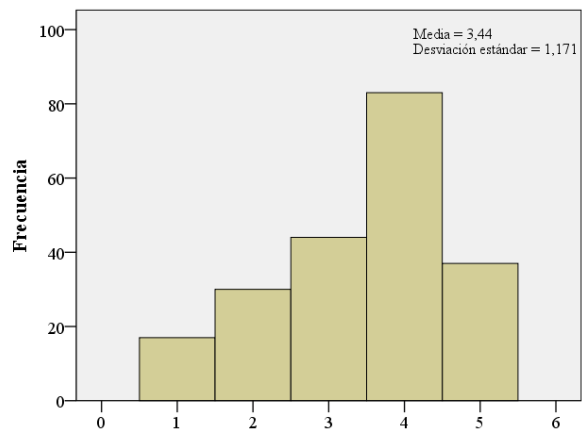


2.2 Valorar el criterio de geometría de los límites del mapa a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)

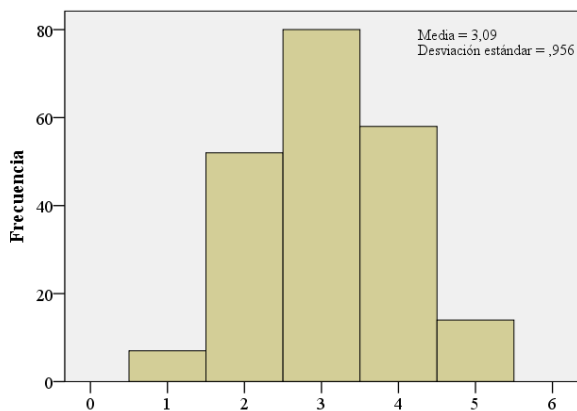
5.3.1.3.3 Atlántico Norte



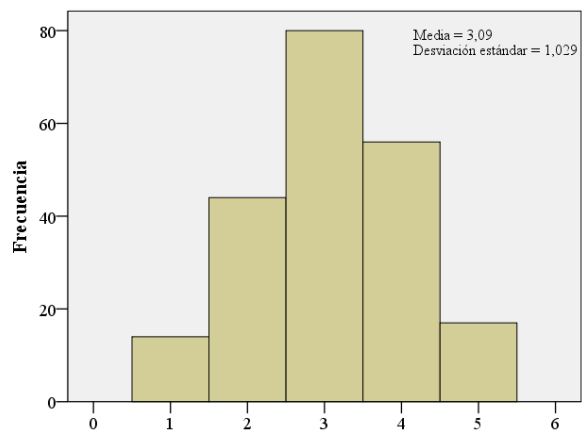
3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección de Mercator para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)



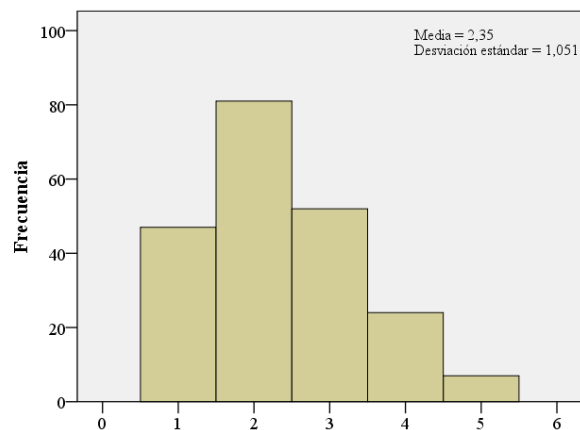
3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección ortográfica para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)



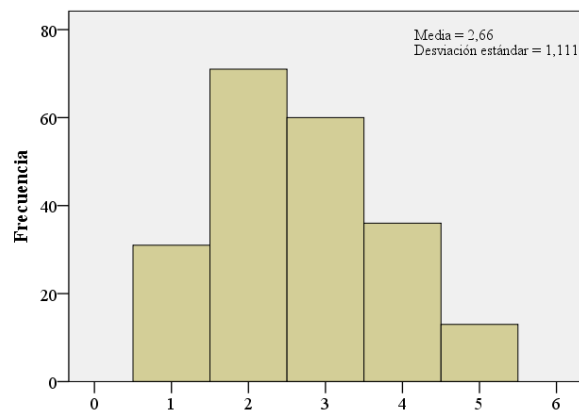
3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección cónica conforme de Lambert para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)



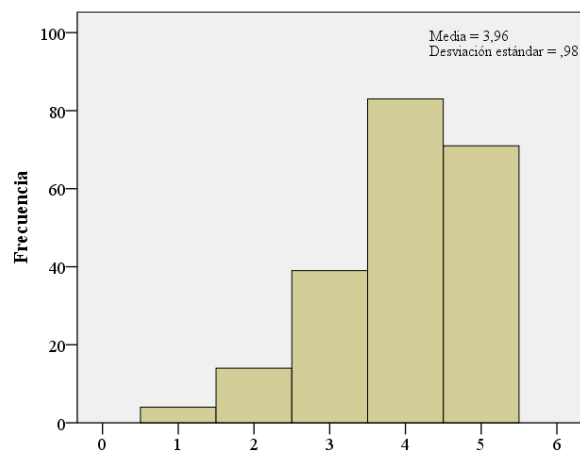
3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección estereográfica para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)



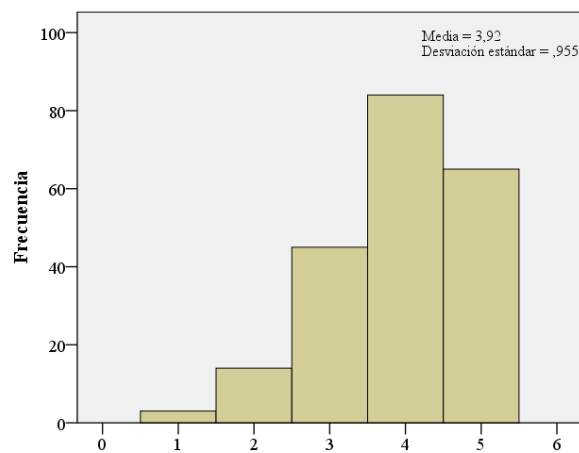
3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección gnomónica para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)



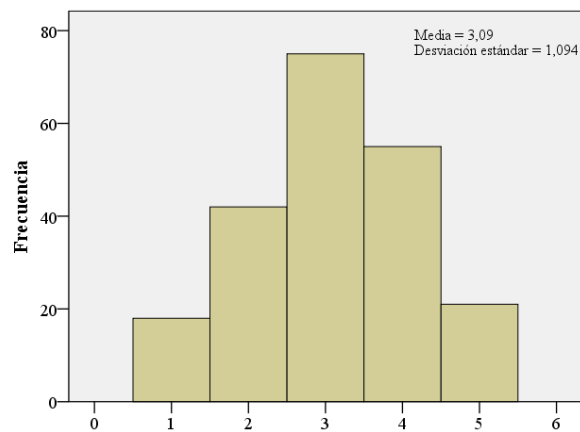
3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección transversa de Mercator para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)



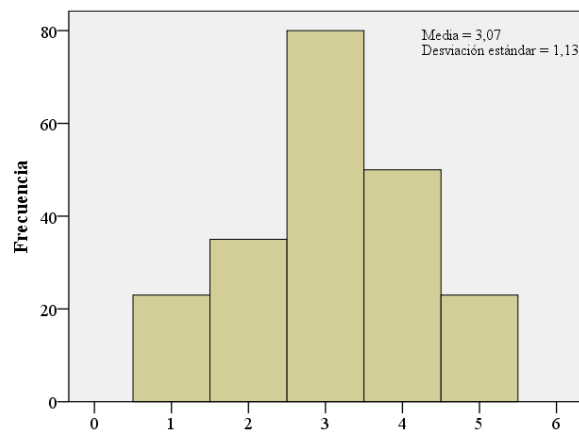
3.2 Valorar el criterio de forma de los meridianos a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)



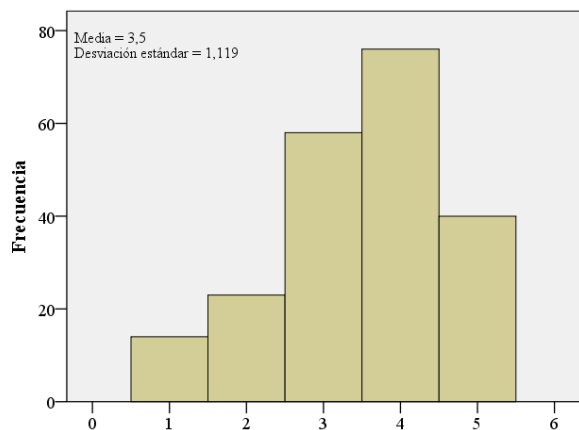
3.2 Valorar el criterio de forma de los paralelos a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)



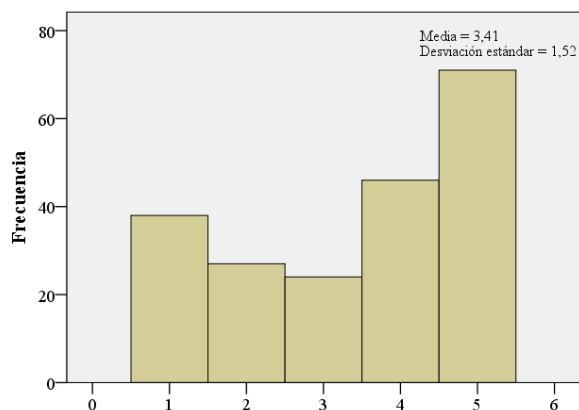
3.2 Valorar el criterio de forma de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)



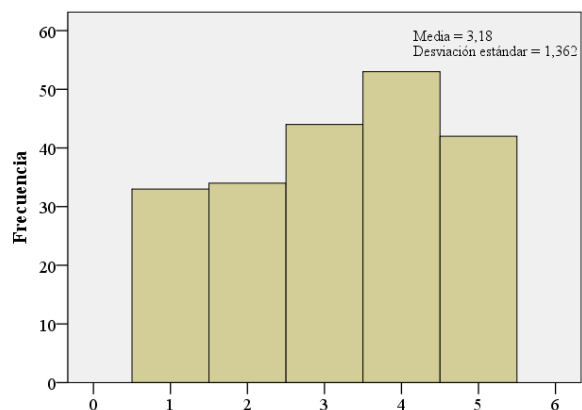
3.2 Valorar el criterio de superficie de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)



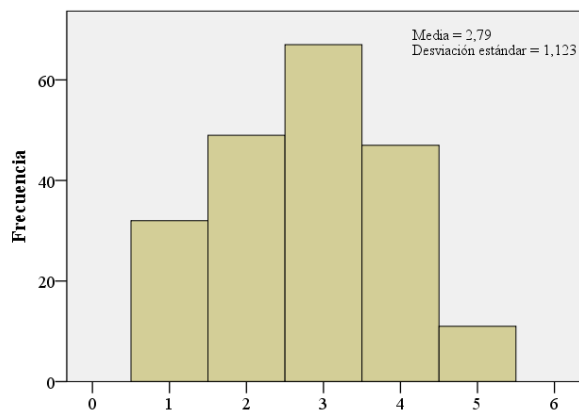
3.2 Valorar el criterio de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)



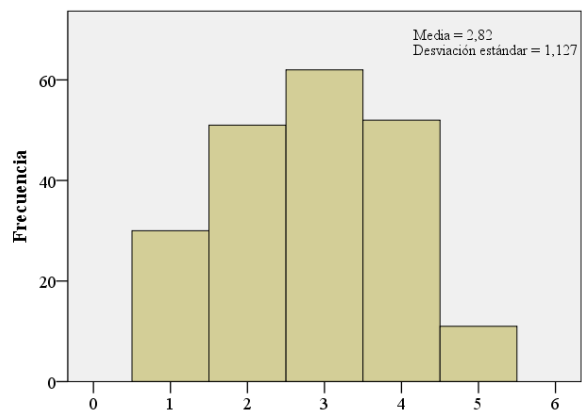
4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección de Mercator para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)



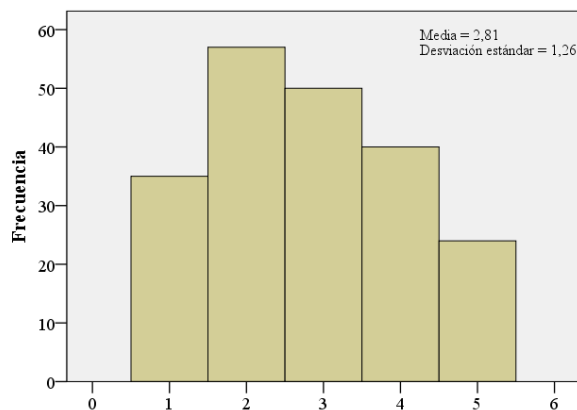
4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección ortográfica para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)



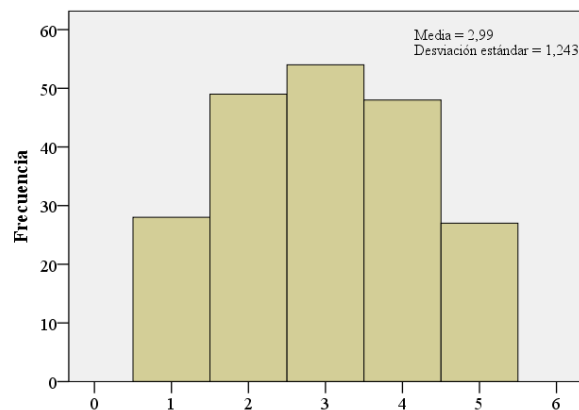
4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección cónica conforme de Lambert para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)



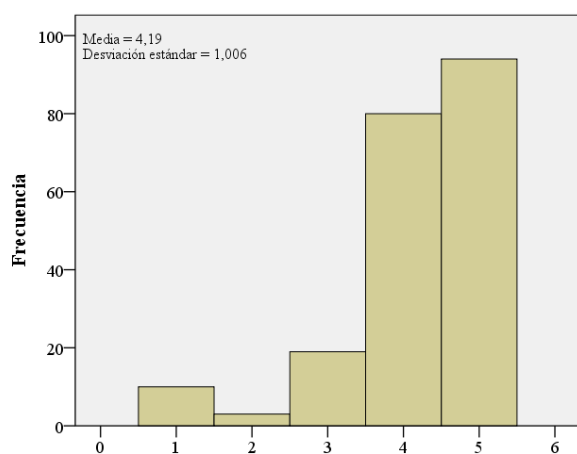
4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección estereográfica para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)



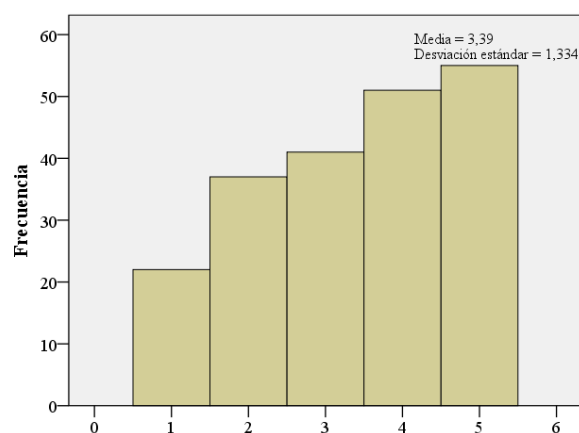
4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección gnomónica para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)



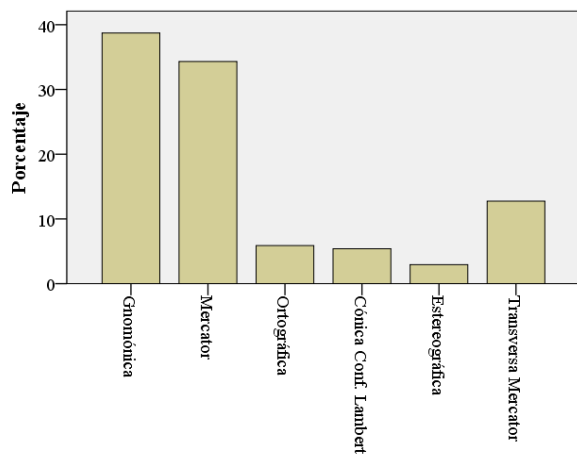
4.1 Valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte en proyección transversa de Mercator para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)



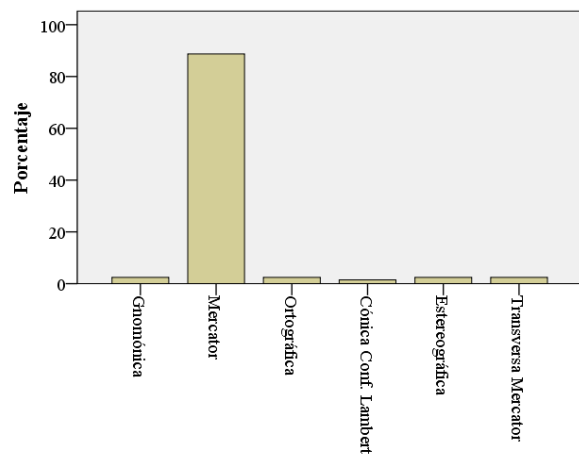
4.2 Valorar el criterio de forma de las derrota en la carta a la hora de contestar la pregunta 4.1 (valorar de 1 a 5)



4.2 Valorar el criterio de longitud de las derrota en la carta a la hora de contestar la pregunta 4.1 (valorar de 1 a 5)

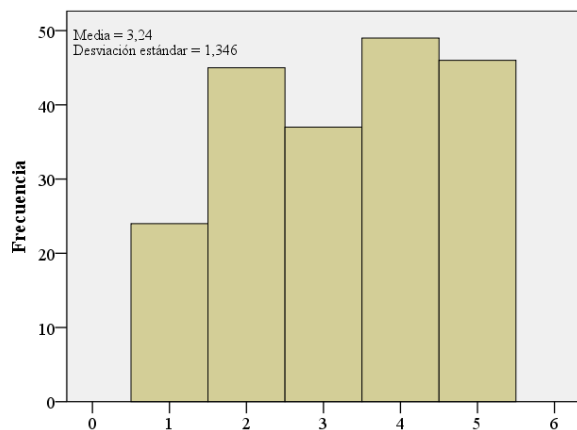


5.1 Qué carta del Atlántico Norte es la más útil para planificar una ortodrómica (seleccionar 1)

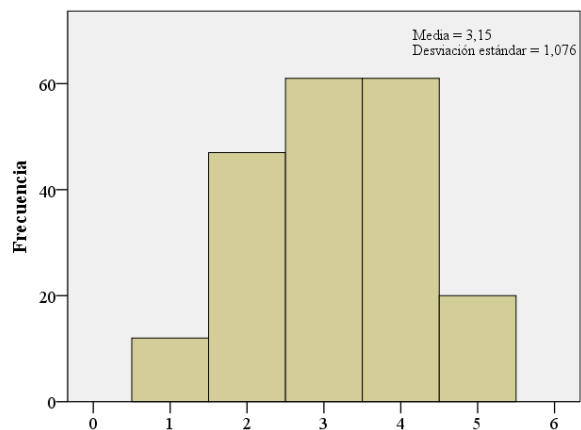


5.2 Qué carta del Atlántico Norte es la más útil para planificar una loxodrómica (seleccionar 1)

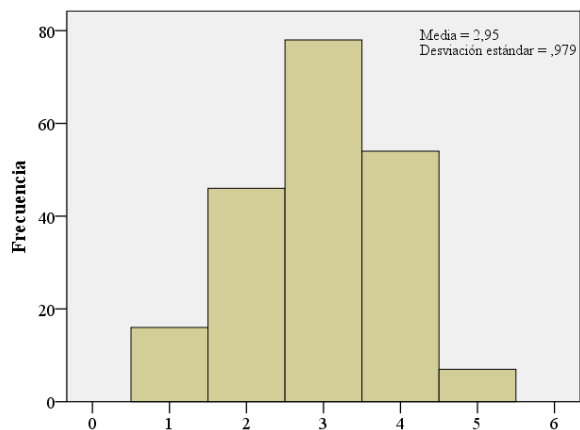
5.3.1.3.4 Pacífico



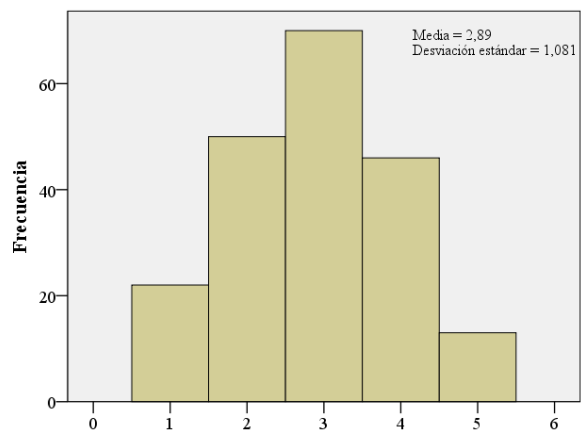
6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección de Mercator para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Océano Pacífico (valorar de 1 a 5)



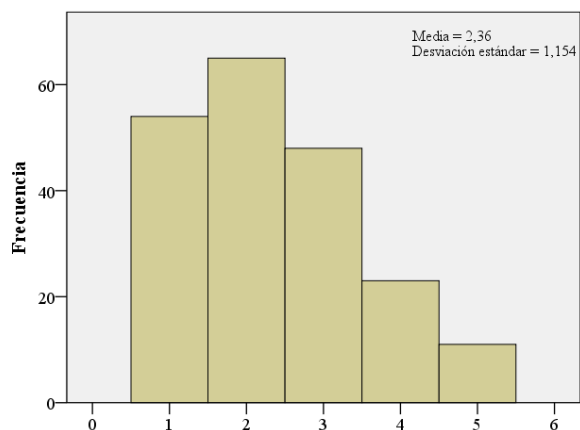
6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección de Mollweide para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Océano Pacífico (valorar de 1 a 5)



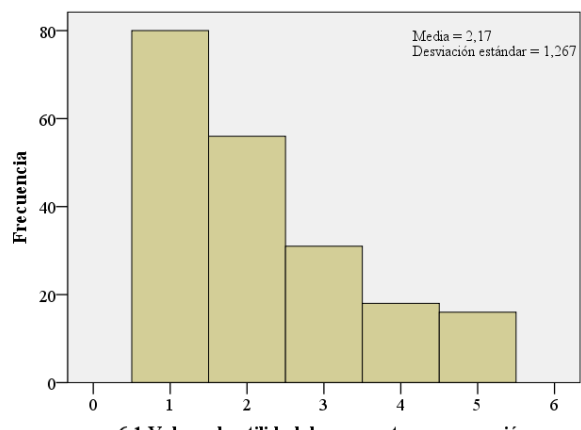
6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección azimutal equidistante para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Océano Pacífico (valorar de 1 a 5)



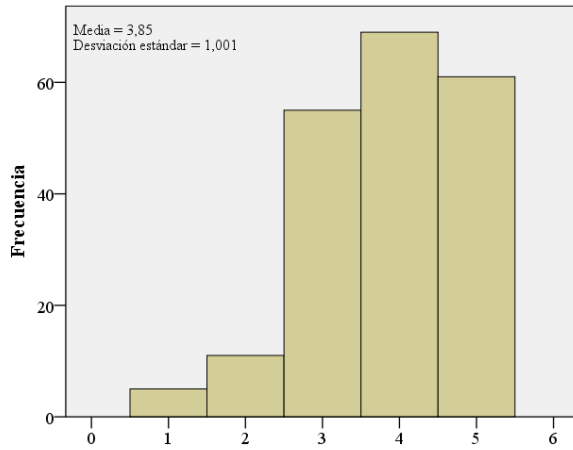
6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección estereográfica para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Océano Pacífico (valorar de 1 a 5)



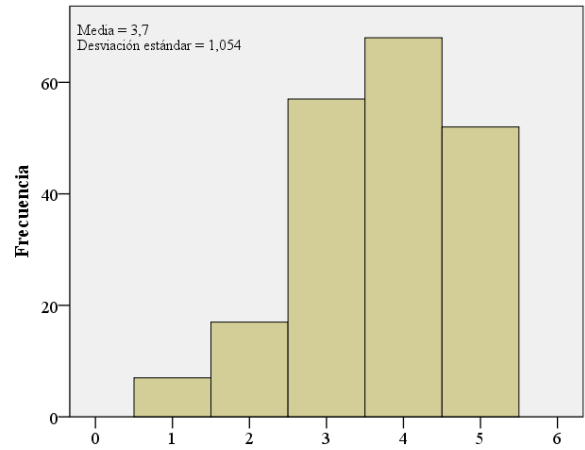
6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección ortográfica para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Océano Pacífico (valorar de 1 a 5)



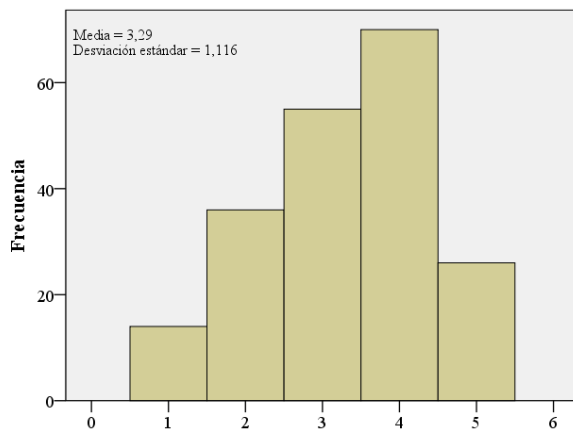
6.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección transversa de Mercator para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Océano Pacífico (valorar de 1 a 5)



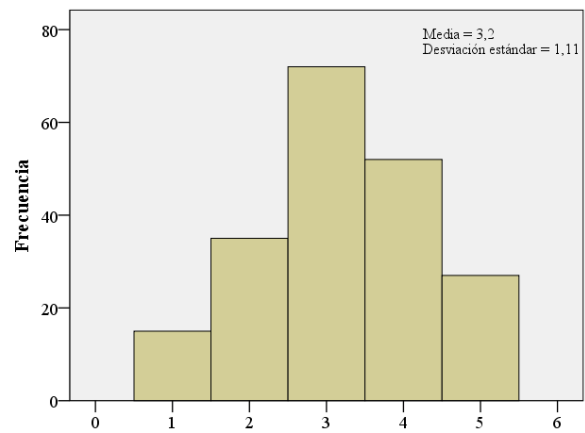
6.2 Valorar el criterio de forma de los meridianos a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)



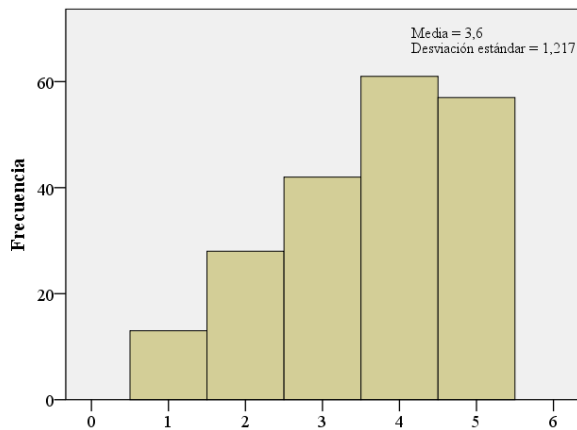
6.2 Valorar el criterio de forma de los paralelos a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)



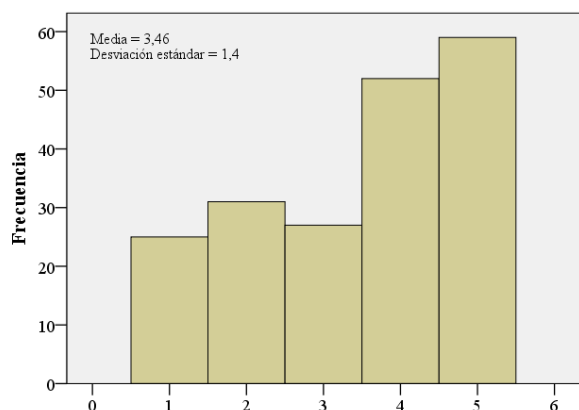
6.2 Valorar el criterio de forma de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)



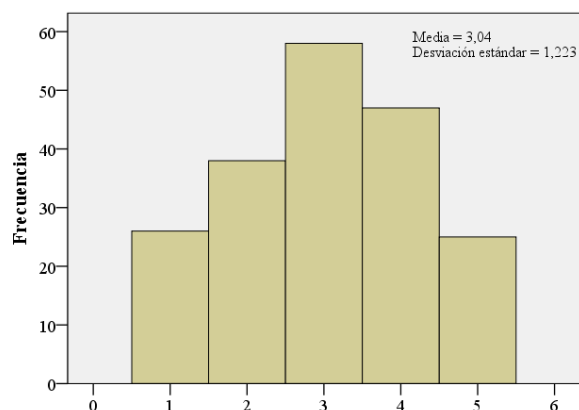
6.2 Valorar el criterio de superficie de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)



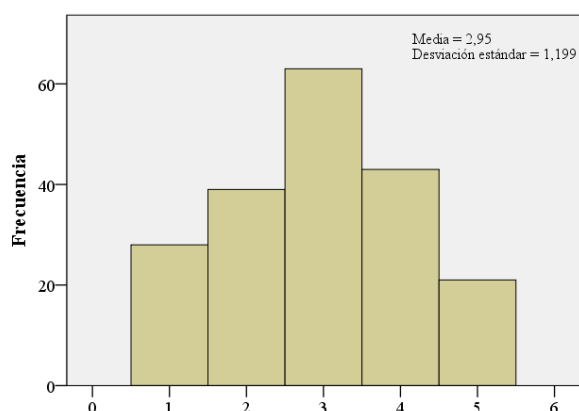
6.2 Valorar el criterio de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)



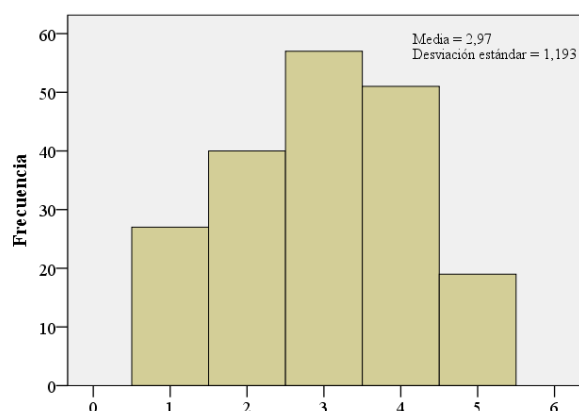
7.1 Valorar la utilidad de una carta del Océano Pacífico en proyección de Mercator para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)



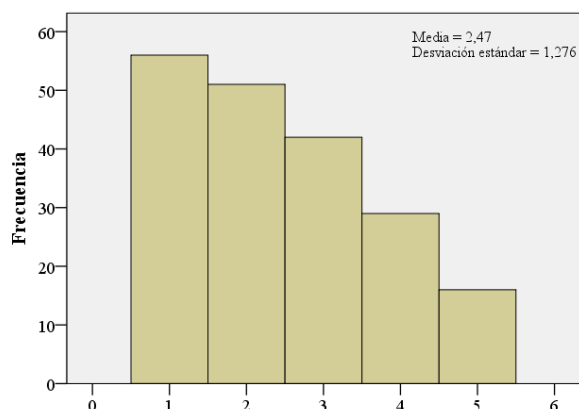
7.1 Valorar la utilidad de una carta del Océano Pacífico en proyección de Mollweide para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)



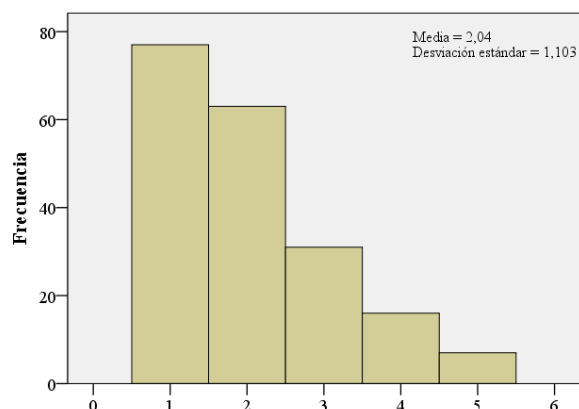
7.1 Valorar la utilidad de una carta del Océano Pacífico en proyección azimutal equidistante para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)



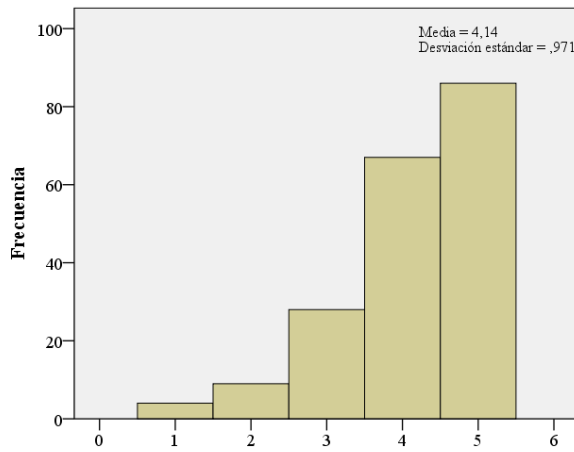
7.1 Valorar la utilidad de una carta del Océano Pacífico en proyección estereográfica para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)



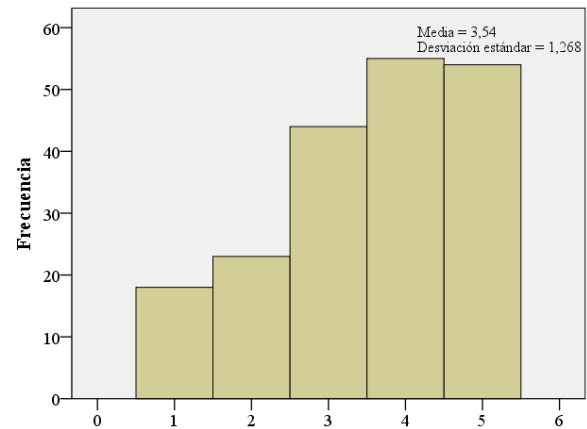
7.1 Valorar la utilidad de una carta del Océano Pacífico en proyección ortográfica para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)



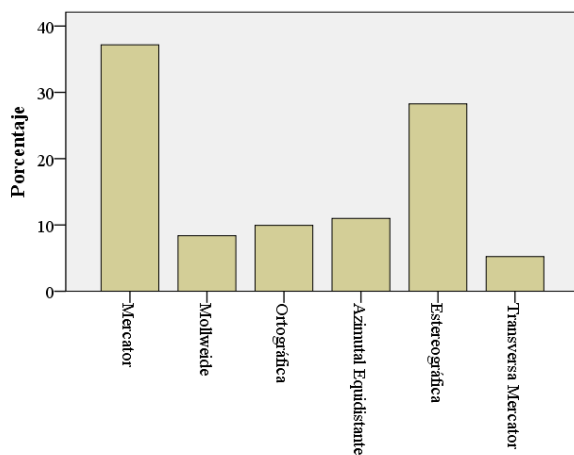
7.1 Valorar la utilidad de una carta del Océano Pacífico en proyección transversa de Mercator para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica (valorar de 1 a 5)



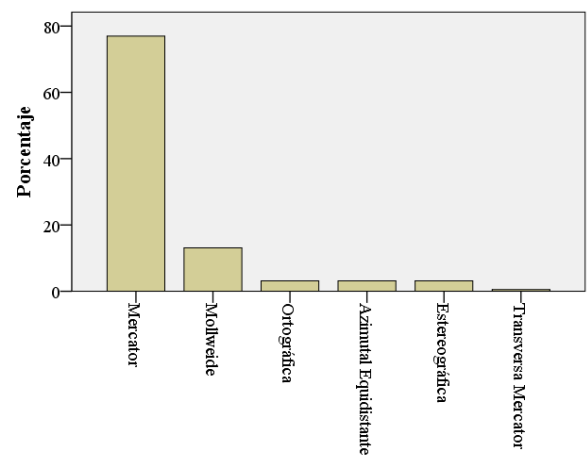
7.2 Valorar el criterio de forma de las derrotas en la carta a la hora de contestar la pregunta 7.1 (valorar de 1 a 5)



7.2 Valorar el criterio de longitud de las derrotas en la carta a la hora de contestar la pregunta 7.1 (valorar de 1 a 5)

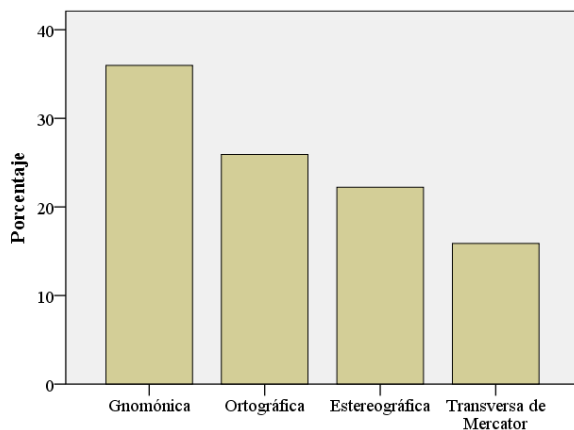


8.1 Qué carta del Océano Pacífico es la más útil para planificar una ortodrómica (seleccionar 1)

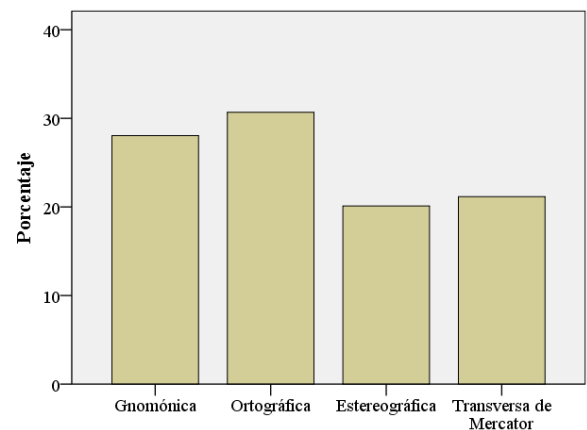


8.2 Qué carta del Océano Pacífico es la más útil para planificar una loxodrómica (seleccionar 1)

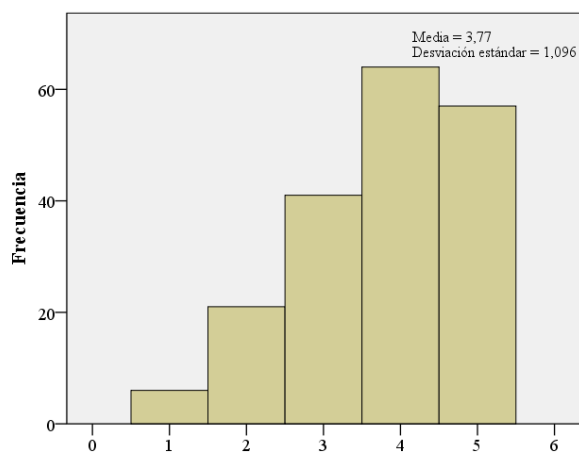
5.3.1.3.5 Altas latitudes



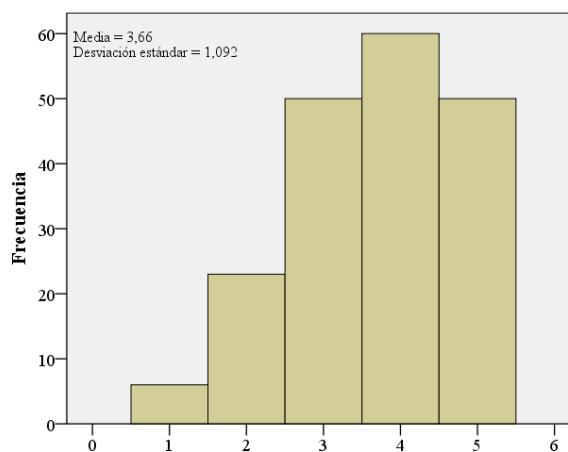
9.1 Qué carta es la más útil para representar la realidad geográfica de la zona entre Tierra de Fuego y el Cabo de Buena Esperanza (seleccionar 1)



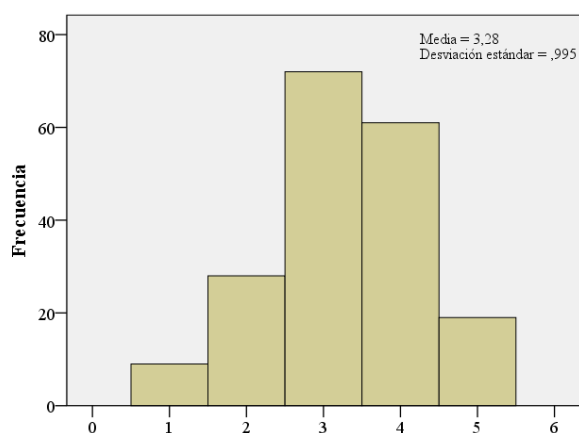
9.2 Qué carta es la más útil para representar la realidad geográfica de la zona de las islas Aleutianas y el Estrecho de Bering (seleccionar 1)



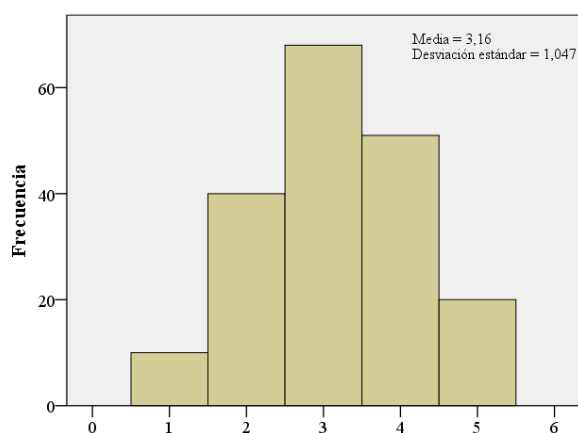
9.3 Valorar el criterio de forma de los meridianos a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)



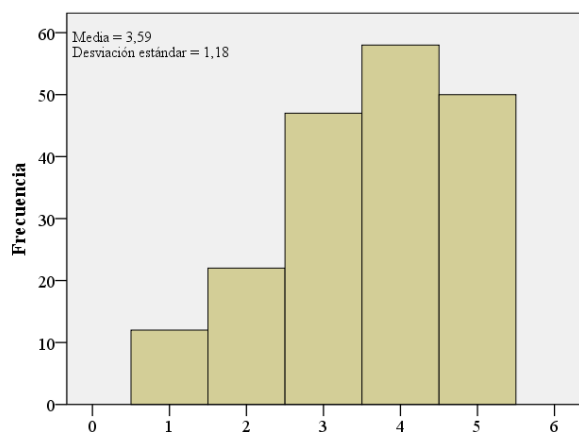
9.3 Valorar el criterio de forma de los paralelos a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)



9.3 Valorar el criterio de forma de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)



9.3 Valorar el criterio de superficie de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)



9.3 Valorar el criterio de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)

5.3.1.4 Análisis de correlaciones

A la hora de realizar el análisis de correlaciones entre las variables continuas de la encuesta, se ha optado por no incluir la tabla de coeficientes de correlación (r_{xy}) completa, debido al elevado número de variables con las que se ha trabajado. Así, tan solo se recogen a continuación las relaciones con coeficientes de correlación estadísticamente significativos ($p \leq 0,05$), pertenecientes al triángulo superior de la matriz de correlaciones, en orden a no repetir resultados.

Se observa que los valores de los coeficientes de correlación son por lo general bajos. Para una mejor interpretación de los resultados se incluye también el coeficiente de determinación de las relaciones (r_{xy}^2), y se indica mediante un código de colores aquellos valores iguales o superiores a 0,10.

	2.2.4	2.2.5	2.2.6	3.1.6	4.1.2	4.1.4	4.1.5	4.1.6	6.1.4	7.1.3	7.1.5
2.1.1 r_{xy}	0,19	-0,18	-0,18	0,16	0,23	0,14	0,15	0,20	0,18	0,15	0,23
p	0,01	0,01	0,01	0,02	0,00	0,04	0,04	0,00	0,01	0,04	0,00
r_{xy}^2	0,04	0,03	0,03	0,03	0,05	0,02	0,02	0,04	0,03	0,02	0,05

	2.1.4	2.1.5	3.1.2	3.1.3	3.1.4	3.1.5	3.2.1	4.1.2	4.1.3	4.1.4	4.1.6	6.1.2	6.1.3	6.1.5
2.1.2 r_{xy}	0,15	0,16	0,33	0,17	0,27	0,14	0,16	0,21	0,22	0,21	0,16	0,15	0,22	0,14
p	0,03	0,02	0,00	0,01	0,00	0,04	0,02	0,00	0,00	0,00	0,02	0,04	0,00	0,05
r_{xy}^2	0,02	0,03	0,11	0,03	0,07	0,02	0,02	0,04	0,05	0,04	0,03	0,02	0,05	0,02
	6.2.1	6.2.5	7.1.2	7.1.3	7.1.4	7.2.2	9.3.1	9.3.2	9.3.5					
r_{xy}	0,17	0,19	0,19	0,16	0,16	0,18	0,18	0,19	0,19					
p	0,02	0,01	0,01	0,03	0,02	0,01	0,02	0,01	0,01					
r_{xy}^2	0,03	0,04	0,04	0,02	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03					

	2.1.5	2.1.6	2.2.1	3.1.1	3.1.3	3.1.4	3.1.5	4.1.3	4.1.4	6.1.1	6.1.6	7.1.6
2.1.3 r_{xy}	0,21	0,45	0,19	0,25	0,20	0,17	0,25	0,14	0,14	0,21	0,19	0,15
p	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,00	0,04	0,05	0,00	0,01	0,03
r_{xy}^2	0,04	0,20	0,04	0,06	0,04	0,03	0,06	0,02	0,02	0,04	0,04	0,02

	3.1.5	4.1.6	6.1.4	6.1.5	7.1.5	7.1.6
2.1.4 r_{xy}	0,21	0,20	0,15	0,26	0,14	0,15
p	0,00	0,00	0,03	0,00	0,05	0,03
r_{xy}^2	0,04	0,04	0,02	0,07	0,02	0,02

	3.1.2	3.1.3	3.1.4	3.1.5	3.1.6	4.1.2	4.1.3	4.1.4	6.1.2	6.1.4	6.2.3	6.2.4	6.2.5	7.1.5
2.1.5 r_{xy}	0,21	0,20	0,14	0,15	0,17	0,17	0,22	0,16	0,16	0,14	0,20	0,16	0,20	0,15
p	0,00	0,00	0,04	0,03	0,01	0,02	0,00	0,03	0,03	0,04	0,00	0,02	0,00	0,04
r_{xy}^2	0,04	0,04	0,02	0,02	0,03	0,03	0,05	0,02	0,02	0,02	0,04	0,03	0,04	0,02
	7.1.6	7.2.2	9.3.4	9.3.5										
r_{xy}	0,23	0,19	0,18	0,18										
p	0,00	0,01	0,01	0,01										
r_{xy}^2	0,05	0,03	0,03	0,03										

	2.2.1	2.2.2	3.1.3	3.1.4	3.1.5	3.1.6	4.1.3	4.1.4	4.1.5	4.1.6	4.2.2	6.1.3	6.1.4	6.1.6
2.1.6 r_{xy}	0,16	0,23	0,21	0,18	0,29	0,25	0,26	0,26	0,17	0,21	0,19	0,22	0,29	0,32
p	0,02	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,03	0,05	0,04	0,03	0,08	0,06	0,07	0,07	0,03	0,04	0,04	0,05	0,09	0,10
	7.1.3	7.1.4	7.1.5	7.1.6										
r_{xy}	0,16	0,16	0,19	0,23										
p	0,02	0,03	0,01	0,00										
r_{xy}^2	0,03	0,03	0,04	0,05										

	2.2.2	3.2.1	3.2.2	4.2.1	6.1.5	6.1.6	6.2.1	6.2.2	7.1.6	7.2.1	9.3.1	9.3.2
2.2.1 r_{xy}	0,71	0,44	0,40	0,21	0,14	0,18	0,49	0,36	0,16	0,23	0,47	0,39
p	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,01	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,50	0,20	0,16	0,04	0,02	0,03	0,24	0,13	0,03	0,05	0,22	0,15

	2.2.4	3.2.1	3.2.2	3.2.5	4.1.2	4.2.1	6.1.5	6.1.6	6.2.1	6.2.2	7.1.2	7.1.4	7.1.5	7.1.6
2.2.2 r_{xy}	-0,15	0,27	0,47	-0,14	0,14	0,19	0,17	0,19	0,36	0,46	0,14	0,16	0,18	0,23
p	0,02	0,00	0,00	0,04	0,04	0,01	0,02	0,01	0,00	0,00	0,05	0,03	0,01	0,00
r_{xy}^2	0,02	0,07	0,22	0,02	0,02	0,04	0,03	0,04	0,13	0,21	0,02	0,02	0,03	0,05
	7.2.1	9.3.1	9.3.2											
r_{xy}	0,21	0,31	0,38											
p	0,00	0,00	0,00											
r_{xy}^2	0,05	0,10	0,14											

	2.2.4	2.2.5	3.2.1	3.2.3	3.2.4	3.2.5	4.2.2	6.1.2	6.1.5	6.2.3	6.2.4	6.2.5	7.1.4	7.1.6
2.2.3 r_{xy}	0,48	0,14	0,17	0,36	0,33	0,20	0,26	0,20	-0,17	0,42	0,30	0,18	0,15	-0,15
p	0,00	0,05	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,02	0,00	0,00	0,01	0,03	0,04
r_{xy}^2	0,23	0,02	0,03	0,13	0,11	0,04	0,07	0,04	0,03	0,17	0,09	0,03	0,02	0,02
	7.2.2	9.3.3	9.3.4	9.3.5										
r_{xy}	0,36	0,42	0,40	0,23										
p	0,00	0,00	0,00	0,00										
r_{xy}^2	0,13	0,18	0,16	0,05										

	3.2.3	3.2.4	4.1.3	4.1.4	4.1.5	4.2.2	6.1.2	6.2.3	6.2.4	6.2.5	7.2.2	9.3.3	9.3.4	9.3.5
2.2.4 r_{xy}	0,28	0,42	0,18	0,19	0,19	0,24	0,22	0,43	0,48	0,19	0,32	0,39	0,46	0,22
p	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,08	0,17	0,03	0,04	0,04	0,06	0,05	0,18	0,23	0,03	0,11	0,15	0,21	0,05

	2.2.6	3.2.4	3.2.5	6.2.4	6.2.5	7.1.2	9.3.3	9.3.4	9.3.5
2.2.5 r_{xy}	0,26	0,14	0,46	0,16	0,47	0,15	0,18	0,23	0,54
p	0,00	0,04	0,00	0,02	0,00	0,04	0,01	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,07	0,02	0,21	0,03	0,22	0,02	0,03	0,05	0,29

	3.2.5	4.2.1	6.2.5	9.3.5
2.2.6 r_{xy}	0,32	0,14	0,29	0,30
p	0,00	0,05	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,10	0,02	0,08	0,09

	3.1.2	3.1.4	3.1.6	4.1.1	4.1.6	6.1.1	6.1.3	6.1.4	7.1.1	7.1.5
3.1.1 r_{xy}	-0,23	-0,28	-0,24	0,27	-0,18	0,57	-0,16	-0,25	0,39	-0,16
p	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,02	0,00	0,00	0,02
r_{xy}^2	0,05	0,08	0,06	0,07	0,03	0,32	0,03	0,06	0,15	0,03

	3.1.3	3.1.4	3.1.6	3.2.1	3.2.2	3.2.3	3.2.4	4.1.2	4.1.3	4.1.4	4.1.5	4.2.2	6.1.2	6.1.3
3.1.2 r_{xy}	0,22	0,35	0,21	0,16	0,16	0,22	0,25	0,34	0,16	0,18	0,16	0,21	0,33	0,26
p	0,00	0,00	0,00	0,02	0,02	0,00	0,00	0,00	0,02	0,01	0,03	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,05	0,12	0,04	0,03	0,02	0,05	0,06	0,11	0,03	0,03	0,02	0,05	0,11	0,07
	6.1.4	6.1.5	6.2.3	7.1.2	7.1.3	7.1.4	7.1.5	7.1.6	7.2.1	7.2.2	9.3.2	9.3.4		
r_{xy}	0,21	0,21	0,21	0,16	0,26	0,23	0,21	0,19	0,15	0,28	0,17	0,16		
p	0,00	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	0,00	0,01	0,03	0,00	0,02	0,03		
r_{xy}^2	0,04	0,05	0,05	0,02	0,07	0,05	0,05	0,04	0,02	0,08	0,03	0,03		

	3.1.4	3.1.5	3.1.6	3.2.3	3.2.5	4.1.2	4.1.3	4.1.4	4.1.5	4.1.6	6.1.3	6.1.4	6.1.6
3.1.3 r_{xy}	0,55	0,40	0,27	0,17	0,17	0,15	0,37	0,29	0,27	0,21	0,29	0,32	0,21
p	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,30	0,16	0,07	0,03	0,03	0,02	0,14	0,08	0,08	0,04	0,09	0,10	0,04

	3.1.5	3.1.6	3.2.3	3.2.4	3.2.5	4.1.1	4.1.2	4.1.3	4.1.4	4.1.5	4.1.6	6.1.1	6.1.3	6.1.4
3.1.4 r_{xy}	0,39	0,44	0,15	0,15	0,18	-0,25	0,27	0,36	0,40	0,34	0,32	-0,21	0,35	0,42
p	0,00	0,00	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,16	0,19	0,02	0,02	0,03	0,06	0,07	0,13	0,16	0,12	0,10	0,05	0,12	0,17
	6.1.5	6.1.6	7.1.3	7.1.4	7.1.5	7.1.6	9.3.2							
r_{xy}	0,25	0,28	0,35	0,34	0,29	0,21	0,15							
p	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04							
r_{xy}^2	0,06	0,08	0,12	0,11	0,09	0,04	0,02							

	3.1.6	4.1.3	4.1.4	4.1.5	4.1.6	4.2.2	6.1.3	6.1.4	6.1.5	6.1.6	7.1.3	7.1.4	7.1.5	7.1.6
3.1.5 r_{xy}	0,67	0,39	0,32	0,42	0,28	0,15	0,36	0,38	0,18	0,42	0,20	0,24	0,23	0,25
p	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	0,01	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,45	0,15	0,10	0,18	0,08	0,02	0,13	0,14	0,03	0,18	0,04	0,06	0,05	0,06

	3.2.3	4.1.1	4.1.2	4.1.3	4.1.4	4.1.5	4.1.6	6.1.1	6.1.3	6.1.4	6.1.5	6.1.6	7.1.3	7.1.4
3.1.6 r_{xy}	0,16	-0,17	0,18	0,29	0,30	0,32	0,34	-0,28	0,31	0,41	0,22	0,42	0,29	0,27
p	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,03	0,03	0,03	0,09	0,09	0,11	0,11	0,08	0,10	0,17	0,05	0,17	0,08	0,07
	7.1.5	7.1.6												
r_{xy}	0,26	0,31												
p	0,00	0,00												
r_{xy}^2	0,07	0,10												

	3.2.2	4.1.2	4.1.3	4.1.4	4.2.1	4.2.2	6.2.1	6.2.2	7.2.1	7.2.2	9.3.1	9.3.2	9.3.3
3.2.1 r_{xy}	0,67	0,23	0,15	0,15	0,20	0,18	0,48	0,34	0,25	0,28	0,53	0,35	0,14
p	0,00	0,00	0,03	0,03	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05
r_{xy}^2	0,45	0,05	0,02	0,02	0,04	0,03	0,23	0,12	0,06	0,08	0,28	0,12	0,02

	3.2.5	4.1.2	4.1.4	4.1.6	4.2.2	6.1.3	6.1.5	6.2.1	6.2.2	7.1.3	7.1.4	7.1.6	7.2.1	7.2.2
3.2.2 r_{xy}	-0,16	0,19	0,17	0,14	0,16	0,16	0,23	0,37	0,54	0,17	0,18	0,16	0,19	0,21
p	0,02	0,01	0,02	0,04	0,02	0,03	0,00	0,00	0,00	0,02	0,01	0,03	0,01	0,00
r_{xy}^2	0,03	0,04	0,03	0,02	0,03	0,02	0,05	0,14	0,29	0,03	0,03	0,02	0,04	0,05
	9.3.1	9.3.2	9.3.3											
r_{xy}	0,40	0,51	0,14											
p	0,00	0,00	0,05											
r_{xy}^2	0,16	0,26	0,02											

	3.2.4	3.2.5	4.1.2	4.1.3	4.1.4	4.1.5	4.2.2	6.1.2	6.2.3	6.2.4	6.2.5	7.1.4	7.2.2	9.3.3
3.2.3 r_{xy}	0,69	0,24	0,21	0,16	0,16	0,14	0,29	0,29	0,57	0,50	0,24	0,15	0,32	0,57
p	0,00	0,00	0,00	0,03	0,02	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,47	0,06	0,04	0,02	0,02	0,02	0,08	0,09	0,33	0,25	0,06	0,02	0,10	0,33
	9.3.4	9.3.5												
r_{xy}	0,48	0,24												
p	0,00	0,00												
r_{xy}^2	0,23	0,06												

	3.2.5	4.1.2	4.1.3	4.1.4	4.2.2	6.1.2	6.2.3	6.2.4	6.2.5	7.1.5	7.2.2	9.3.3	9.3.4	9.3.5
3.2.4 r_{xy}	0,26	0,20	0,18	0,21	0,26	0,26	0,52	0,62	0,27	0,19	0,30	0,46	0,54	0,26
p	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,07	0,04	0,03	0,04	0,07	0,07	0,27	0,38	0,07	0,03	0,09	0,21	0,29	0,07

	4.1.3	4.1.4	6.1.2	6.2.3	6.2.4	6.2.5	7.2.2	9.3.3	9.3.4	9.3.5
3.2.5 r_{xy}	0,16	0,17	0,17	0,18	0,15	0,62	0,19	0,19	0,19	0,67
p	0,02	0,01	0,01	0,01	0,03	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00
r_{xy}^2	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,39	0,04	0,04	0,04	0,45

	4.1.2	4.1.3	4.1.4	4.1.5	4.1.6	4.2.1	4.2.2	6.1.1	6.1.3	6.1.4	7.1.1	7.1.2	7.1.3	7.1.4
4.1.1 r_{xy}	-0,27	-0,37	-0,45	-0,34	-0,39	0,28	-0,27	0,25	-0,24	-0,24	0,62	0,27	-0,39	-0,37
p	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,07	0,14	0,20	0,12	0,15	0,08	0,07	0,06	0,06	0,06	0,39	0,07	0,15	0,14
	7.1.5	7.1.6	7.2.1	7.2.2										
r_{xy}	-0,25	-0,28	0,23	-0,31										
p	0,00	0,00	0,00	0,00										
r_{xy}^2	0,06	0,08	0,05	0,09										

	4.1.3	4.1.4	4.1.5	4.1.6	4.2.2	6.1.2	6.1.3	6.2.3	7.1.2	7.1.3	7.1.4	7.1.5	7.2.2	9.3.3
4.1.2 r_{xy}	0,53	0,57	0,19	0,29	0,35	0,28	0,29	0,16	0,20	0,31	0,25	0,29	0,31	0,23
p	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,28	0,33	0,04	0,09	0,12	0,08	0,09	0,03	0,04	0,10	0,06	0,09	0,09	0,05
	9.3.4													
r_{xy}	0,18													
p	0,01													
r_{xy}^2	0,03													

	4.1.4	4.1.5	4.1.6	4.2.1	4.2.2	6.1.3	6.1.4	6.1.5	6.1.6	6.2.3	6.2.5	7.1.1	7.1.3	7.1.4
4.1.3 r_{xy}	0,76	0,52	0,48	-0,18	0,28	0,38	0,26	0,25	0,22	0,16	0,19	-0,28	0,37	0,36
p	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,58	0,27	0,23	0,03	0,08	0,14	0,07	0,06	0,05	0,02	0,04	0,08	0,14	0,13
	7.1.5	7.1.6	7.2.2	9.3.4	9.3.5									
r_{xy}	0,29	0,27	0,25	0,20	0,21									
p	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00									
r_{xy}^2	0,08	0,07	0,06	0,04	0,04									

	4.1.5	4.1.6	4.2.1	4.2.2	6.1.2	6.1.3	6.1.4	6.1.5	6.1.6	6.2.3	6.2.5	7.1.1	7.1.3	7.1.4
4.1.4 r_{xy}	0,58	0,64	-0,14	0,36	0,18	0,40	0,37	0,22	0,24	0,14	0,20	-0,27	0,40	0,42
p	0,00	0,00	0,05	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,34	0,40	0,02	0,13	0,03	0,16	0,14	0,05	0,06	0,02	0,04	0,07	0,16	0,17
	7.1.5	7.1.6	7.2.2	9.3.4	9.3.5									
r_{xy}	0,31	0,24	0,28	0,18	0,20									
p	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00									
r_{xy}^2	0,09	0,06	0,08	0,03	0,04									

	4.1.6	4.2.1	4.2.2	6.1.3	6.1.4	6.1.6	6.2.2	7.1.1	7.1.2	7.1.3	7.1.4	7.1.5	7.1.6	7.2.2
4.1.5 r_{xy}	0,73	-0,17	0,23	0,28	0,32	0,24	-0,14	-0,21	-0,14	0,39	0,48	0,27	0,28	0,18
p	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05	0,00	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01
r_{xy}^2	0,53	0,03	0,05	0,08	0,10	0,06	0,02	0,04	0,02	0,15	0,23	0,08	0,08	0,03

	4.2.2	6.1.1	6.1.3	6.1.4	6.1.5	6.1.6	7.1.1	7.1.3	7.1.4	7.1.5	7.1.6
4.1.6 r_{xy}	0,18	-0,14	0,26	0,41	0,20	0,27	-0,17	0,34	0,42	0,27	0,32
p	0,01	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,03	0,02	0,07	0,17	0,04	0,07	0,03	0,11	0,18	0,07	0,10

	6.1.3	6.2.1	6.2.2	7.1.1	7.1.2	7.2.1	9.3.1	9.3.3
4.2.1 r_{xy}	-0,14	0,26	0,22	0,22	0,21	0,66	0,21	0,19
p	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01
r_{xy}^2	0,02	0,07	0,05	0,05	0,04	0,44	0,04	0,04

	6.1.2	6.1.3	6.2.3	6.2.4	6.2.5	7.1.1	7.1.3	7.1.4	7.1.5	7.1.6	7.2.2	9.3.1	9.3.2	9.3.3
4.2.2 r_{xy}	0,22	0,22	0,34	0,35	0,24	-0,21	0,29	0,20	0,20	0,15	0,78	0,17	0,19	0,29
p	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,04	0,00	0,02	0,01	0,00
r_{xy}^2	0,05	0,05	0,11	0,12	0,06	0,05	0,09	0,04	0,04	0,02	0,61	0,03	0,04	0,08
	9.3.4	9.3.5												
r_{xy}	0,29	0,21												
p	0,00	0,00												
r_{xy}^2	0,08	0,05												

	6.1.2	6.1.3	6.1.4	6.1.5	6.1.6	7.1.1	7.1.5
6.1.1 r_{xy}	0,21	-0,28	-0,38	-0,25	-0,36	0,37	-0,17
p	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02
r_{xy}^2	0,05	0,08	0,14	0,06	0,13	0,14	0,03

	6.1.3	6.1.6	6.2.3	6.2.4	7.1.2	7.1.3	7.1.5	7.2.2	9.3.3	9.3.4
6.1.2 r_{xy}	0,22	-0,17	0,38	0,32	0,25	0,20	0,18	0,28	0,31	0,22
p	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,05	0,03	0,14	0,10	0,06	0,04	0,03	0,08	0,09	0,05

	6.1.4	6.1.5	6.1.6	7.1.1	7.1.3	7.1.4	7.1.5	7.1.6	7.2.1	7.2.2
6.1.3 r_{xy}	0,53	0,31	0,28	-0,20	0,35	0,27	0,34	0,19	-0,15	0,19
p	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01	0,03	0,01
r_{xy}^2	0,28	0,10	0,08	0,04	0,12	0,07	0,12	0,04	0,02	0,03

	6.1.5	6.1.6	7.1.3	7.1.4	7.1.5	7.1.6
6.1.4 r_{xy}	0,25	0,44	0,26	0,31	0,28	0,21
p	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,06	0,19	0,07	0,10	0,08	0,04

	6.1.6	7.1.3	7.1.4	7.1.5	7.1.6
6.1.5 r_{xy}	0,31	0,19	0,19	0,40	0,37
p	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,09	0,03	0,04	0,16	0,13

	7.1.3	7.1.4	7.1.5	7.1.6
6.1.6 r_{xy}	0,20	0,25	0,24	0,38
p	0,00	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,04	0,06	0,06	0,15

	6.2.2	6.2.5	7.1.2	7.2.1	7.2.2	9.3.1	9.3.2
6.2.1 r_{xy}	0,80	-0,16	0,18	0,29	0,18	0,58	0,52
p	0,00	0,02	0,01	0,00	0,01	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,65	0,03	0,03	0,08	0,03	0,34	0,27

	7.1.2	7.1.5	7.2.1	7.2.2	9.3.1	9.3.2
6.2.2 r_{xy}	0,19	0,15	0,26	0,15	0,51	0,64
p	0,01	0,04	0,00	0,03	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,03	0,02	0,07	0,02	0,26	0,41

	6.2.4	6.2.5	7.1.3	7.1.5	7.2.1	7.2.2	9.3.3	9.3.4	9.3.5
6.2.3 r_{xy}	0,78	0,30	0,24	0,17	0,15	0,41	0,65	0,62	0,24
p	0,00	0,00	0,00	0,02	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,61	0,09	0,06	0,03	0,02	0,17	0,42	0,38	0,06

	6.2.5	7.1.2	7.1.3	7.2.2	9.3.3	9.3.4	9.3.5
6.2.4 r_{xy}	0,35	0,15	0,16	0,35	0,54	0,69	0,23
p	0,00	0,04	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,12	0,02	0,03	0,12	0,29	0,47	0,05

	7.2.2	9.3.3	9.3.4	9.3.5
6.2.5 r_{xy}	0,23	0,22	0,24	0,73
p	0,00	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,05	0,05	0,06	0,54

	7.1.2	7.1.3	7.1.4	7.1.5	7.1.6	7.2.1	7.2.2
7.1.1 r_{xy}	0,47	-0,27	-0,24	-0,22	-0,29	0,26	-0,23
p	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,22	0,07	0,06	0,05	0,08	0,07	0,05

	7.1.5	7.1.6	7.2.1	9.3.3	9.3.4
7.1.2 r_{xy}	-0,17	-0,15	0,25	0,18	0,14
p	0,02	0,04	0,00	0,01	0,05
r_{xy}^2	0,03	0,02	0,06	0,03	0,02

	7.1.4	7.1.5	7.1.6	7.2.2	9.3.3	9.3.4
7.1.3 r_{xy}	0,78	0,42	0,43	0,31	0,18	0,19
p	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01
r_{xy}^2	0,61	0,17	0,19	0,10	0,03	0,04

	7.1.5	7.1.6	7.2.2
7.1.4 r_{xy}	0,36	0,46	0,20
p	0,00	0,00	0,01
r_{xy}^2	0,13	0,21	0,04

	7.1.6	7.2.2	9.3.3	9.3.4
7.1.5 r_{xy}	0,53	0,19	0,23	0,20
p	0,00	0,01	0,00	0,01
r_{xy}^2	0,28	0,04	0,05	0,04

	9.3.2
7.1.6 r_{xy}	0,16
p	0,03
r_{xy}^2	0,02

	9.3.1	9.3.2	9.3.3	9.3.4
7.2.1 r_{xy}	0,27	0,26	0,24	0,16
p	0,00	0,00	0,00	0,02
r_{xy}^2	0,08	0,07	0,06	0,03

	9.3.1	9.3.2	9.3.3	9.3.4	9.3.5
7.2.2 r_{xy}	0,20	0,21	0,34	0,34	0,27
p	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,04	0,04	0,12	0,12	0,07

	9.3.2	9.3.5
9.3.1 r_{xy}	0,74	-0,14
p	0,00	0,05
r_{xy}^2	0,55	0,02

	9.3.4	9.3.5
9.3.3 r_{xy}	0,79	0,29
p	0,00	0,00
r_{xy}^2	0,62	0,08

	9.3.5
9.3.4 r_{xy}	0,34
p	0,00
r_{xy}^2	0,11

Criterio de colores para la identificación de correlaciones

Coef. de determinación entre 0,10 y 0,19
Coef. de determinación entre 0,20 y 0,29
Coef. de determinación entre 0,30 y 0,39
Coef. de determinación entre 0,40 y 0,49
Coef. de determinación entre 0,50 y 0,59
Coef. de determinación entre 0,60 y 0,69

5.3.1.5 Tablas cruzadas

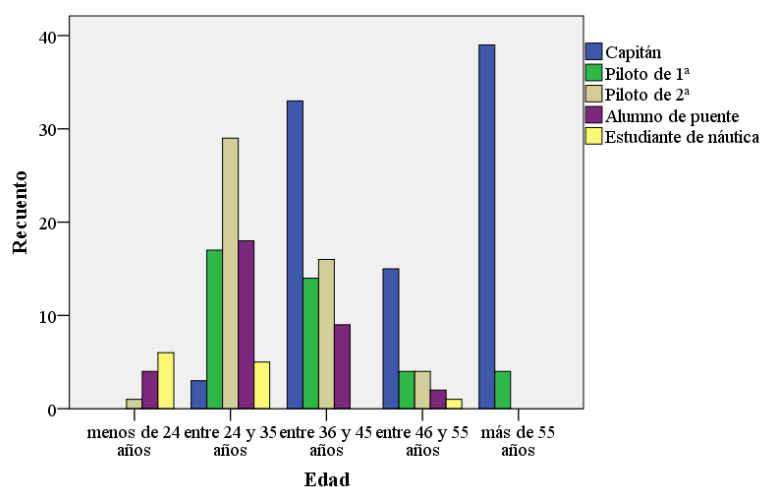
Para analizar la relación entre las variables categóricas independientes y las dependientes se recurrirá a las tablas cruzadas donde se relacione cada una de las primeras con las segundas, así como referenciarlas en forma de gráficos de barras asociadas.

Para no sobrecargar de información superflua el estudio, sólo se considerarán como variables independientes la edad, la titulación profesional, la experiencia en navegación y la experiencia en el uso de cartas de navegación electrónica, descartando así el idioma y el sexo, ya que no se consideran de interés para los fines perseguidos.

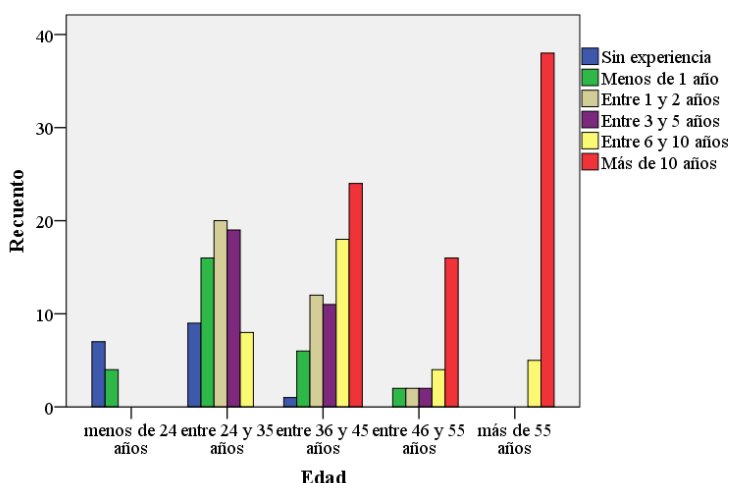
También se incluirán las tablas cruzadas entre las variables independientes, ya que resultarán útiles para ver la distribución de la muestra en subgrupos y la relación entre ellos, especialmente a la hora de plantear estudios futuros de este tipo.

5.3.1.5.1 Recuentos y gráficos de barras asociadas en función de la edad

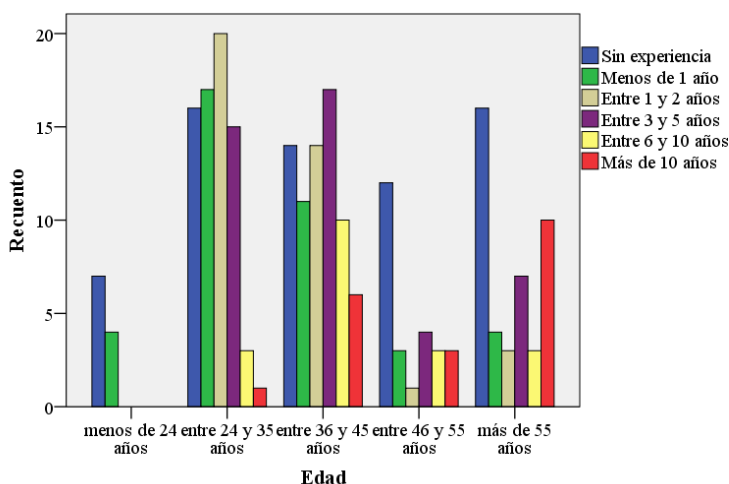
	Titulación					Total
	Capitán	Piloto de 1ª	Piloto de 2ª	Alumno	Estudiante	
Edad menos de 24 años	0	0	1	4	6	11
entre 24 y 35 años	3	17	29	18	5	72
entre 36 y 45 años	33	14	16	9	0	72
entre 46 y 55 años	15	4	4	2	1	26
más de 55 años	39	4	0	0	0	43
Total	90	39	50	33	12	224



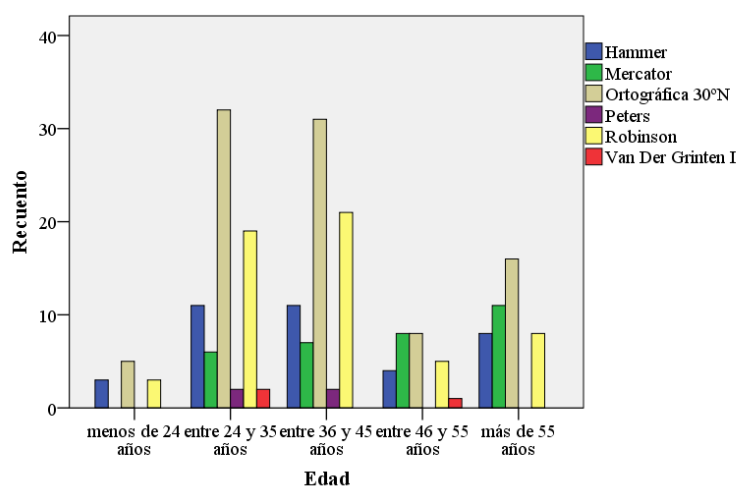
		Experiencia en navegación						Total
		Sin experiencia	Menos de 1 año	Entre 1 y 2 años	Entre 3 y 5 años	Entre 6 y 10 años	Más de 10 años	
Edad	menos de 24 años	7	4	0	0	0	0	11
	entre 24 y 35 años	9	16	20	19	8	0	72
	entre 36 y 45 años	1	6	12	11	18	24	72
	entre 46 y 55 años	0	2	2	2	4	16	26
	más de 55 años	0	0	0	0	5	38	43
Total		17	28	34	32	35	78	224



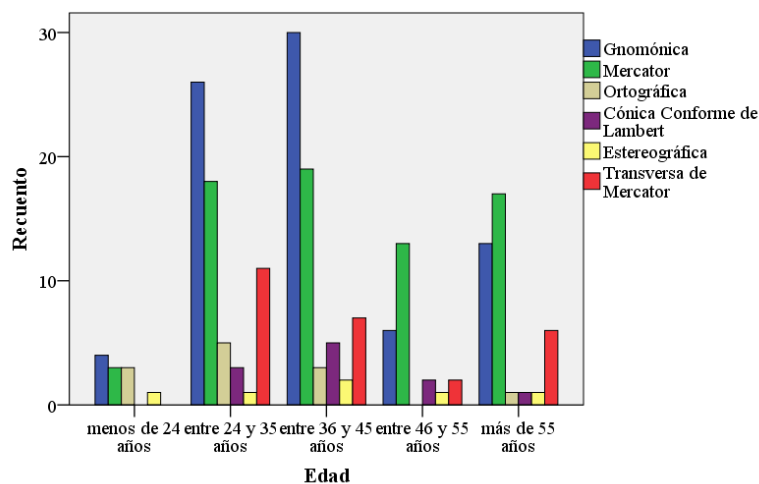
		Experiencia ECDIS						Total
		Sin experiencia	Menos de 1 año	Entre 1 y 2 años	Entre 3 y 5 años	Entre 6 y 10 años	Más de 10 años	
Edad	menos de 24 años	7	4	0	0	0	0	11
	entre 24 y 35 años	16	17	20	15	3	1	72
	entre 36 y 45 años	14	11	14	17	10	6	72
	entre 46 y 55 años	12	3	1	4	3	3	26
	más de 55 años	16	4	3	7	3	10	43
Total		65	39	38	43	19	20	224



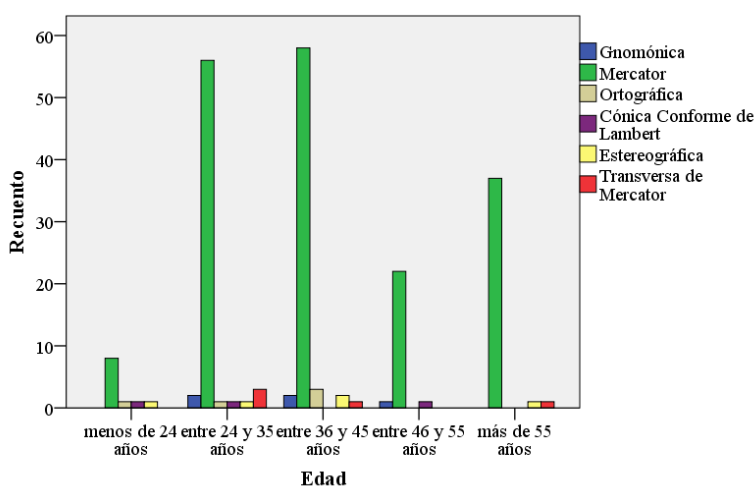
		1.1Cuál de las siguientes representaciones cartográficas se asemeja más a la imagen mental que tienes de la configuración de la superficie terrestre						Total
		Hammer	Mercator	Ortográf. 30°N	Peters	Robinson	Van Der Grinten I	
Edad	menos de 24 años	3	0	5	0	3	0	11
	entre 24 y 35 años	11	6	32	2	19	2	72
	entre 36 y 45 años	11	7	31	2	21	0	72
	entre 46 y 55 años	4	8	8	0	5	1	26
	más de 55 años	8	11	16	0	8	0	43
Total		37	32	92	4	56	3	224



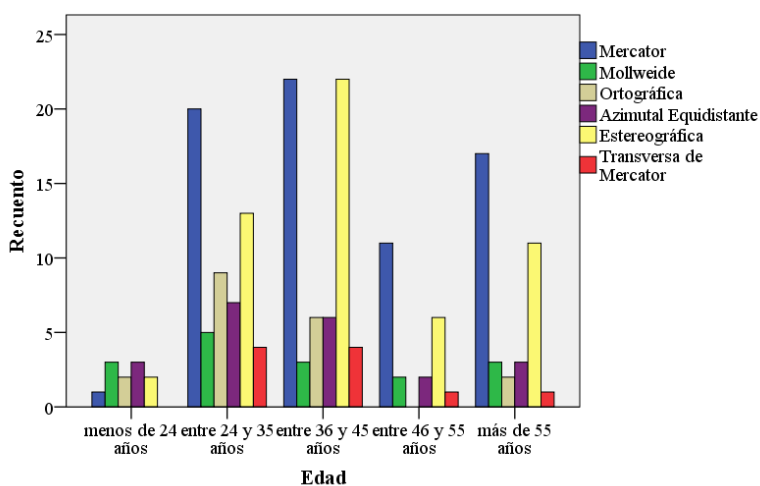
		5.1 Qué carta del Atlántico Norte es la más útil para planificar una ortodrómica						Total
		Gnomón.	Mercator	Ortográf.	Cón.Con. Lambert	Estereogr.	Transversa Mercator	
Edad	menos de 24 años	4	3	3	0	1	0	11
	entre 24 y 35 años	26	18	5	3	1	11	64
	entre 36 y 45 años	30	19	3	5	2	7	66
	entre 46 y 55 años	6	13	0	2	1	2	24
	más de 55 años	13	17	1	1	1	6	39
Total		79	70	12	11	6	26	204



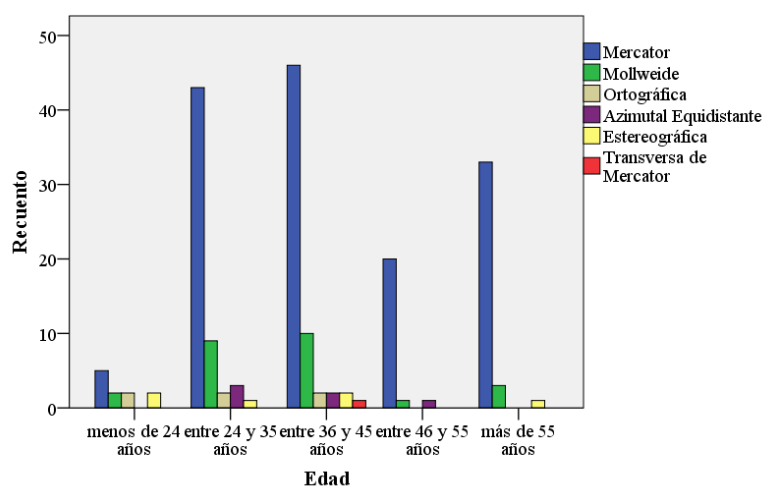
	5.2 Qué carta del Atlántico Norte es la más útil para planificar una loxodrómica						Total
	Gnomón.	Mercator	Ortográf.	Cón.Con. Lambert	Estereogr.	Transversa Mercator	
Edad menos de 24 años	0	8	1	1	1	0	11
entre 24 y 35 años	2	56	1	1	1	3	64
entre 36 y 45 años	2	58	3	0	2	1	66
entre 46 y 55 años	1	22	0	1	0	0	24
más de 55 años	0	37	0	0	1	1	39
Total	5	181	5	3	5	5	204



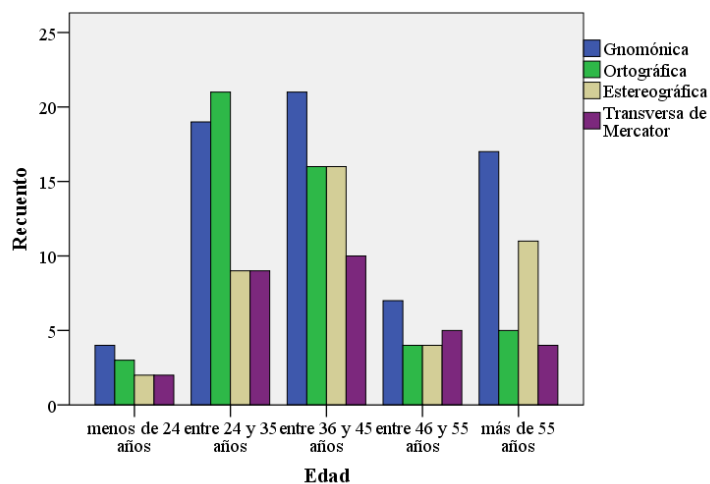
	8.1 Qué carta del océano Pacífico es la más útil para planificar una ortodrómica						Total
	Mercator	Mollweide	Ortográf.	Acimutal Equidis.	Estereogr.	Transversa Mercator	
Edad menos de 24 años	1	3	2	3	2	0	11
entre 24 y 35 años	20	5	9	7	13	4	58
entre 36 y 45 años	22	3	6	6	22	4	63
entre 46 y 55 años	11	2	0	2	6	1	22
más de 55 años	17	3	2	3	11	1	37
Total	71	16	19	21	54	10	191



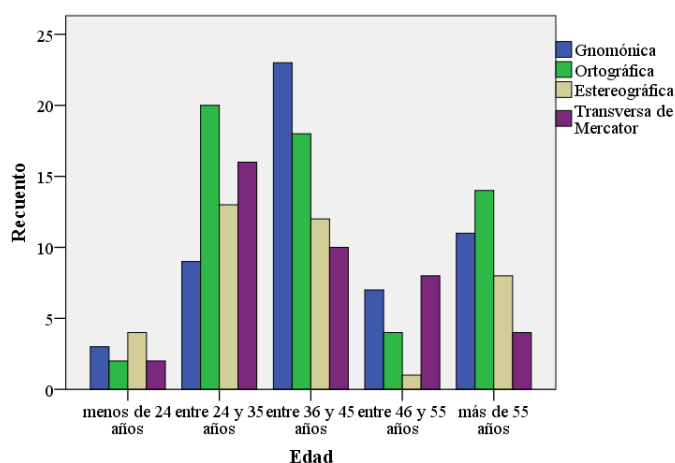
	8.2 Qué carta del océano Pacífico es la más útil para planificar una loxodrómica						Total
	Mercator	Mollweide	Ortográf.	Acimutal Equidis.	Estereogr.	Transversa Mercator	
Edad menos de 24 años	5	2	2	0	2	0	11
entre 24 y 35 años	43	9	2	3	1	0	58
entre 36 y 45 años	46	10	2	2	2	1	63
entre 46 y 55 años	20	1	0	1	0	0	22
más de 55 años	33	3	0	0	1	0	37
Total	147	25	6	6	6	1	191



	9.1 Qué carta es la más útil para representar la realidad geográfica de la zona entre Tierra de Fuego y el cabo de Buena Esperanza				Total
	Gnomónica	Ortográfica	Estereográfica	Transversa Mercator	
Edad menos de 24 años	4	3	2	2	11
entre 24 y 35 años	19	21	9	9	58
entre 36 y 45 años	21	16	16	10	63
entre 46 y 55 años	7	4	4	5	20
más de 55 años	17	5	11	4	37
Total	68	49	42	30	189

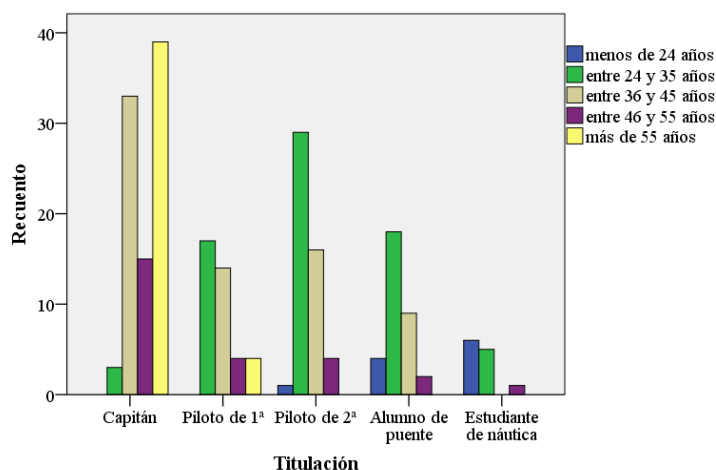


	9.2 Qué carta es la más útil para representar la realidad geográfica de la zona de las islas Aleutianas y el estrecho de Bering				Total
	Gnomónica	Ortográfica	Estereográfica	Transversa Mercator	
Edad menos de 24 años	3	2	4	2	11
entre 24 y 35 años	9	20	13	16	58
entre 36 y 45 años	23	18	12	10	63
entre 46 y 55 años	7	4	1	8	20
más de 55 años	11	14	8	4	37
Total	53	58	38	40	189

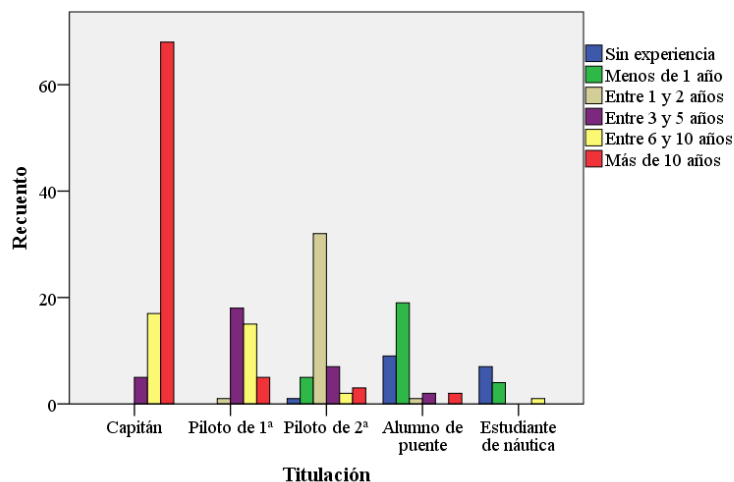


5.3.1.5.2 Recuentos y gráficos de barras asociadas en función de la titulación profesional

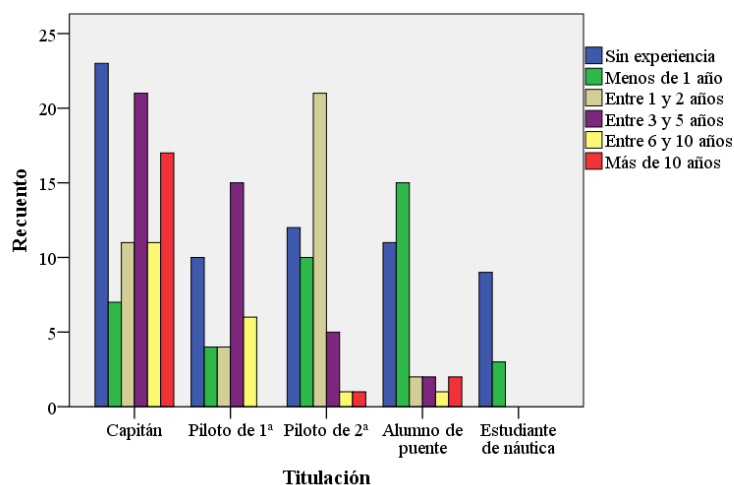
	Edad					Total
	menos de 24 años	entre 24 y 35 años	entre 36 y 45 años	entre 46 y 55 años	más de 55 años	
Titulación Profesional Capitán	0	3	33	15	39	90
Piloto de 1ª	0	17	14	4	4	39
Piloto de 2ª	1	29	16	4	0	50
Alumno	4	18	9	2	0	33
Estudiante	6	5	0	1	0	12
Total	11	72	72	26	43	224



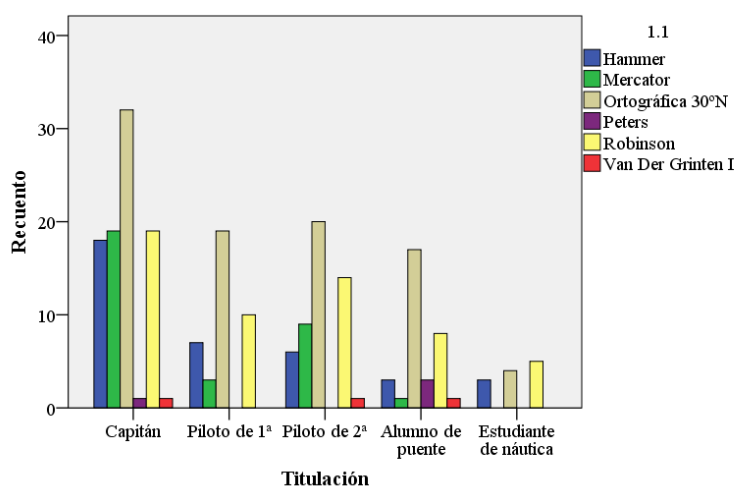
		Experiencia en navegación						Total
		Sin experiencia	Menos de 1 año	Entre 1 y 2 años	Entre 3 y 5 años	Entre 6 y 10 años	Más de 10 años	
Titulación Profesional	Capitán	0	0	0	5	17	68	90
	Piloto de 1ª	0	0	1	18	15	5	39
	Piloto de 2ª	1	5	32	7	2	3	50
	Alumno	9	19	1	2	0	2	33
	Estudiante	7	4	0	0	1	0	12
Total		17	28	34	32	35	78	224



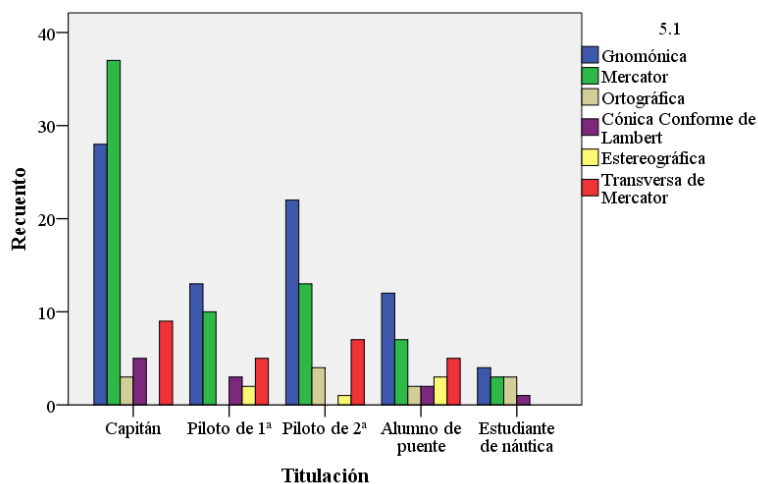
		Experiencia ECDIS						Total
		Sin experiencia	Menos de 1 año	Entre 1 y 2 años	Entre 3 y 5 años	Entre 6 y 10 años	Más de 10 años	
Titulación Profesional	Capitán	23	7	11	21	11	17	90
	Piloto de 1ª	10	4	4	15	6	0	39
	Piloto de 2ª	12	10	21	5	1	1	50
	Alumno	11	15	2	2	1	2	33
	Estudiante	9	3	0	0	0	0	12
Total		65	39	38	43	19	20	224



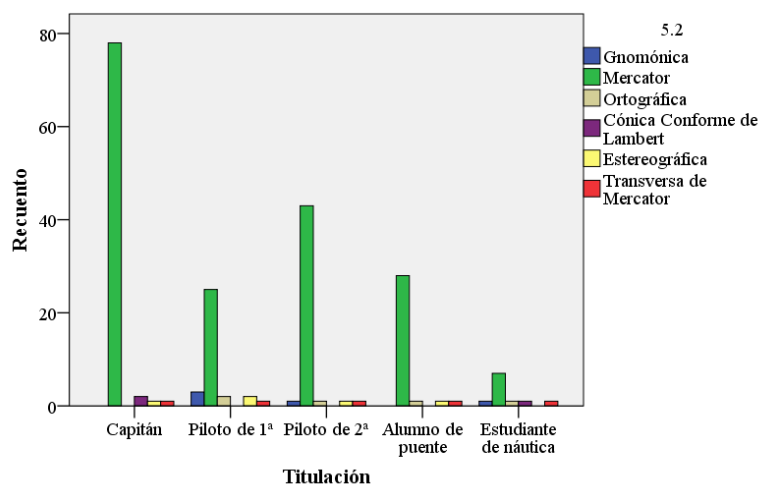
		1.1 Cuál de las siguientes representaciones cartográficas se asemeja más a la imagen mental que tienes de la configuración de la superficie terrestre						Total
		Hammer	Mercator	Ortográf. 30°N	Peters	Robinson	Van Der Grinten I	
Titulación Profesional	Capitán	18	19	32	1	19	1	90
	Piloto de 1ª	7	3	19	0	10	0	39
	Piloto de 2ª	6	9	20	0	14	1	50
	Alumno	3	1	17	3	8	1	33
	Estudiante	3	0	4	0	5	0	12
Total		37	32	92	4	56	3	224



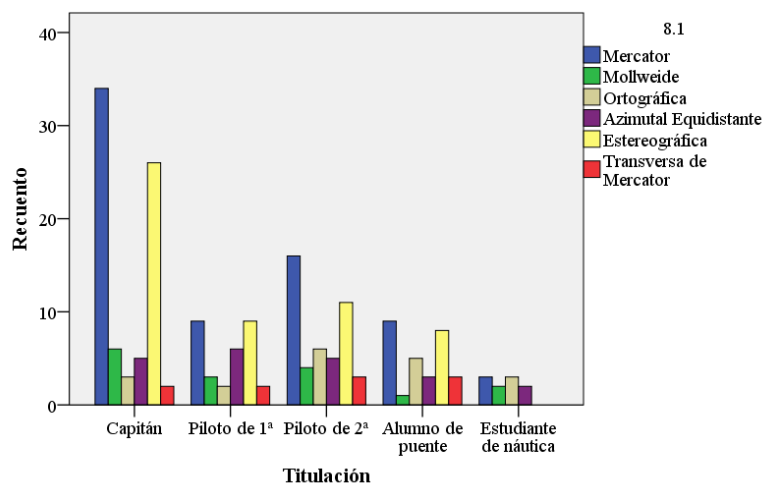
		5.1 Qué carta del Atlántico Norte es la más útil para planificar una ortodrómica						Total
		Gnomón.	Mercator	Ortográf.	Cón.Con. Lambert	Estereogr.	Transversa Mercator	
Titulación Profesional	Capitán	28	37	3	5	0	9	82
	Piloto de 1ª	13	10	0	3	2	5	33
	Piloto de 2ª	22	13	4	0	1	7	47
	Alumno	12	7	2	2	3	5	31
	Estudiante	4	3	3	1	0	0	11
Total		79	70	12	11	6	26	204



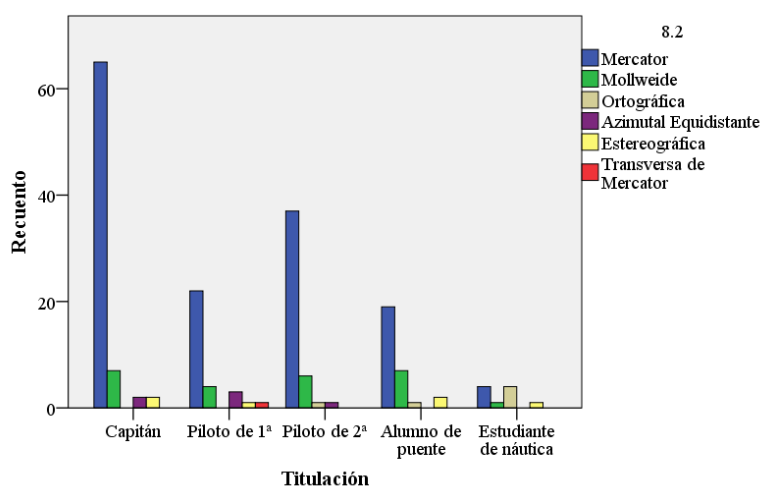
		5.2 Qué carta del Atlántico Norte es la más útil para planificar una loxodrómica						Total
		Gnomón.	Mercator	Ortográf.	Cón.Con. Lambert	Estereogr.	Transversa Mercator	
Titulación Profesional	Capitán	0	78	0	2	1	1	82
	Piloto de 1ª	3	25	2	0	2	1	33
	Piloto de 2ª	1	43	1	0	1	1	47
	Alumno	0	28	1	0	1	1	31
	Estudiante	1	7	1	1	0	1	11
Total		5	181	5	3	5	5	204



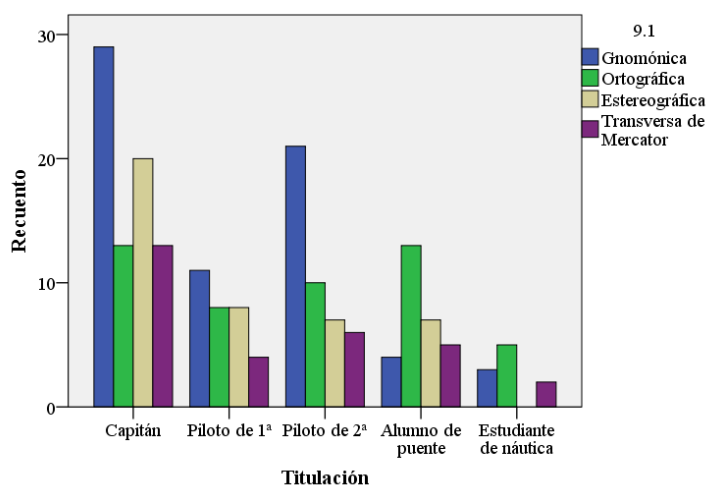
		8.1 Qué carta del océano Pacífico es la más útil para planificar una ortodrómica						Total
		Mercator	Mollweide	Ortográf.	Acimutal Equidis.	Estereogr.	Transversa Mercator	
Titulación Profesional	Capitán	34	6	3	5	26	2	76
	Piloto de 1ª	9	3	2	6	9	2	31
	Piloto de 2ª	16	4	6	5	11	3	45
	Alumno	9	1	5	3	8	3	29
	Estudiante	3	2	3	2	0	0	10
Total		71	16	19	21	54	10	191



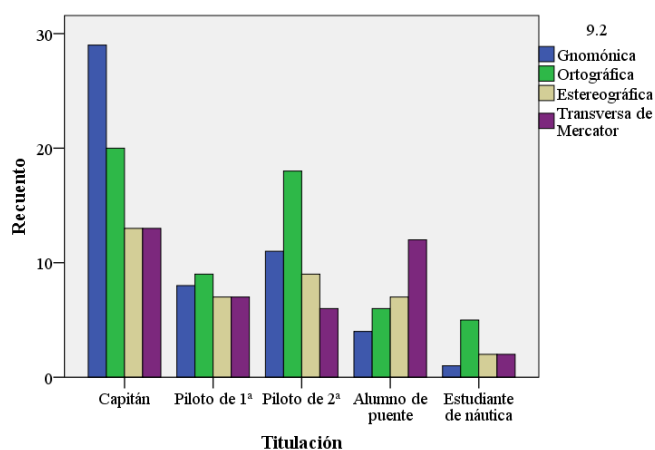
		8.2 Qué carta del océano Pacífico es la más útil para planificar una loxodrómica						Total
		Mercator	Mollweide	Ortográf.	Acimutal Equidis.	Estereogr.	Transversa Mercator	
Titulación Profesional	Capitán	65	7	0	2	2	0	76
	Piloto de 1ª	22	4	0	3	1	1	31
	Piloto de 2ª	37	6	1	1	0	0	45
	Alumno	19	7	1	0	2	0	29
	Estudiante	4	1	4	0	1	0	10
Total		147	25	6	6	6	1	191



		9.1 Qué carta es la más útil para representar la realidad geográfica de la zona entre Tierra de Fuego y el cabo de Buena Esperanza				Total
		Gnomónica	Ortográfica	Estereográfica	Transversa Mercator	
Titulación Profesional	Capitán	29	13	20	13	75
	Piloto de 1ª	11	8	8	4	31
	Piloto de 2ª	21	10	7	6	44
	Alumno	4	13	7	5	29
	Estudiante	3	5	0	2	10
Total		68	49	42	30	189

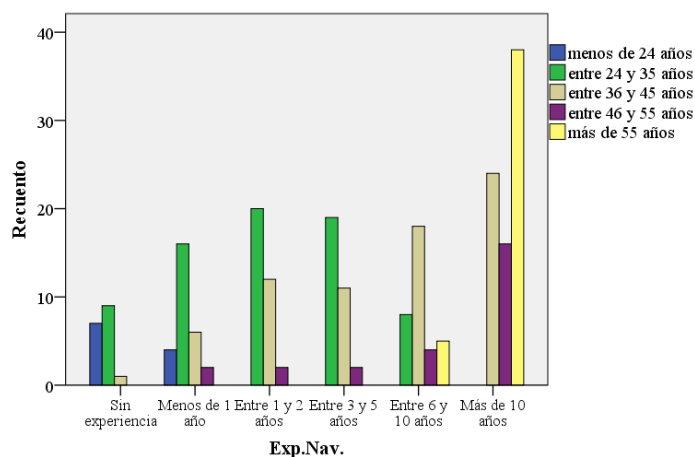


		9.2 Qué carta es la más útil para representar la realidad geográfica de la zona de las islas Aleutianas y el estrecho de Bering				Total
		Gnomónica	Ortográfica	Estereográfica	Transversa Mercator	
Titulación Profesional	Capitán	29	20	13	13	75
	Piloto de 1ª	8	9	7	7	31
	Piloto de 2ª	11	18	9	6	44
	Alumno	4	6	7	12	29
	Estudiante	1	5	2	2	10
Total		53	58	38	40	189

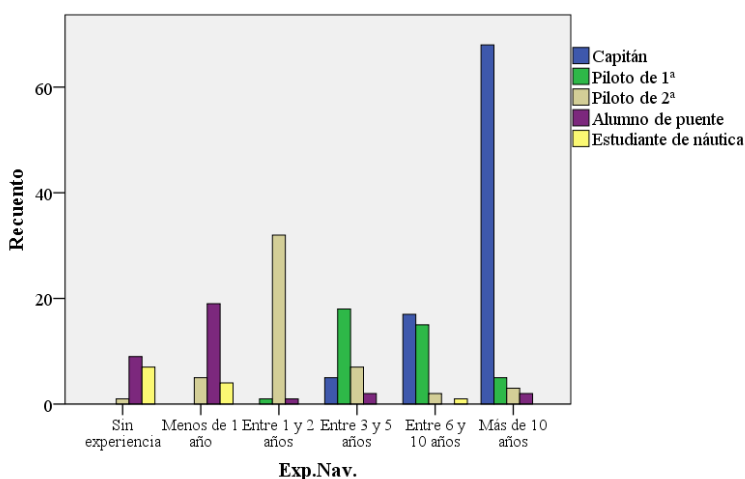


5.3.1.5.3 Recuentos y gráficos de barras asociadas en función de la experiencia en navegación

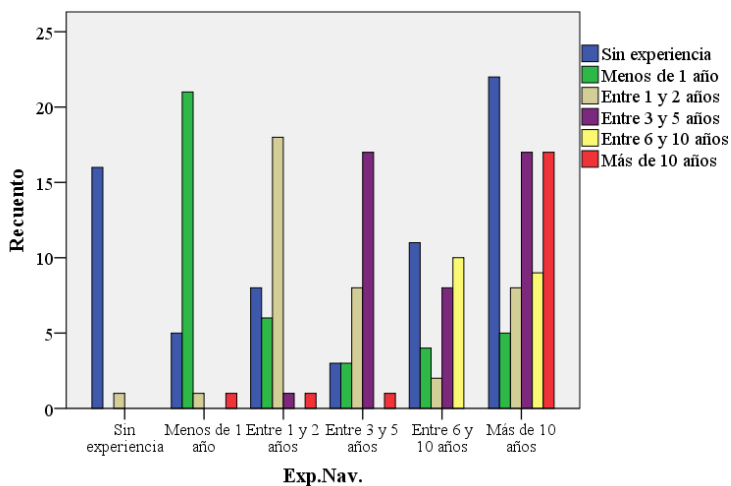
		Edad					Total
		menos de 24 años	entre 24 y 35 años	entre 36 y 45 años	entre 46 y 55 años	más de 55 años	
Años de experiencia en navegación	Sin experiencia	7	9	1	0	0	17
	Menos de 1 año	4	16	6	2	0	28
	Entre 1 y 2 años	0	20	12	2	0	34
	Entre 3 y 5 años	0	19	11	2	0	32
	Entre 6 y 10 años	0	8	18	4	5	35
	Más de 10 años	0	0	24	16	38	78
Total		11	72	72	26	43	224



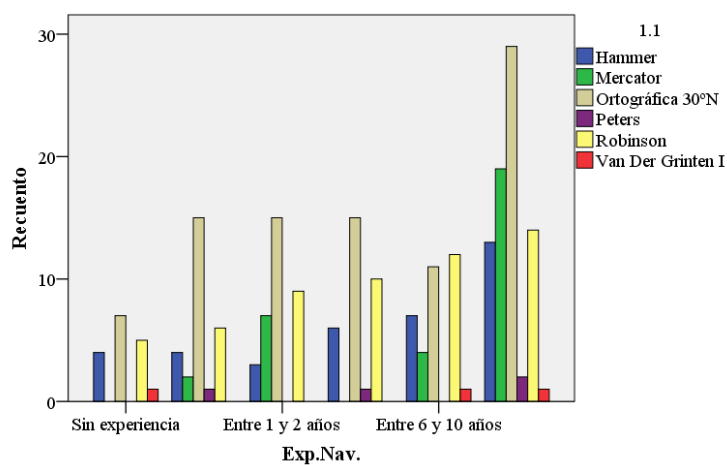
		Titulación					Total
		Capitán	Piloto de 1ª	Piloto de 2ª	Alumno	Estudiante	
Años de experiencia en navegación	Sin experiencia	0	0	1	9	7	17
	Menos de 1 año	0	0	5	19	4	28
	Entre 1 y 2 años	0	1	32	1	0	34
	Entre 3 y 5 años	5	18	7	2	0	32
	Entre 6 y 10 años	17	15	2	0	1	35
	Más de 10 años	68	5	3	2	0	78
Total		90	39	50	33	12	224



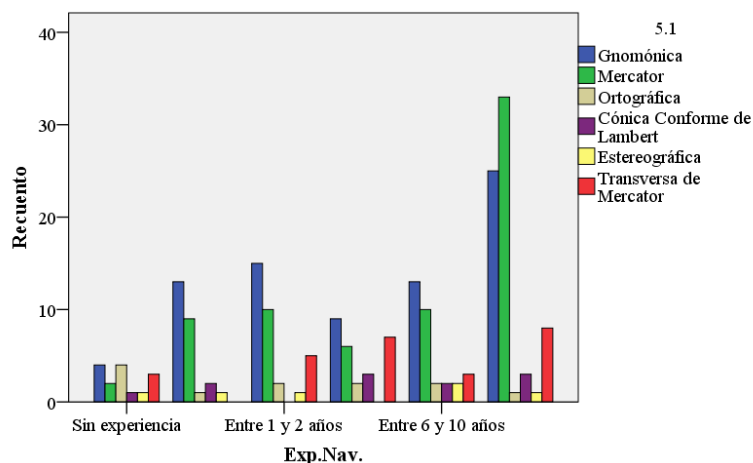
		Experiencia ECDIS						Total
		Sin experiencia	Menos de 1 año	Entre 1 y 2 años	Entre 3 y 5 años	Entre 6 y 10 años	Más de 10 años	
Años de experiencia en navegación	Sin experiencia	16	0	1	0	0	0	17
	Menos de 1 año	5	21	1	0	0	1	28
	Entre 1 y 2 años	8	6	18	1	0	1	34
	Entre 3 y 5 años	3	3	8	17	0	1	32
	Entre 6 y 10 años	11	4	2	8	10	0	35
	Más de 10 años	22	5	8	17	9	17	78
Total		65	39	38	43	19	20	224



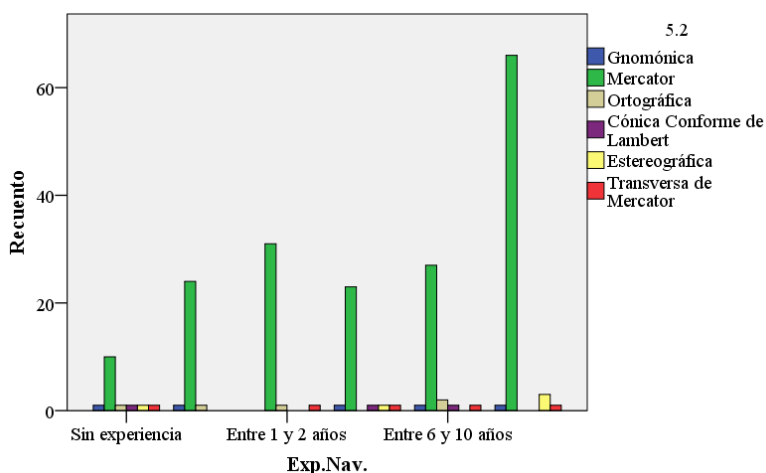
		1.1Cuál de las siguientes representaciones cartográficas se asemeja más a la imagen mental que tienes de la configuración de la superficie terrestre						Total
		Hammer	Mercator	Ortográf. 30°N	Peters	Robinson	Van Der Grinten I	
Años de experiencia en navegación	Sin experiencia	4	0	7	0	5	1	17
	Menos de 1 año	4	2	15	1	6	0	28
	Entre 1 y 2 años	3	7	15	0	9	0	34
	Entre 3 y 5 años	6	0	15	1	10	0	32
	Entre 6 y 10 años	7	4	11	0	12	1	35
	Más de 10 años	13	19	29	2	14	1	78
Total		37	32	92	4	56	3	224



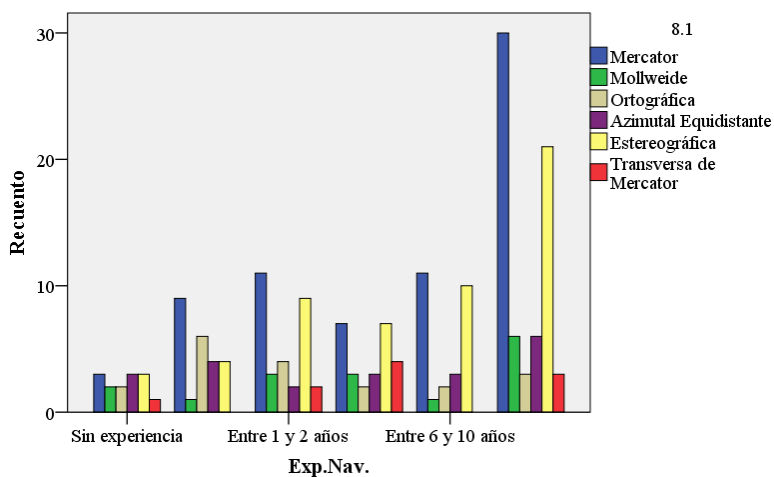
		5.1 Qué carta del Atlántico Norte es la más útil para planificar una ortodrómica						Total
		Gnomón.	Mercator	Ortográf.	Cón.Con. Lambert	Estereogr.	Transver. Mercator	
Años de experiencia en navegación	Sin experiencia	4	2	4	1	1	3	15
	Menos de 1 año	13	9	1	2	1	0	26
	Entre 1 y 2 años	15	10	2	0	1	5	33
	Entre 3 y 5 años	9	6	2	3	0	7	27
	Entre 6 y 10 años	13	10	2	2	2	3	32
	Más de 10 años	25	33	1	3	1	8	71
Total		79	70	12	11	6	26	204



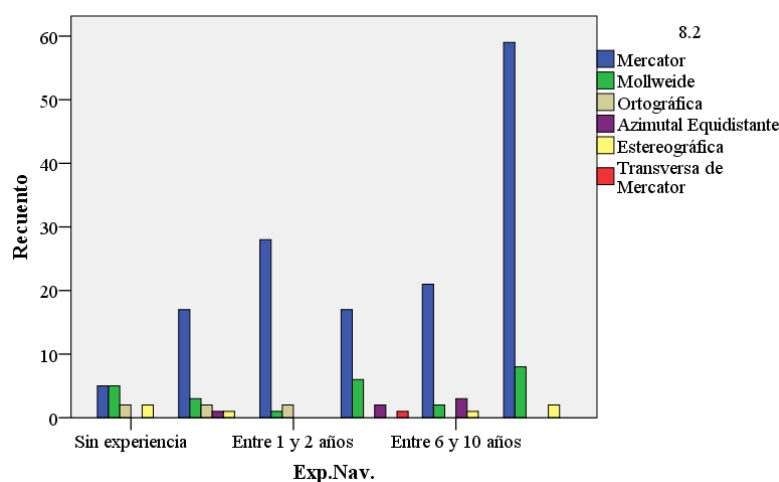
		5.2 Qué carta del Atlántico Norte es la más útil para planificar una loxodrómica						Total
		Gnomón.	Mercator	Ortográf.	Cón.Con. Lambert	Estereogr.	Transver. Mercator	
Años de experiencia en navegación	Sin experiencia	1	10	1	1	1	1	15
	Menos de 1 año	1	24	1	0	0	0	26
	Entre 1 y 2 años	0	31	1	0	0	1	33
	Entre 3 y 5 años	1	23	0	1	1	1	27
	Entre 6 y 10 años	1	27	2	1	0	1	32
	Más de 10 años	1	66	0	0	3	1	71
Total		5	181	5	3	5	5	204



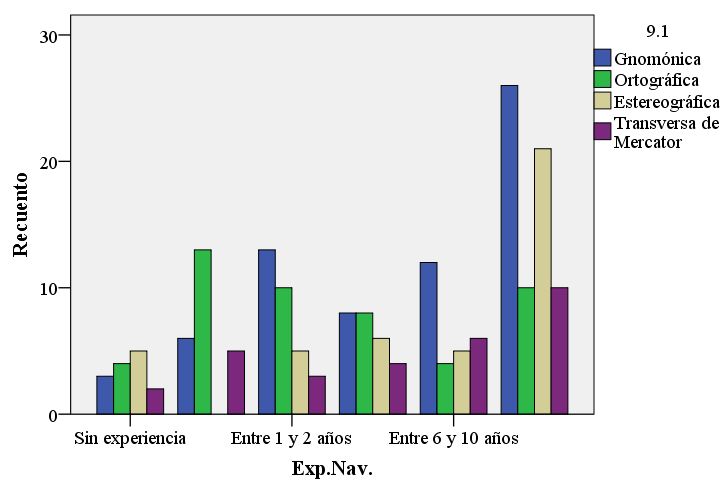
		8.1 Qué carta del océano Pacífico es la más útil para planificar una ortodrómica						Total
		Mercator	Mollwei.	Ortográf.	Acimutal Equidis.	Estereogr.	Transver. Mercator	
Años de experiencia en navegación	Sin experiencia	3	2	2	3	3	1	14
	Menos de 1 año	9	1	6	4	4	0	24
	Entre 1 y 2 años	11	3	4	2	9	2	31
	Entre 3 y 5 años	7	3	2	3	7	4	26
	Entre 6 y 10 años	11	1	2	3	10	0	27
	Más de 10 años	30	6	3	6	21	3	69
Total		71	16	19	21	54	10	191



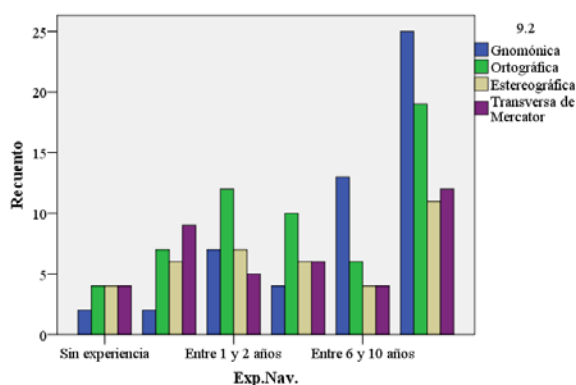
		8.2 Qué carta del océano Pacífico es la más útil para planificar una loxodrómica						Total
		Mercator	Mollwei.	Ortográf.	Acimutal Equidis.	Estereogr.	Transver. Mercator	
Años de experiencia en navegación	Sin experiencia	5	5	2	0	2	0	14
	Menos de 1 año	17	3	2	1	1	0	24
	Entre 1 y 2 años	28	1	2	0	0	0	31
	Entre 3 y 5 años	17	6	0	2	0	1	26
	Entre 6 y 10 años	21	2	0	3	1	0	27
	Más de 10 años	59	8	0	0	2	0	69
Total		147	25	6	6	6	1	191



		9.1 Qué carta es la más útil para representar la realidad geográfica de la zona entre Tierra de Fuego y el cabo de Buena Esperanza				Total
		Gnomónica	Ortográfica	Estereográfica	Transversa Mercator	
Años de experiencia en navegación	Sin experiencia	3	4	5	2	14
	Menos de 1 año	6	13	0	5	24
	Entre 1 y 2 años	13	10	5	3	31
	Entre 3 y 5 años	8	8	6	4	26
	Entre 6 y 10 años	12	4	5	6	27
	Más de 10 años	26	10	21	10	67
Total		68	49	42	30	189

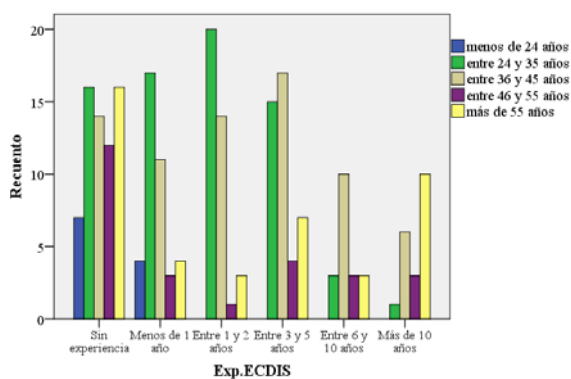


		9.2 Qué carta es la más útil para representar la realidad geográfica de la zona de las islas Aleutianas y el estrecho de Bering				Total
		Gnomónica	Ortográfica	Estereográfica	Transversa Mercator	
Años de experiencia en navegación	Sin experiencia	2	4	4	4	14
	Menos de 1 año	2	7	6	9	24
	Entre 1 y 2 años	7	12	7	5	31
	Entre 3 y 5 años	4	10	6	6	26
	Entre 6 y 10 años	13	6	4	4	27
	Más de 10 años	25	19	11	12	67
Total		53	58	38	40	189

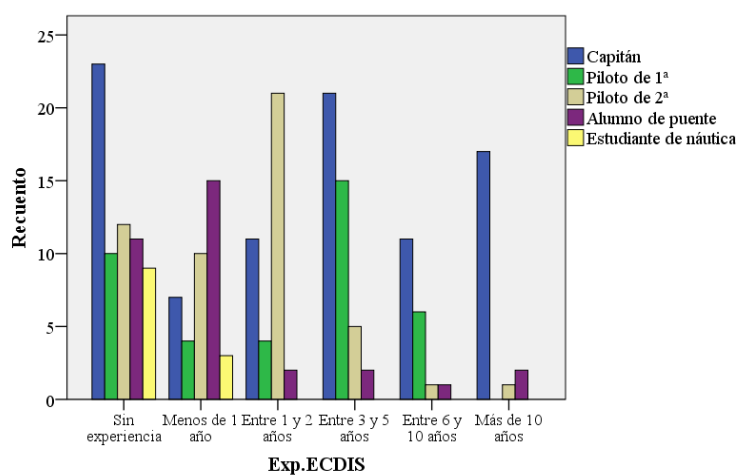


5.3.1.5.4 Recuentos y gráficos de barras asociadas en función de la experiencia en el uso de cartas electrónicas de navegación

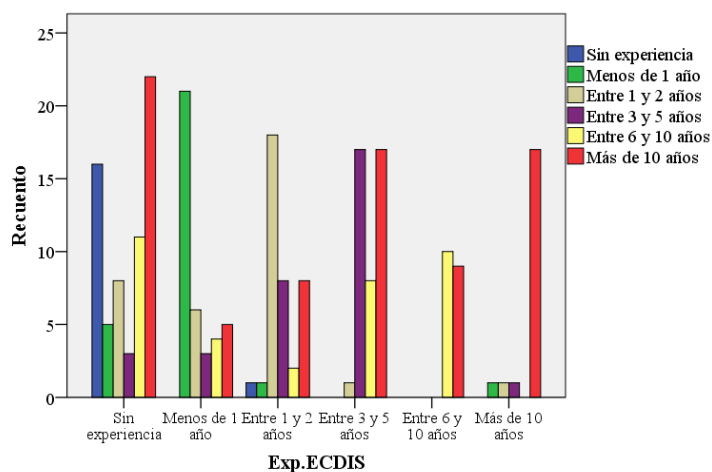
		Edad					Total
		menos de 24 años	entre 24 y 35 años	entre 36 y 45 años	entre 46 y 55 años	más de 55 años	
Años de experiencia en el uso de cartas electrónicas a bordo	Sin experiencia	7	16	14	12	16	65
	Menos de 1 año	4	17	11	3	4	39
	Entre 1 y 2 años	0	20	14	1	3	38
	Entre 3 y 5 años	0	15	17	4	7	43
	Entre 6 y 10 años	0	3	10	3	3	19
	Más de 10 años	0	1	6	3	10	20
Total		11	72	72	26	43	224



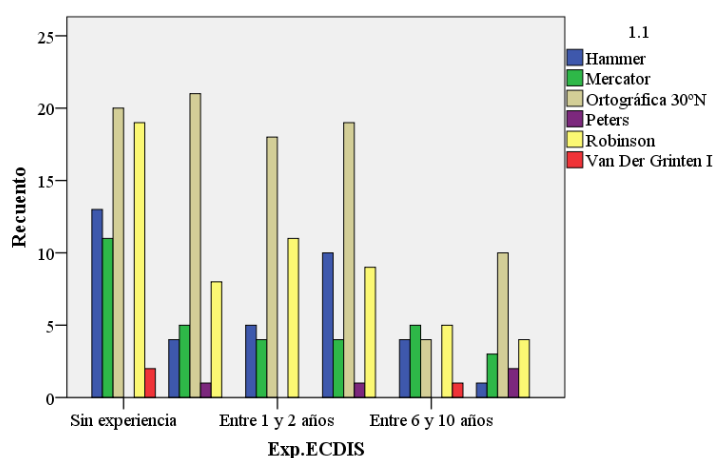
		Titulación					Total
		Capitán	Piloto de 1ª	Piloto de 2ª	Alumno	Estudiante	
Años de experiencia en el uso de cartas electrónicas a bordo	Sin experiencia	23	10	12	11	9	65
	Menos de 1 año	7	4	10	15	3	39
	Entre 1 y 2 años	11	4	21	2	0	38
	Entre 3 y 5 años	21	15	5	2	0	43
	Entre 6 y 10 años	11	6	1	1	0	19
	Más de 10 años	17	0	1	2	0	20
Total		90	39	50	33	12	224



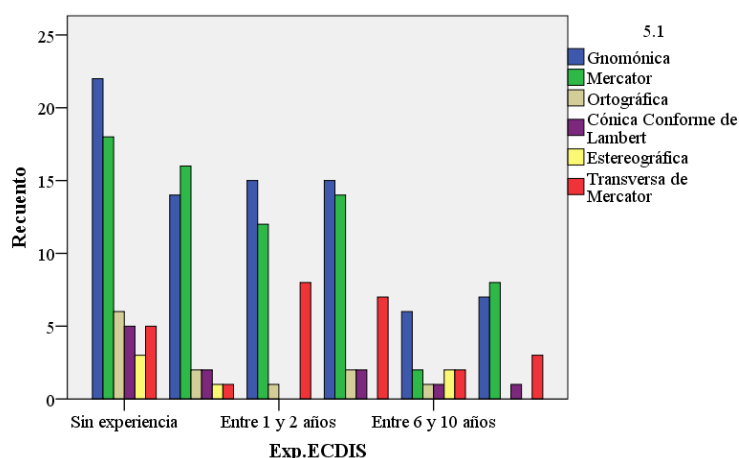
		Experiencia en navegación						Total
		Sin experiencia	Menos de 1 año	Entre 1 y 2 años	Entre 3 y 5 años	Entre 6 y 10 años	Más de 10 años	
Años de experiencia en el uso de cartas electrónicas a bordo	Sin experiencia	16	5	8	3	11	22	65
	Menos de 1 año	0	21	6	3	4	5	39
	Entre 1 y 2 años	1	1	18	8	2	8	38
	Entre 3 y 5 años	0	0	1	17	8	17	43
	Entre 6 y 10 años	0	0	0	0	10	9	19
	Más de 10 años	0	1	1	1	0	17	20
Total		17	28	34	32	35	78	224



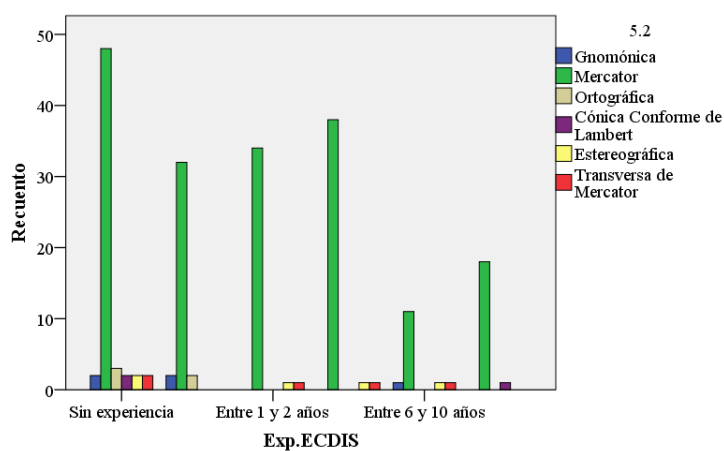
		1.1 Cuál de las siguientes representaciones cartográficas se asemeja más a la imagen mental que tienes de la configuración de la superficie terrestre						Total
		Hammer	Mercator	Ortográf. 30°N	Peters	Robinson	Van Der Grinten I	
Años de experiencia en el uso de cartas electrónicas a bordo	Sin experiencia	13	11	20	0	19	2	65
	Menos de 1 año	4	5	21	1	8	0	39
	Entre 1 y 2 años	5	4	18	0	11	0	38
	Entre 3 y 5 años	10	4	19	1	9	0	43
	Entre 6 y 10 años	4	5	4	0	5	1	19
	Más de 10 años	1	3	10	2	4	0	20
Total		37	32	92	4	56	3	224



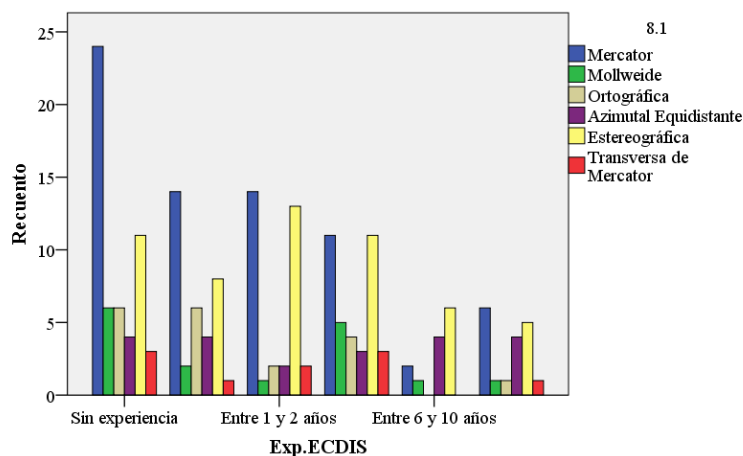
		5.1 Qué carta del Atlántico Norte es la más útil para planificar una ortodrómica						Total
		Gnomón.	Mercator	Ortográf.	Cón.Con. Lambert	Estereogr.	Transver. Mercator	
Años de experiencia en el uso de cartas electrónicas a bordo	Sin experiencia	22	18	6	5	3	5	59
	Menos de 1 año	14	16	2	2	1	1	36
	Entre 1 y 2 años	15	12	1	0	0	8	36
	Entre 3 y 5 años	15	14	2	2	0	7	40
	Entre 6 y 10 años	6	2	1	1	2	2	14
	Más de 10 años	7	8	0	1	0	3	19
Total		79	70	12	11	6	26	204



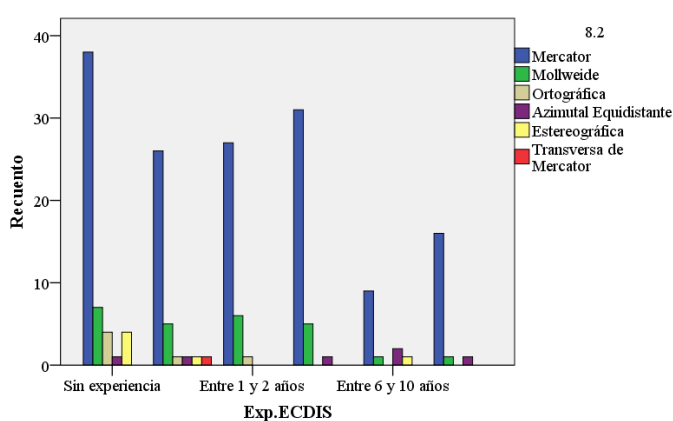
		5.2 Qué carta del Atlántico Norte es la más útil para planificar una loxodrómica						Total
		Gnomón.	Mercator	Ortográf.	Cón.Con. Lambert	Estereogr.	Transver. Mercator	
Años de experiencia en el uso de cartas electrónicas a bordo	Sin experiencia	2	48	3	2	2	2	59
	Menos de 1 año	2	32	2	0	0	0	36
	Entre 1 y 2 años	0	34	0	0	1	1	36
	Entre 3 y 5 años	0	38	0	0	1	1	40
	Entre 6 y 10 años	1	11	0	0	1	1	14
	Más de 10 años	0	18	0	1	0	0	19
Total		5	181	5	3	5	5	204



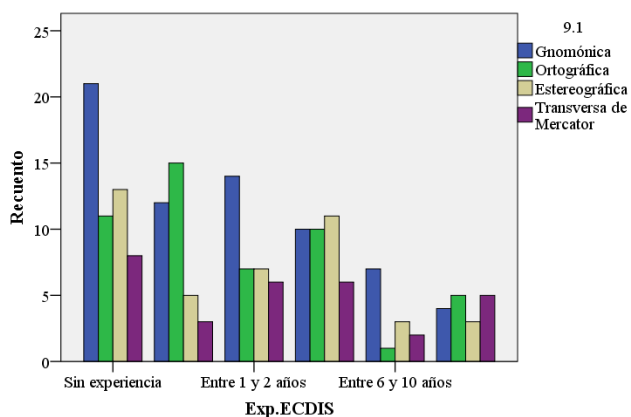
		8.1 Qué carta del océano Pacífico es la más útil para planificar una ortodrómica						Total
		Mercator	Mollwei.	Ortográf.	Acimutal Equidis.	Estereogr.	Transver. Mercator	
Años de experiencia en el uso de cartas electrónicas a bordo	Sin experiencia	24	6	6	4	11	3	54
	Menos de 1 año	14	2	6	4	8	1	35
	Entre 1 y 2 años	14	1	2	2	13	2	34
	Entre 3 y 5 años	11	5	4	3	11	3	37
	Entre 6 y 10 años	2	1	0	4	6	0	13
	Más de 10 años	6	1	1	4	5	1	18
Total		71	16	19	21	54	10	191



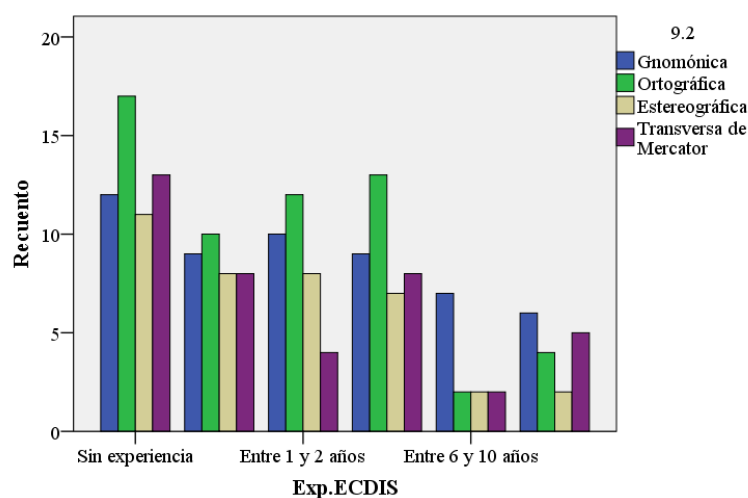
		8.2 Qué carta del océano Pacífico es la más útil para planificar una loxodrómica						Total
		Mercator	Mollwei.	Ortográf.	Acimutal Equidis.	Estereogr.	Transver. Mercator	
Años de experiencia en el uso de cartas electrónicas a bordo	Sin experiencia	38	7	4	1	4	0	54
	Menos de 1 año	26	5	1	1	1	1	35
	Entre 1 y 2 años	27	6	1	0	0	0	34
	Entre 3 y 5 años	31	5	0	1	0	0	37
	Entre 6 y 10 años	9	1	0	2	1	0	13
	Más de 10 años	16	1	0	1	0	0	18
Total		147	25	6	6	6	1	191



		9.1 Qué carta es la más útil para representar la realidad geográfica de la zona entre Tierra de Fuego y el cabo de Buena Esperanza				Total
		Gnomónica	Ortográfica	Estereográfica	Transversa Mercator	
Años de experiencia en el uso de cartas electrónicas a bordo	Sin experiencia	21	11	13	8	53
	Menos de 1 año	12	15	5	3	35
	Entre 1 y 2 años	14	7	7	6	34
	Entre 3 y 5 años	10	10	11	6	37
	Entre 6 y 10 años	7	1	3	2	13
	Más de 10 años	4	5	3	5	17
Total		68	49	42	30	189



		9.2 Qué carta es la más útil para representar la realidad geográfica de la zona de las islas Aleutianas y el estrecho de Bering				Total
		Gnomónica	Ortográfica	Estereográfica	Transversa Mercator	
Años de experiencia en el uso de cartas electrónicas a bordo	Sin experiencia	12	17	11	13	53
	Menos de 1 año	9	10	8	8	35
	Entre 1 y 2 años	10	12	8	4	34
	Entre 3 y 5 años	9	13	7	8	37
	Entre 6 y 10 años	7	2	2	2	13
	Más de 10 años	6	4	2	5	17
Total		53	58	38	40	189



5.3.2 Análisis de varianza

A la hora de realizar el análisis de varianza se tomarán como variables independientes, o factores, las relacionadas con los datos personales de edad, titulación profesional, experiencia en navegación y experiencia en el uso de cartas electrónicas. Se dejan fuera del estudio las variables de idioma, ya que la proporción de casos en idioma inglés es muy bajo como para que se considere significativo, y el sexo, ya que quedaría fuera del campo de estudio.

Ya que se trabajará con un gran número de variables independientes (todas las continuas), se ha visto necesario desglosar el análisis en función de la agrupación temática de las variables vista en el epígrafe 4.2: mapamundis, Atlántico Norte, Pacífico y altas latitudes. También se simplificará el informe reuniendo únicamente los datos referentes a aquellas variables dependientes donde se detecten diferencias entre las medias estadísticamente significativas.

Del mismo modo, en las pruebas post hoc solo se incluirán aquellas diferencias de media significativamente estadísticas.

5.3.2.1 Tomando como factor la edad

- Mapamundis

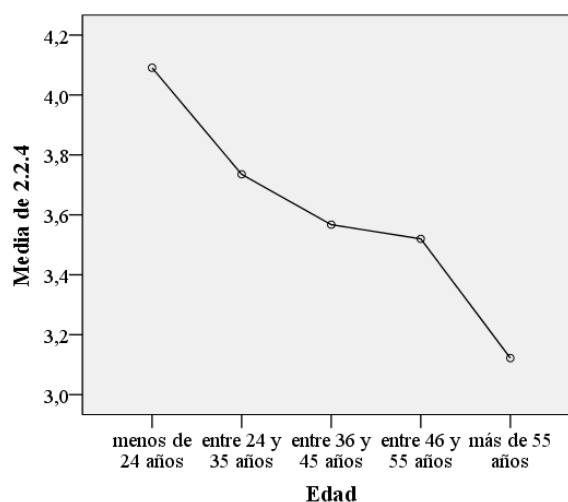
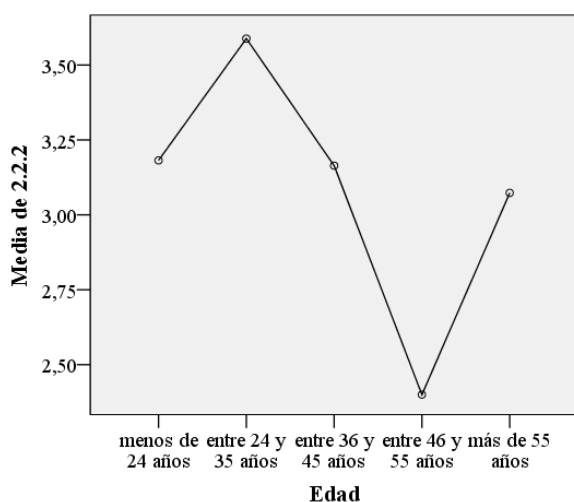
La prueba de homogeneidad de varianzas no da diferencias estadísticamente significativas para las variables a analizar, por lo que se asume homogeneidad de varianzas.

ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
2.2.2 Entre grupos	26,989	4	6,747	4,593	,001
Dentro de grupos	304,081	207	1,469		
Total	331,071	211			
2.2.4 Entre grupos	13,098	4	3,275	2,810	,027
Dentro de grupos	241,222	207	1,165		
Total	254,321	211			

Comparaciones múltiples

Variable dependiente	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
				Límite inferior	Límite superior
2.2.2 HSD Tukey entre 24 y 35 años entre 46 y 55 años	1,188	,283	,000	,41	1,97
2.2.4 HSD Tukey entre 24 y 35 años más de 55 años	,613	,213	,036	,03	1,20



- Atlántico Norte

La prueba de homogeneidad de varianzas muestra diferencias estadísticamente significativas en las siguientes variables:

Prueba de homogeneidad de varianzas

	Estadístico de Levene	df1	df2	Sig.
3.1.3	3,092	4	206	,017
3.2.2	3,704	4	206	,006

Asumiendo ahora varianzas iguales en el resto de variables:

ANOVA

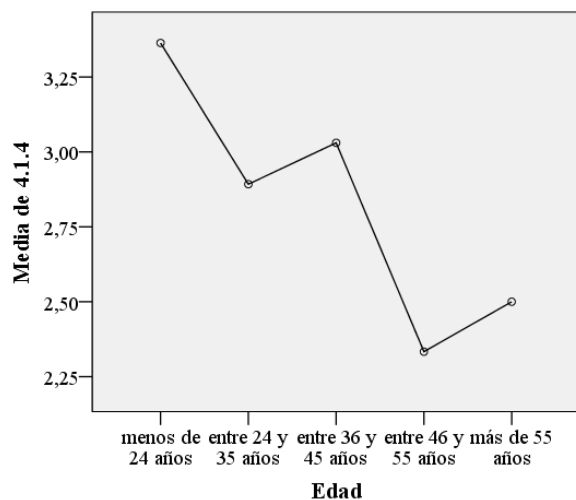
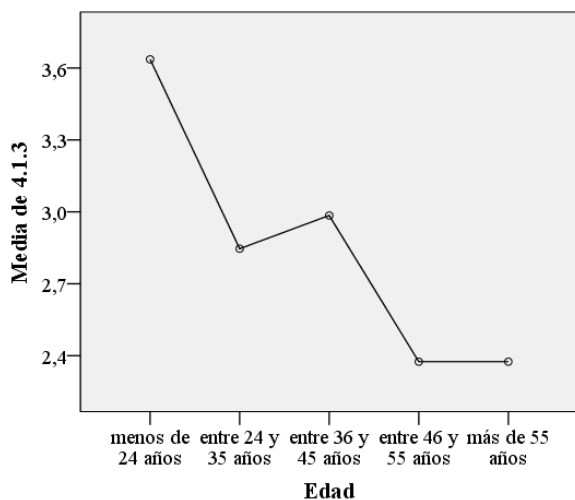
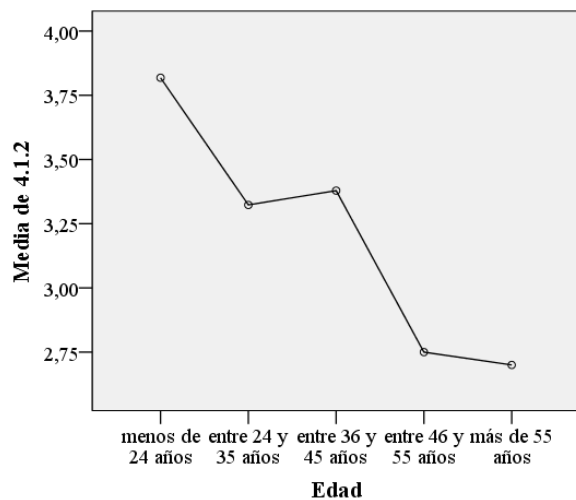
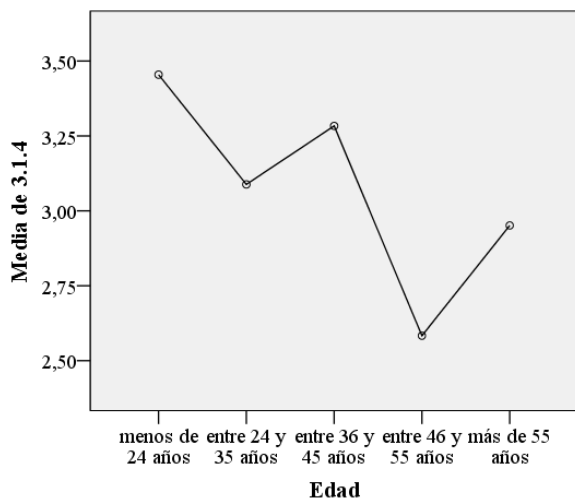
	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
3.1.4 Entre grupos	10,919	4	2,730	2,658	,034
Dentro de grupos	211,546	206	1,027		
Total	222,464	210			
4.1.2 Entre grupos	22,072	4	5,518	3,096	,017
Dentro de grupos	358,282	201	1,782		
Total	380,354	205			
4.1.3 Entre grupos	21,610	4	5,403	4,582	,001
Dentro de grupos	236,992	201	1,179		
Total	258,602	205			
4.1.4 Entre grupos	16,290	4	4,073	3,354	,011
Dentro de grupos	244,064	201	1,214		
Total	260,354	205			

Obteniendo las siguientes diferencias significativas entre medias de grupos de edad.

Comparaciones múltiples

Variable dependiente	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
				Límite inferior	Límite superior
3.1.4 HSD Tukey entre 36 y 45 años entre 46 y 55 años	,700	,241	,033	,04	1,36
4.1.3 HSD Tukey menos de 24 años entre 46 y 55 años más de 55 años	1,261	,395	,014	,17	2,35
	1,261	,370	,007	,24	2,28
	entre 36 y 45 años más de 55 años	,610	,218	,044	,01

Para las variables en las que no se puede asumir la homogeneidad de varianzas el descriptivo de Brown-Forsythe, de las pruebas sólidas de igualdad de medias, ofrece resultados no significativos.



- Pacífico

La prueba de homogeneidad de varianzas muestra diferencias estadísticamente significativas en las siguientes variables:

Prueba de homogeneidad de varianzas

	Estadístico de Levene	df1	df2	Sig.
6.1.5	4,187	4	196	,003
7.1.1	3,216	4	189	,014
7.1.5	3,918	4	189	,004

Asumiendo varianzas iguales en el resto de variables:

ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
6.2.2 Entre grupos	13,078	4	3,269	3,066	,018
Dentro de grupos	209,012	196	1,066		
Total	222,090	200			

Comparaciones múltiples

Variable dependiente	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
				Límite inferior	Límite superior
6.2.2 HSD Tukey entre 24 y 35 años	,807	,247	,011	,13	1,49
entre 46 y 55 años					
entre 36 y 45 años	,732	,247	,028	,05	1,41
entre 46 y 55 años					

Para las variables en las que no se puede asumir la homogeneidad de varianzas, se obtienen las siguientes diferencias significativas en las pruebas sólidas de igualdad de medias:

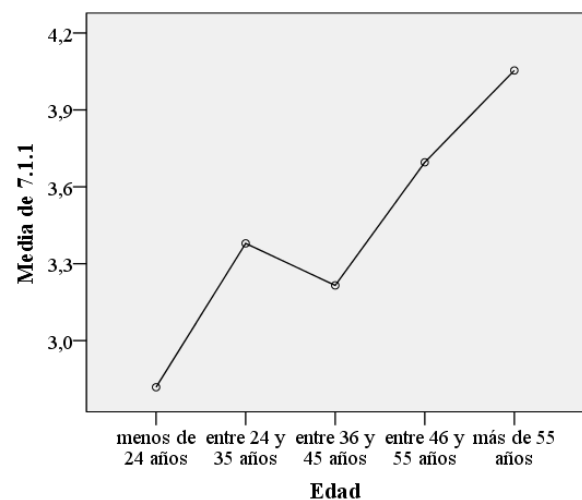
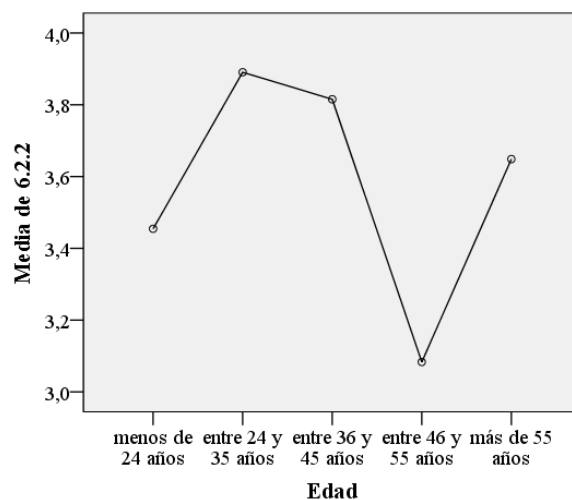
Pruebas sólidas de igualdad de medias

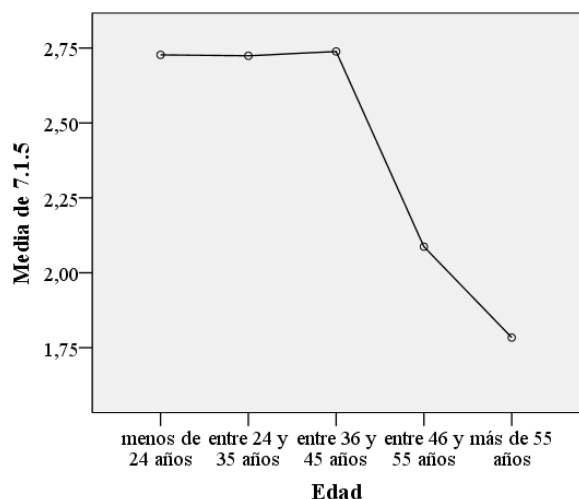
	Estadístico ^a	df1	df2	Sig.
7.1.1 Brown-Forsythe	3,403	4	130,782	,011
7.1.5 Brown-Forsythe	4,807	4	62,643	,002

a. F distribuida de forma asintótica

Comparaciones múltiples

Variable dependiente	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
				Límite inferior	Límite superior
7.1.1 Games-Howell menos de 24 años	-1,236	,384	,033	-2,39	-,08
más de 55 años					
entre 36 y 45 años	-,839	,266	,019	-1,58	-,10
más de 55 años					
7.1.5 Games-Howell entre 24 y 35 años	,940	,229	,001	,30	1,58
más de 55 años					
entre 36 y 45 años	,955	,215	,000	,36	1,55
más de 55 años					





- *Altas latitudes*

No existen diferencias significativas entre las medias de las variables relativas a la evaluación de cartas para altas latitudes, considerando el factor edad (ni en las que se asume homogeneidad de varianzas, ni en las que no).

5.3.2.2 Tomando como factor la titulación profesional

- *Mapamundis*

No existen diferencias significativas entre las medias de las variables relativas a la evaluación de mapamundis, considerando el factor titulación profesional (ni en las que se asume homogeneidad de varianzas, ni en las que no).

- *Atlántico Norte*

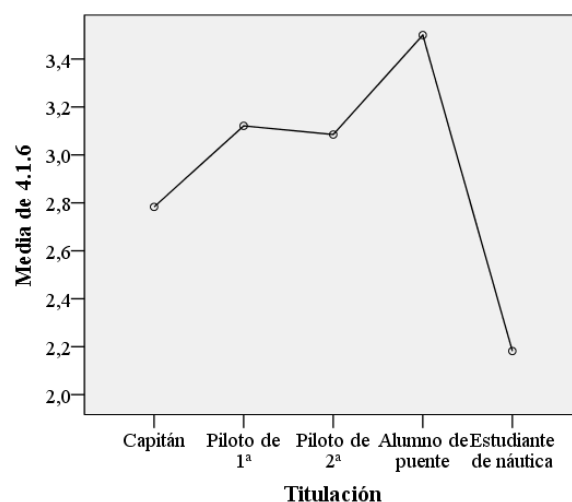
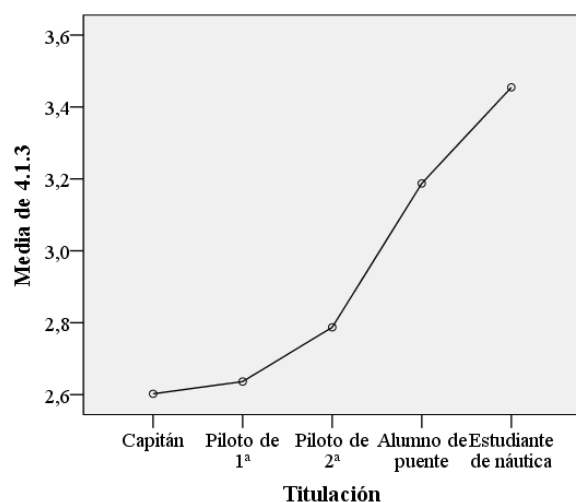
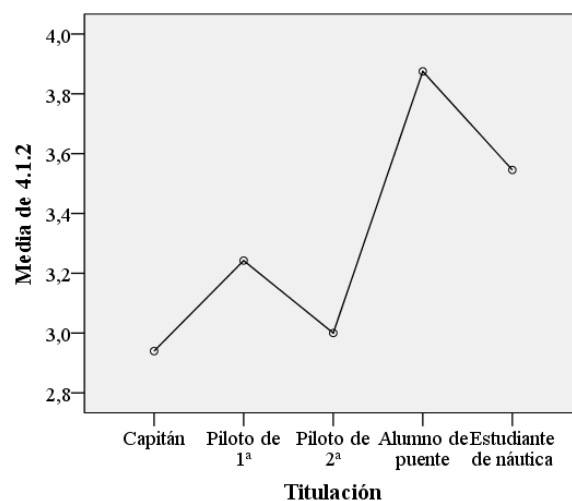
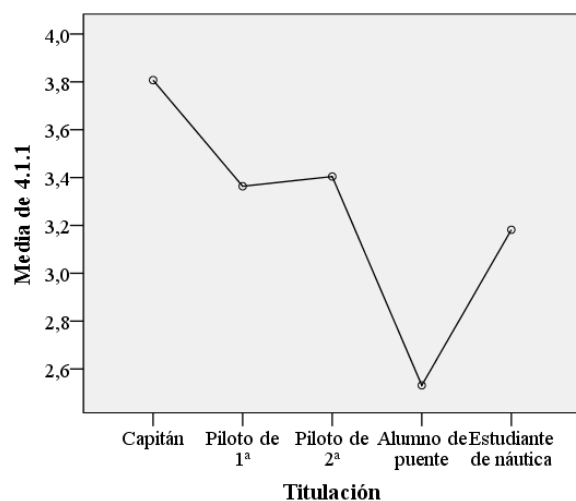
ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
4.1.1 Entre grupos	38,451	4	9,613	4,437	,002
Dentro de grupos	435,476	201	2,167		
Total	473,927	205			
4.1.2 Entre grupos	23,368	4	5,842	3,289	,012
Dentro de grupos	356,987	201	1,776		
Total	380,354	205			
4.1.3 Entre grupos	13,611	4	3,403	2,792	,027
Dentro de grupos	244,990	201	1,219		
Total	258,602	205			
4.1.6 Entre grupos	20,049	4	5,012	3,393	,010
Dentro de grupos	296,907	201	1,477		
Total	316,956	205			

Comparaciones múltiples

Variable dependiente		Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
					Límite inferior	Límite superior
4.1.1 HSD Tukey Capitán	Alumno de puente	1,276	,306	,000	,43	2,12
4.1.2 HSD Tukey Capitán	Alumno de puente	-,935	,277	,008	-1,70	-,17
	Piloto de 2ª Alumno de puente	-,875	,305	,037	-1,72	-,03
4.1.6 HSD Tukey Capitán	Alumno de puente	-,717	,253	,040	-1,41	-,02
	Alumno de puente Estudiante de náutica	1,318	,425	,018	,15	2,49

En las variables en las que no se puede asumir la homogeneidad de varianzas no se obtienen diferencias significativas en el descriptivo de Brown-Forsythe, de las pruebas sólidas de igualdad de medias.



- Pacífico

La prueba de homogeneidad de varianzas muestra diferencias estadísticamente significativas en las siguientes variables:

Prueba de homogeneidad de varianzas

	Estadístico de Levene	df1	df2	Sig.
6.1.1	2,730	4	196	,030
6.1.3	4,341	4	196	,002
7.1.6	2,895	4	189	,023

Asumiendo ahora varianzas iguales en el resto de variables:

ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
6.1.5 Entre grupos	17,093	4	4,273	3,358	,011
Dentro de grupos	249,394	196	1,272		
Total	266,488	200			
7.1.1 Entre grupos	28,445	4	7,111	3,843	,005
Dentro de grupos	349,725	189	1,850		
Total	378,170	193			
7.1.3 Entre grupos	16,613	4	4,153	3,009	,019
Dentro de grupos	260,872	189	1,380		
Total	277,485	193			
7.1.4 Entre grupos	17,562	4	4,390	3,225	,014
Dentro de grupos	257,309	189	1,361		
Total	274,871	193			
7.1.5 Entre grupos	21,973	4	5,493	3,551	,008
Dentro de grupos	292,398	189	1,547		
Total	314,371	193			

Comparaciones múltiples

Variable dependiente		Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
					Límite inferior	Límite superior
6.1.5 HSD Tukey Capitán	Alumno de puente	-,809	,239	,008	-1,47	-,15
7.1.1 HSD Tukey Capitán	Alumno de puente	1,068	,296	,004	,25	1,88
	Piloto de 1ª Alumno de puente	1,129	,349	,012	,17	2,09
7.1.3 HSD Tukey Capitán	Alumno de puente	-,743	,256	,033	-1,45	-,04
7.1.4 HSD Tukey Capitán	Alumno de puente	-,863	,254	,007	-1,56	-,16
7.1.5 HSD Tukey Capitán	Alumno de puente	-,995	,271	,003	-1,74	-,25

Para las variables en las que no se puede asumir la homogeneidad de varianzas, se obtienen las siguientes diferencias significativas en las pruebas sólidas de igualdad de medias:

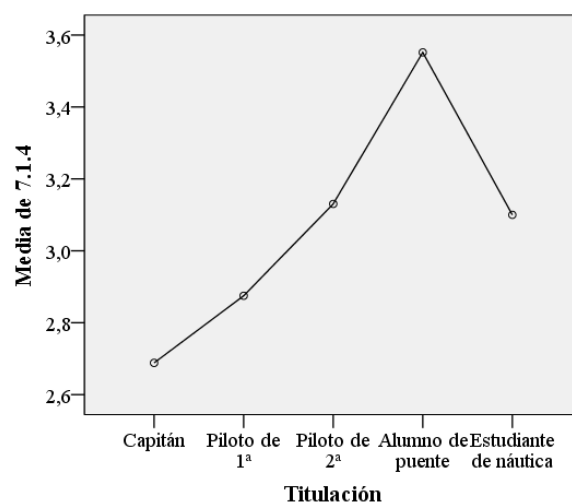
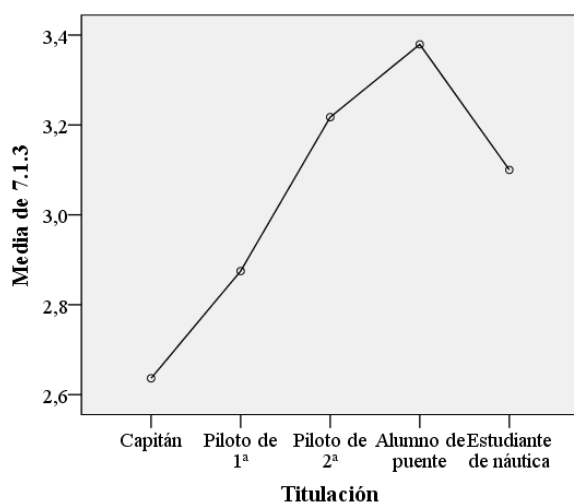
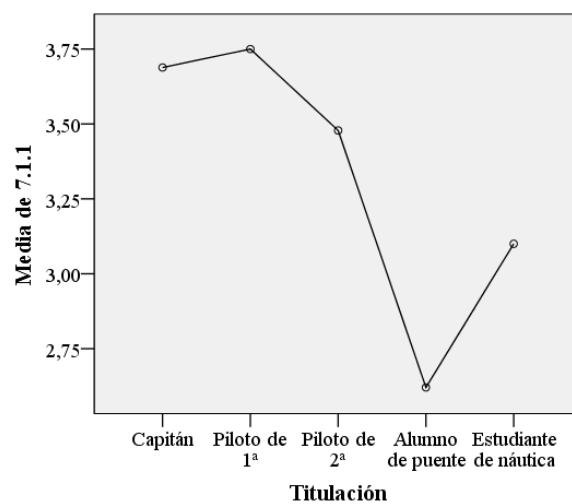
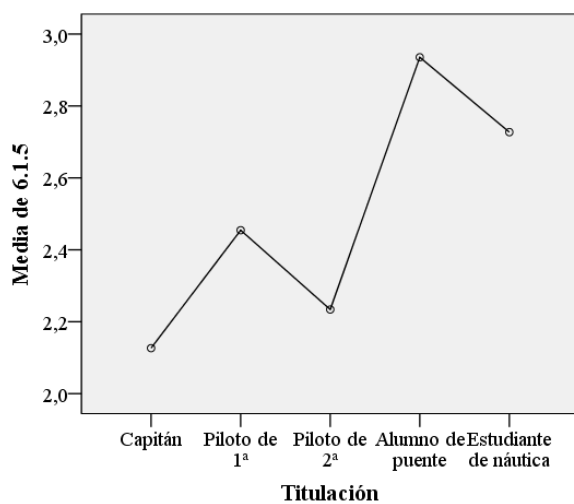
Pruebas sólidas de igualdad de medias

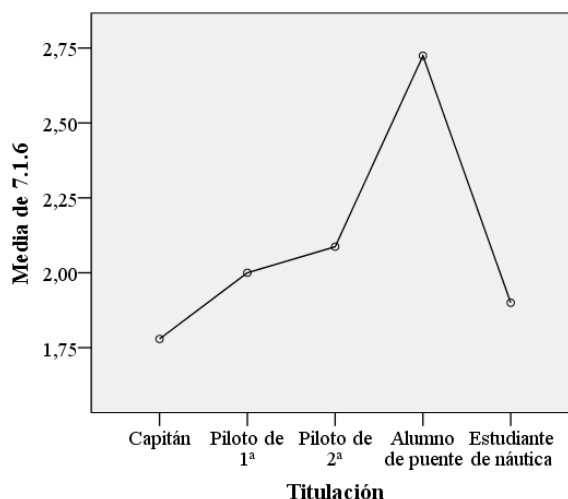
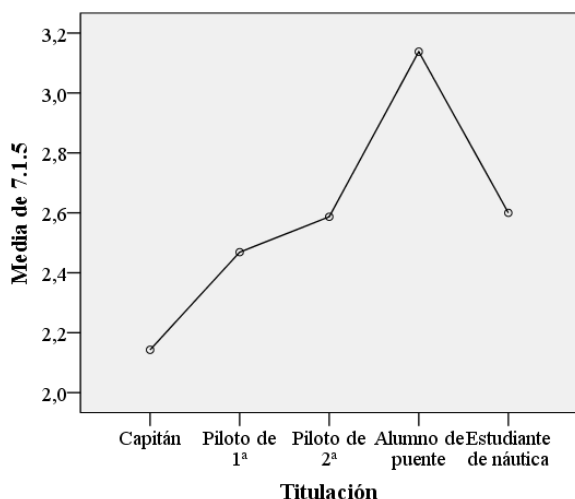
	Estadístico ^a	df1	df2	Sig.
7.1.6 Brown-Forsythe	3,873	4	97,742	,006

a. F distribuida de forma asintótica

Comparaciones múltiples

Variable dependiente	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
				Límite inferior	Límite superior
7.1.6 Games-Howell Capitán Alumno de puente	-,945	,284	,016	-1,76	-,13





- *Altas latitudes*

No existen diferencias significativas entre las medias de las variables relativas a la evaluación de cartas para altas latitudes, considerando el factor titulación profesional (ni en las que se asume homogeneidad de varianzas, ni en las que no).

5.3.2.3 Tomando como factor la experiencia en navegación

- *Mapamundis*

La prueba de homogeneidad de varianzas muestra diferencias estadísticamente significativas en las siguientes variables:

Prueba de homogeneidad de varianzas

	Estadístico de Levene	df1	df2	Sig.
2.2.2	2,932	5	206	,014
2.2.5	2,565	5	206	,028

Asumiendo ahora varianzas iguales en el resto de variables:

ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
2.1.3 Entre grupos	18,264	5	3,653	2,734	,020
Dentro de grupos	275,189	206	1,336		
Total	293,453	211			

Comparaciones múltiples

Variable dependiente	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
				Límite inferior	Límite superior
2.1.3 HSD Tukey Menos de 1 año Entre 3 y 5 años	,900	,307	,043	,02	1,78

Para las variables en las que no se puede asumir la homogeneidad de varianzas, se obtienen las siguientes diferencias significativas en las pruebas sólidas de igualdad de medias:

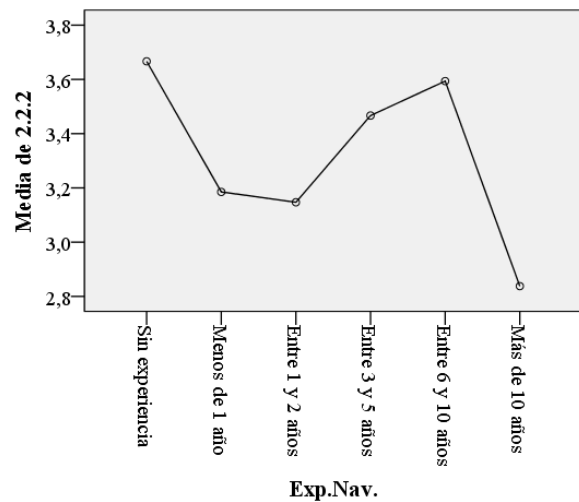
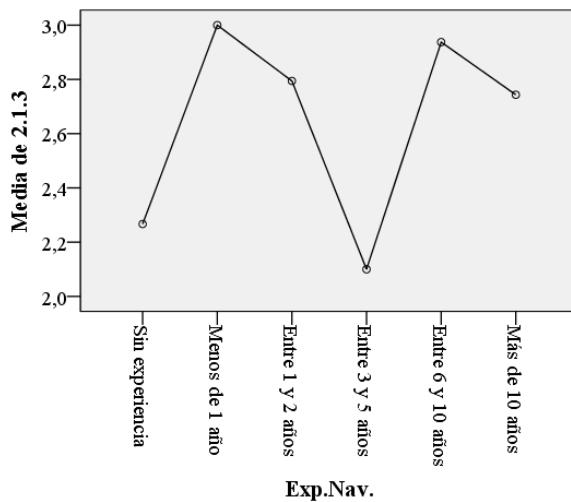
Pruebas sólidas de igualdad de medias

	Estadístico ^a	df1	df2	Sig.
2.2.2 Brown-Forsythe	2,777	5	137,995	,020

a. F distribuida de forma asintótica

Comparaciones múltiples

Variable dependiente	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
				Límite inferior	Límite superior
2.2.2 Games-Howell Entre 6 y 10 años Más de 10 años	,756	,255	,045	,01	1,50

**- Atlántico Norte**

La prueba de homogeneidad de varianzas muestra diferencias estadísticamente significativas en las siguientes variables:

Prueba de homogeneidad de varianzas

	Estadístico de Levene	df1	df2	Sig.
3.1.3	2,783	5	205	,019
3.2.1	2,635	5	205	,025
3.2.2	2,648	5	205	,024
4.1.2	2,325	5	200	,044
4.2.2	3,480	5	200	,005

Asumiendo ahora varianzas iguales en el resto de variables:

ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
3.1.1 Entre grupos	37,786	5	7,557	4,197	,001
Dentro de grupos	369,115	205	1,801		
Total	406,900	210			
3.1.2 Entre grupos	23,765	5	4,753	3,687	,003
Dentro de grupos	264,245	205	1,289		
Total	288,009	210			
4.1.1 Entre grupos	31,828	5	6,366	2,880	,016
Dentro de grupos	442,099	200	2,210		
Total	473,927	205			
4.1.3 Entre grupos	25,185	5	5,037	4,316	,001
Dentro de grupos	233,416	200	1,167		
Total	258,602	205			

Comparaciones múltiples

Variable dependiente	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza		
				Límite inferior	Límite superior	
3.1.1 HSD Tukey Entre 3 y 5 años Más de 10 años	-1,187	,291	,001	-2,02	-,35	
3.1.2 HSD Tukey Menos de 1 año Más de 10 años	,904	,256	,007	,17	1,64	
4.1.1 HSD Tukey Menos de 1 año Más de 10 años	-1,093	,336	,016	-2,06	-,13	
4.1.3 HSD Tukey Sin experiencia	Entre 3 y 5 años	1,400	,348	,001	,40	2,40
	Entre 6 y 10 años	1,108	,338	,015	,14	2,08
	Más de 10 años	1,067	,307	,008	,18	1,95
	Menos de 1 año Entre 3 y 5 años	,852	,294	,047	,01	1,70

Para las variables en las que no se puede asumir la homogeneidad de varianzas, se obtienen las siguientes diferencias significativas en las pruebas sólidas de igualdad de medias:

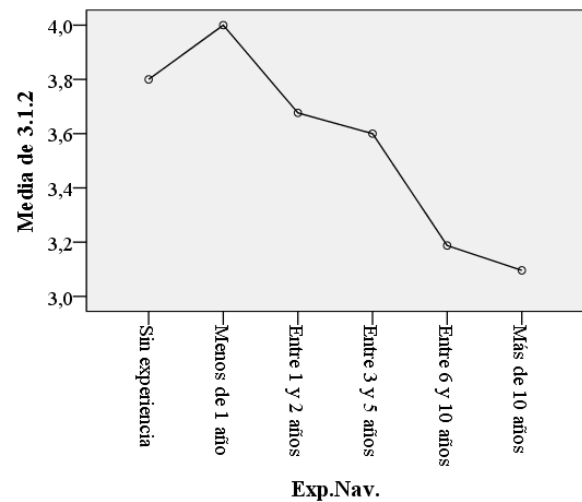
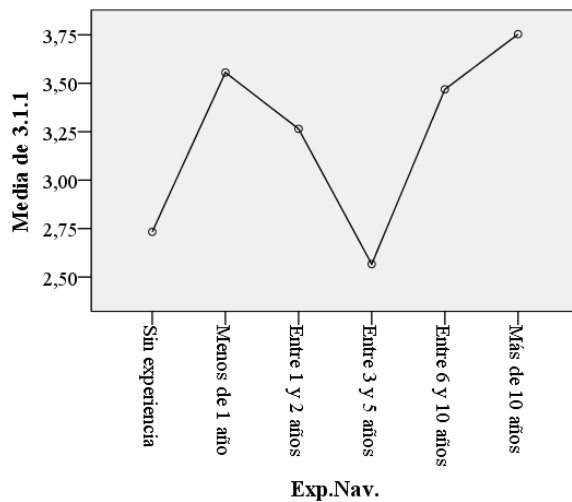
Pruebas sólidas de igualdad de medias

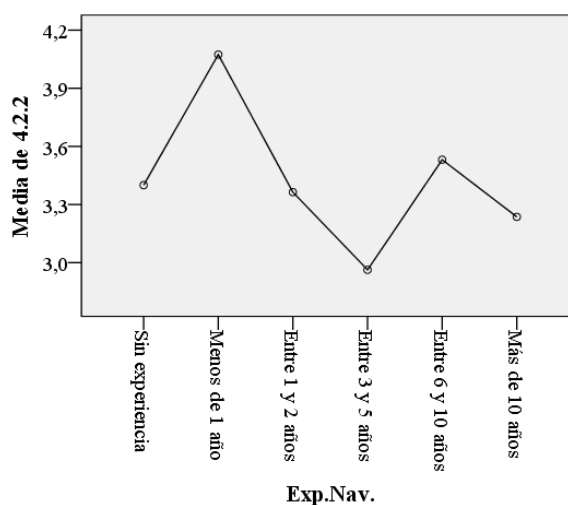
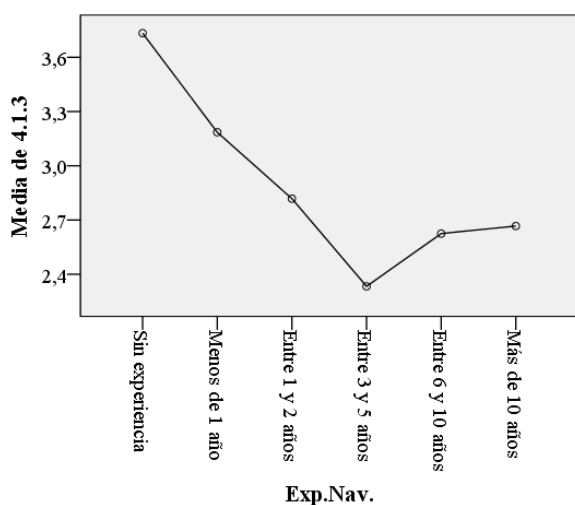
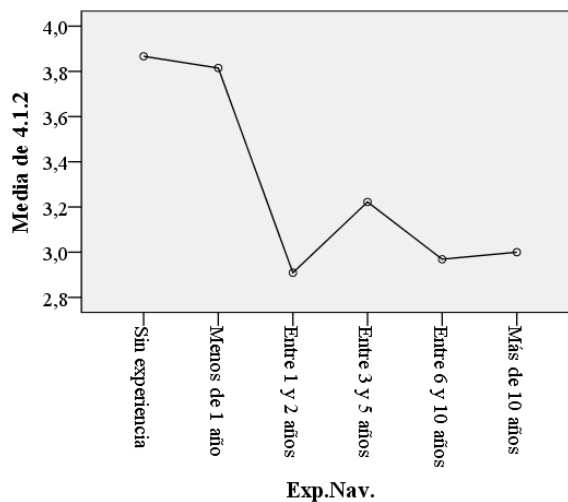
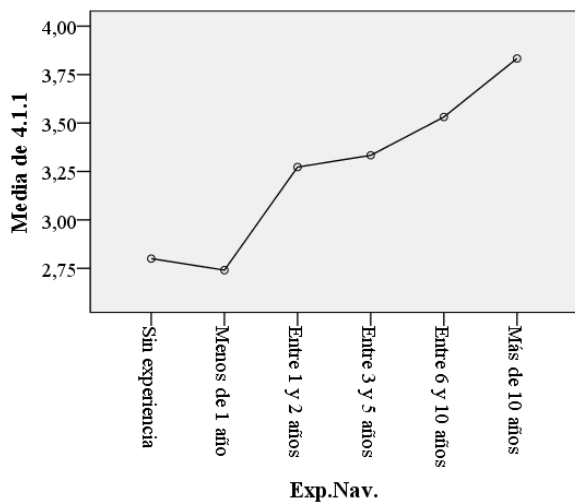
	Estadístico ^a	df1	df2	Sig.
4.1.2 Brown-Forsythe	2,781	5	149,302	,020
4.2.2 Brown-Forsythe	2,442	5	138,339	,037

a. F distribuida de forma asintótica

Comparaciones múltiples

Variable dependiente			Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
						Límite inferior	Límite superior
4.1.2 Games-Howell	Menos de 1 año	Más de 10 años	,815	,271	,043	,02	1,61
4.2.2 Games-Howell	Menos de 1 año	Entre 3 y 5 años	1,111	,322	,014	,15	2,07
		Más de 10 años	,838	,250	,016	,11	1,57





- Pacífico

La prueba de homogeneidad de varianzas muestra diferencias estadísticamente significativas en las siguientes variables:

Prueba de homogeneidad de varianzas

	Estadístico de Levene	df1	df2	Sig.
6.1.3	3,130	5	195	,010
6.1.5	2,389	5	195	,039
7.1.1	2,999	5	188	,013
7.2.2	2,927	5	188	,014

Asumiendo ahora varianzas iguales en el resto de variables:

ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
7.1.3 Entre grupos	23,984	5	4,797	3,557	,004
Dentro de grupos	253,501	188	1,348		
Total	277,485	193			
7.1.4 Entre grupos	16,913	5	3,383	2,465	,034
Dentro de grupos	257,958	188	1,372		
Total	274,871	193			
7.1.5 Entre grupos	25,463	5	5,093	3,314	,007
Dentro de grupos	288,909	188	1,537		
Total	314,371	193			

Comparaciones múltiples

Variable dependiente	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
				Límite inferior	Límite superior
7.1.3 HSD Tukey Entre 1 y 2 años	,917	,298	,028	,06	1,77
Entre 6 y 10 años	,817	,248	,015	,10	1,53
Más de 10 años					
7.1.5 HSD Tukey Menos de 1 año	,996	,294	,011	,15	1,84
Más de 10 años					

Para las variables en las que no se puede asumir la homogeneidad de varianzas, se obtienen las siguientes diferencias significativas en las pruebas sólidas de igualdad de medias:

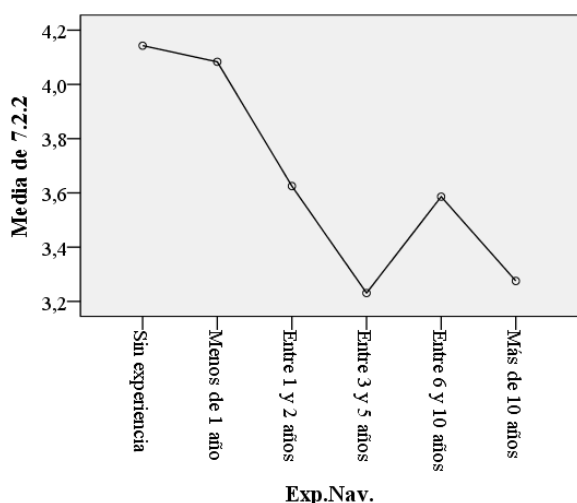
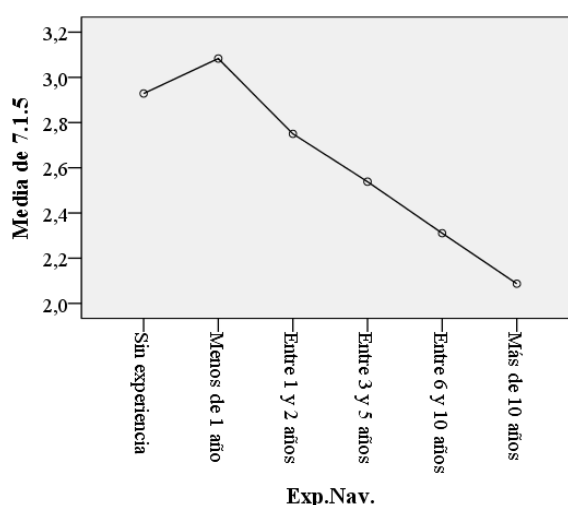
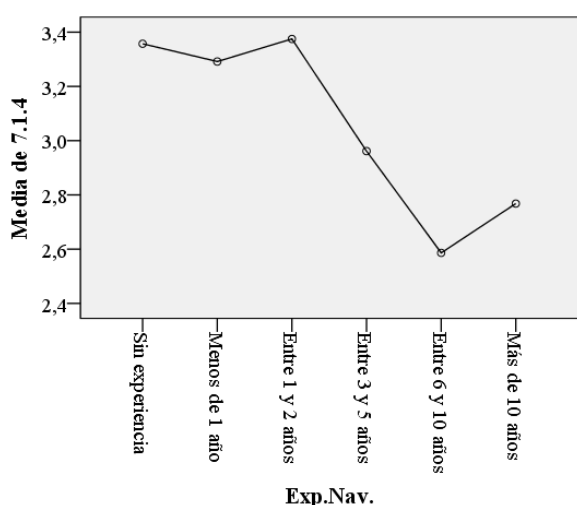
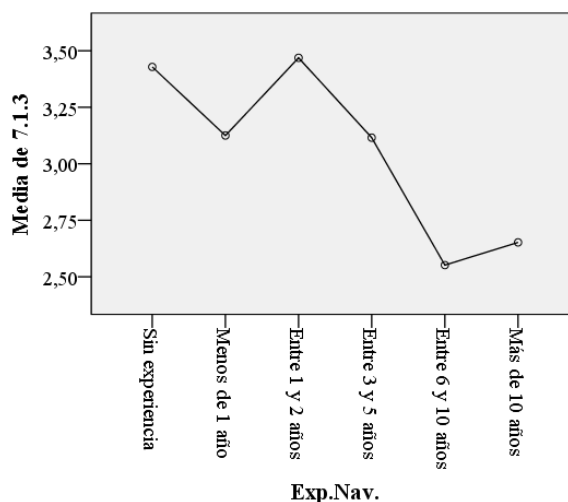
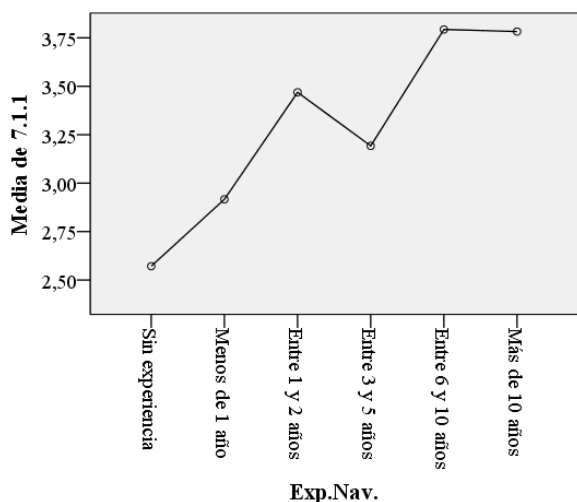
Pruebas sólidas de igualdad de medias

	Estadístico ^a	df1	df2	Sig.
7.1.1 Brown-Forsythe	3,281	5	133,170	,008
7.2.2 Brown-Forsythe	2,970	5	156,599	,014

a. F distribuida de forma asintótica

Comparaciones múltiples

Variable dependiente	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	95% de intervalo de confianza	
				Límite inferior	Límite superior
7.1.1 Games-Howell Sin experiencia	-1,222	,390	,045	-2,43	-,02
Entre 6 y 10 años	-1,211	,364	,034	-2,36	-,07
Más de 10 años					
7.2.2 Games-Howell Menos de 1 año	,808	,255	,027	,06	1,56
Más de 10 años					



- Altas latitudes

No existen diferencias significativas entre las medias de las variables relativas a la evaluación de cartas para altas latitudes, considerando el factor experiencia en navegación (ni en las que se asume homogeneidad de varianzas, ni en las que no).

5.3.2.4 Tomando como factor la experiencia en el uso de cartas electrónicas de navegación

No existen diferencias significativas entre las medias de ninguna de las variables del estudio, considerando el factor experiencia en el uso de cartas electrónicas de navegación (ni en las que se asume homogeneidad de varianzas, ni en las que no).

5.3.3. Análisis factorial

Para la realización del análisis factorial se emplearán las variables cuantitativas disponibles, 55 en total.

La prueba de esfericidad de Bartlett arroja un valor de Chi-cuadrado = 6.139,168 con 1.485 grados de libertad ($p < 0,001$).

Como método de extracción se ha empleado el de componentes principales y para la selección del número de factores el criterio de Kaiser-Guttman, de autovalores mayores que 1.

El número de factores retenidos ha sido de 16, que explican el 72,72% de la varianza total.

Componente	Autovalores iniciales		
	Total	% de varianza	% acumulado
1	8,686	15,793	15,793
2	5,412	9,840	25,633
3	4,876	8,865	34,498
4	2,730	4,964	39,462
5	2,446	4,447	43,909
6	2,309	4,198	48,107
7	1,830	3,327	51,435
8	1,782	3,240	54,675
9	1,651	3,002	57,677
10	1,400	2,545	60,222
11	1,343	2,441	62,663
12	1,226	2,228	64,891
13	1,152	2,095	66,986
14	1,101	2,002	68,988
15	1,039	1,889	70,877
16	1,014	1,844	72,721

Se ha realizado rotación de factores con los procedimientos varimax y oblimin con normalización Kaiser, siendo en este último donde se ha logrado una mejor interpretación de factores. A pesar de ello, no se ha encontrado una interpretación lógica a varios de los factores, en concreto aquellos que agrupaban variables de valoración de proyecciones para diferentes usos y zonas. Para no sobrecargar el estudio con datos superfluos, tan solo se recogen a continuación las filas de la matriz de estructura correspondientes a las variables relacionadas con la valoración de criterios, refiriendo el componente en el que se agrupan.

Componente 2	
6.2 Valorar el criterio de superficie de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)	,850
9.3 Valorar el criterio de superficie de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)	,836
6.2 Valorar el criterio de forma de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)	,835
9.3 Valorar el criterio de forma de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)	,811
3.2 Valorar el criterio de superficie de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)	,753
3.2 Valorar el criterio de forma de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)	,729
2.2 Valorar el criterio de superficie de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)	,601
2.2 Valorar el criterio de forma de los accidentes geográficos y masas continentales a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)	,553

Componente 3	
9.3 Valorar el criterio de forma de los paralelos a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)	,828
9.3 Valorar el criterio de forma de los meridianos a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)	,817
6.2 Valorar el criterio de forma de los paralelos a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)	,799
6.2 Valorar el criterio de forma de los meridianos a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)	,797

Componente 4	
9.3 Valorar el criterio de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre a la hora de contestar las preguntas 9.1 y 9.2 (valorar de 1 a 5)	,851
6.2 Valorar el criterio de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre a la hora de contestar la pregunta 6.1 (valorar de 1 a 5)	,827
3.2 Valorar el criterio de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)	,821
2.2 Valorar el criterio de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)	,754
2.2 Valorar el criterio de geometría de los límites del mapa a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)	,507

Componente 5	
7.2 Valorar el criterio de forma de las derrotas en la carta a la hora de contestar la pregunta 7.1 (valorar de 1 a 5)	,858
4.2 Valorar el criterio de forma de las derrotas en la carta a la hora de contestar la pregunta 4.1 (valorar de 1 a 5)	,848

Componente 11	
2.2 Valorar el criterio de forma de los paralelos a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)	-,723
2.2 Valorar el criterio de forma de los meridianos a la hora de contestar la pregunta 2.1 (valorar de 1 a 5)	-,566

Componente 13	
7.2 Valorar el criterio de longitud de las derrotas en la carta a la hora de contestar la pregunta 7.1 (valorar de 1 a 5)	,665
4.2 Valorar el criterio de longitud de las derrotas en la carta a la hora de contestar la pregunta 4.1 (valorar de 1 a 5)	,660
3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección cónica conforme de Lambert para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)	-,600
3.1 Valorar la utilidad de una carta en proyección estereográfica para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte (valorar de 1 a 5)	-,461

Componente 15	
3.2 Valorar el criterio de forma de los paralelos a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)	-,790
3.2 Valorar el criterio de forma de los meridianos a la hora de contestar la pregunta 3.1 (valorar de 1 a 5)	-,675

5.3.4 Comentarios realizados por los encuestados

De los 189 sujetos que finalizaron la encuesta, tan solo 27 de ellos dejaron comentarios. Por su brevedad se incluyen aquí todos ellos, tal cual fueron redactados (en ocasiones con faltas de ortografía):

Edad	Titulación	Experiencia navegación	Experiencia ECDIS	Comentarios
Más de 55 años	Capitán	Más de 10 años	Menos de 1 año	“Espero que mis respuestas sirvan. He de confesar que yo era más de sextante, cronometro y tablas, aunque, últimamente de "satélite". Un saludo J.I.”.
Entre 36 y 45 años	Capitán	Entre 6 y 10 años	Entre 6 y 10 años	“Realizada a bordo por lo que los mapas tardan en cargar más de la cuenta. Por todo lo demás, perfecto, gracias”.
Entre 36 y 45 años	Capitán	Más de 10 años	Sin experiencia	“Como marino lo que me interesar es obtener un punto de referencia y una dirección o distancia de formar rápida y precisa. En las cartas electrónicas utilizas los cursores para saber la posición y obtener demoras y distancias independientemente de la representación”.
Más de 55 años	Capitán	Más de 10 años	Entre 1 y 2 años	“La mayoría de mis respuestas están condicionadas por mi experiencia en la utilización de cartas, y por mis conocimientos”.
Entre 36 y 45 años	Capitán	Más de 10 años	Más de 10 años	“Independientemente de la idea mental que yo tenga del mundo hay que poder plasmarla y trabajar con las representaciones del modo más fácil y rápido posible, por eso aunque las cartas no se ajustan a mi idea del mundo entiendo que para poder trabajar de modo sencillo, o por lo menos lo que a mí me ha tocado, nos manejamos con proyecciones que nos facilitan el trabajo sin tener que usar nada más complicado que unas reglas y un transportador, incluso navegando por ortodrómica en cartas mercatorianas (a fin de cuentas las troceamos en mini-loxodrómicas para hacerlas manejables)”.
Entre 46 y 55 años	Capitán	Más de 10 años	Entre 1 y 2 años	“Más complicado de lo que parece. Un saludo”.
Más de 55 años	Capitán	Entre 6 y 10 años	Menos de 1 año	“Que salga bien el trabajo. Saludos”.
Entre 46 y 55 años	Piloto de 2ª	Entre 1 y 2 años	Sin experiencia	“Los diez minutos son por cada pregunta, no?”.

Edad	Titulación	Experiencia navegación	Experiencia ECDIS	Comentarios
Más de 55 años	Capitán	Más de 10 años	Sin experiencia	“Suerte con la encuesta!!!”
Más de 55 años	Capitán	Más de 10 años	Entre 3 y 5 años	“SUERTE”
Entre 46 y 55 años	Piloto de 2ª	Entre 1 y 2 años	Sin experiencia	“Quizá se deberían incorporar cartas que abarquen zonas menos extensas, que sean de uso continuo en la navegación marítima”.
Entre 24 y 35 años	Alumno	Menos de 1 año	Sin experiencia	“Criterios para escoger entre una proyección u otra quizá no suficientemente aclarados”.
Entre 36 y 45 años	Piloto de 2ª	Más de 10 años	Entre 1 y 2 años	“Llevo años navegando, pero la mayor parte del tiempo haciendo navegaciones costeras de pocas millas. De ahí que no esté demasiado familiarizado con este tipo de representaciones. Un saludo”.
Entre 24 y 35 años	Piloto de 2ª	Entre 1 y 2 años	Menos de 1 año	“Si lo sé estudio un mes para la encuesta!!”
Entre 24 y 35 años	Piloto de 2ª	Entre 1 y 2 años	Entre 1 y 2 años	“Simplemente tener en cuenta que siempre cuento con el criterio de útil para la navegación, ya sea navegar propiamente dicho o para los partes meteorológicos”.
Entre 36 y 45 años	Piloto de 2ª	Entre 3 y 5 años	Entre 1 y 2 años	“Sería posible que me enviarades a puntuación por correo? denebc@hotmail.com Gracias”.
Menos de 24 años	Estudiante	Menos de 1 año	Menos de 1 año	“Espero que la realización de dita encuesta tenga utilidad, un saludo”.
Entre 46 y 55 años	Capitán	Más de 10 años	Entre 6 y 10 años	“Un saludo y ojala sea de utilidad”.
Más de 55 años	Capitán	Más de 10 años	Más de 10 años	“Sospecho que para los que durante muchos años usamos Mercator, esto puede ser un motivo de elección”.
Más de 55 años	Capitán	Más de 10 años	Sin experiencia	“En realidad en general mis elecciones están relacionadas con la proyección mercator que es la que uno esta acostumbrado a utilizar , lo que selecciono es lo que me resulta mas familiar, lo que estoy mas acostumbrado a utilizar cotidianamente en las cartas nauticas de papel”.
Más de 55 años	Capitán	Más de 10 años	Más de 10 años	“Me pareció un trabajo muy bien diseñado. Espero que ayude a obtener resultados adecuados”.
Más de 55 años	Capitán	Entre 6 y 10 años	Sin experiencia	“Muy útil e interesante. Me gustaría conocer el resultado final. Gracias!!!”.
Entre 36 y 45 años	Capitán	Más de 10 años	Entre 3 y 5 años	“Muy buena la encuesta!!, solo me parecere que hubiera sido util agregar otra pregunta relacionada a cual creeria que seria la mejor carta para trazar / visualizar una marcacion y distancia radar, bajo condiciones tales como: posicion del buque en una alta latitud, marcacion radar 090 / 270, distancia 20 millas., ya que aqui tambien influye la representacion mental que uno tiene acerca del camino que siguen las ondas radioelectricas sobre la superficie terrestre. Saludos!”.
Más de 55 años	Capitán	Más de 10 años	Más de 10 años	“NIL”.
Más de 55 años	Capitán	Más de 10 años	Sin experiencia	“Espero que sirva de ayuda mi oportación, pero debo confesar que me resultó difícil responder, me creó bastante confusión mental comparar mapas. Un saludo”.
Entre 36 y 45 años	Capitán	Entre 6 y 10 años	Entre 3 y 5 años	“Encuesta muy completa. Espero que sea de ayuda. Slds”.

Edad	Titulación	Experiencia navegación	Experiencia ECDIS	Comentarios
Más de 55 años	Capitán	Más de 10 años	Más de 10 años	“Todo parecido con la realidad es pur coincidencia, en la mar te aburres y puedes teorizar, en Puerto vas a tiro hecho”.

5.4. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Una vez realizados los principales análisis estadísticos, se ve necesario realizar una interpretación de los resultados obtenidos, en vista a formular las conclusiones del capítulo final de la presente investigación.

5.4.1 Análisis de descriptivos y varianzas

Para estructurar esta discusión se ha optado por recurrir al mismo esquema que el seguido en la encuesta, es decir, analizar los resultados pregunta a pregunta.

5.4.1.1 Datos personales

A la hora de realizar la difusión de la encuesta, se ha tratado de que la distribución de los casos en las submuestras en función de la edad fuera lo más homogénea posible. Se esperaba con ello mantener también un reparto más o menos uniforme en las otras variables independientes consideradas, aun asumiendo que debido a los tramos de edad tan amplios que se establecieron, la distribución de casos sería creciente en lo referente a titulación profesional, el sentido de estudiante a capitán, y de años de experiencia en navegación, por haberse establecido en este caso una escala con intervalos menores.

Finalmente, a pesar de que el envío de las contraseñas para cubrir la encuesta se hizo siguiendo el principio de amplitud descrito, se obtuvieron submuestras desiguales, especialmente en el caso de menores de 24 años y entre estudiantes de náutica, donde a priori se esperaba una participación mayor, y en el tramo entre 46 y 55 años. Por el contrario, en una población donde las mujeres constituyen una minoría, la participación fue mayor de la esperada, obteniéndose un 24% del total.

Las variables independientes que proporcionaron finalmente una distribución de casos más balanceada fueron la de experiencia en navegación y la de experiencia en el uso de cartas de navegación electrónica. Destacando que el análisis de comparación de medias, considerando esta última variable como factor, no arrojó ninguna diferencia estadísticamente significativa entre ellas, no ocurriendo lo mismo en el caso del resto de variables independientes.

5.4.1.2 Mapamundis

- Pregunta 1.1: Elegir la representación cartográfica que se asemeja más a la imagen mental que se tiene de la configuración de la superficie terrestre

En la pregunta 1.1, en la cual se pedía seleccionar la representación cartográfica que se asemejara más a la imagen mental que los sujetos tuvieran de la configuración de la superficie terrestre, la proyección más veces elegida (el 41,1%) fue la ortográfica centrada en $\varphi_0 = 30^\circ\text{N}$, $\lambda_0 = 000^\circ$, seguida de la de Robinson (25%), Hammer (16,5%), Mercator (14,3%) y, muy lejos de las

anteriores, Peters (1,8%) y Van Der Grinten (1,3%). La intención de esta encuesta no era analizar la imagen mental que los sujetos de la muestra tuvieran de la superficie terrestre, pero resulta interesante observar que, con una gran diferencia, esta percepción en la población de marinos mercantes es la de una forma esférica, ya que la perspectiva ortográfica es la que mejor propicia esta interpretación.

Si se analizan los datos en función de las variables independientes establecidas, se observa que la tendencia descrita no se cumple en el caso de la edad, para los dos últimos tramos. En estos casos la primacía de la proyección ortográfica no resulta tan evidente respecto a la de Mercator, llegando a igualarse en el caso de sujetos entre 45 y 55 años. También puede destacarse que tanto Hammer como Robinson igualan porcentajes. En función de la titulación profesional, esta tendencia también se observa en el caso de capitanes, y en función de la experiencia en navegación, en más de 10 años. La situación inversa se da en los sujetos entre los 24 y 45 años, y entre alumnos y estudiantes de náutica.

A falta de un estudio más completo de este aspecto, puede observarse, en términos globales, que a pesar de ser la proyección de Mercator la empleada mayoritariamente por el colectivo objeto de estudio, ésta no condiciona en gran medida su percepción de la verdadera forma de la Tierra. Sin embargo, analizando los resultados en función de la edad y de la experiencia en navegación, si se constata cierto condicionamiento de la proyección de Mercator al aumentar el contacto con la misma en el tiempo. Condicionamiento que no es suficiente para colocar a Mercator sobre la ortográfica en ninguno de los grupos considerados.

Respecto a la experiencia en ECDIS, la tendencia no es tan clara como en los supuestos anteriores, y no se ha podido deducir una explicación razonada ni una relación con el comportamiento en función de la edad y de la experiencia profesional.

- Pregunta 2.1: Valorar de 1 a 5 la capacidad de los mapamundis propuestos para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre

A la hora de analizar la capacidad de los mapamundis propuestos para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre, en la pregunta 2.1, el realizado en proyección de Robinson fue el mejor valorado (con una media de 3,63), seguido de Hammer (3,47), Goode homolosine (3,05), Van Der Grinten (2,75), Mercator (2,69) y Peters (2,13), no encontrándose diferencias estadísticamente significativas entre las medias, tomando como factores la edad, la titulación profesional o la experiencia en el uso de cartas electrónicas. En función de la experiencia en navegación, se han detectado diferencias significativas entre las medias de valoración del mapamundi realizado en proyección de Mercator. La media es mayor en 0,9 en el grupo de menos de 1 año respecto al de entre 3 y 5 años, aunque en el resto de grupos no se detecta una tendencia clara que permita establecer un patrón. Se constata así que en términos globales la población de marinos mercantes no está condicionada por la proyección de Mercator a la hora de buscar representaciones óptimas para fines no náuticos.

Habiéndose eliminado respecto a la pregunta anterior la proyección ortográfica, las dos mejor valoradas coinciden en este caso, Robinson y Hammer, ambas muy próximas en media, dejando a la de Mercator en penúltimo lugar. Sin analizar los criterios de selección, y en vista de las características comunes de los mapas seleccionados, a priori podría establecerse que la tendencia ha sido seleccionar una proyección de compromiso en primer lugar, seguida de dos equivalentes, sin embargo, tampoco puede determinarse esta última propiedad como un factor primordial, ya que la peor valorada, la de Peters, es también equivalente. Destacar en este aspecto que tanto la de Hammer como la de Goode, a

pesar de ser equiáreas, mantienen en esencia la forma de las masas continentales, por lo que puede suponerse éste un criterio con más peso que la no existencia de deformación superficial.

Los dos mapas peor valorados, Mercator y Peters, comparten la característica de tener un entramado de meridianos y paralelos compuesto por líneas rectas perpendiculares entre sí. En este sentido, ninguna de estas proyecciones representa visualmente el efecto de la convergencia de meridianos. Además, ambas presentan deformaciones muy acusadas en determinadas zonas. En el caso de Mercator la deformación superficial se dispara a altas latitudes, lo que se aprecia a simple vista comparando las superficies de Groenlandia o la Antártida (o incluso Alaska o Rusia) con el continente africano, y en Peters las deformaciones angulares son muy acusadas en las proximidades del ecuador y los polos, produciendo una considerable distorsión en la forma de las masas continentales en estas regiones.

Analizando el entramado de meridianos y paralelos en las proyecciones con medias mayores, podría establecerse la preferencia de meridianos curvos, aunque la convergencia de los mismos es relativa, ya que en el caso de Robinson no se llegan a unir en un punto. Resulta aventurado realizar conclusiones respecto a la forma de los paralelos, por considerarse necesario un estudio más profundo en este sentido, pero a priori se evidencia que la preferencia ha sido la de proyecciones con paralelos rectos o con poca curvatura (en el caso de Hammer), y con una separación desigual entre ellos, aunque no demasiado evidente visualmente, sin llegar a los extremos de Peters o Mercator, o incluso de Van Der Grinten, la cuarta en media.

- Pregunta 2.2: Valorar de 1 a 5 los criterios propuestos según su importancia a la hora de contestar a la pregunta 2.1

En la pregunta 2.2, donde se pide valorar en importancia varios criterios a la hora de contestar a la pregunta 2.1, el criterio más valorado fue el de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre (media 3,79), seguido de la forma de los accidentes geográficos y masas continentales (3,6), la superficie de los mismos (3,56), la forma de los meridianos (3,32), la forma de los paralelos (3,19) y, por último, la geometría de los límites del mapa (2,83).

Estos resultados parecen corroborar en gran medida las conclusiones establecidas a priori. Así, los encuestados establecen como criterio principal la similitud con la imagen mental que tienen de la configuración terrestre, lo que como consecuencia lógica, implica mantener en esencia la forma y superficie de las masas continentales. También reciben medias elevadas la forma de meridianos y paralelos, dando prioridad a la configuración de los primeros frente a los segundos, lo que también confirma lo establecido con anterioridad, la preferencia sobre meridianos curvos con tendencia a converger.

En el análisis de varianzas, se han detectado diferencias estadísticamente significativas en las medias de valoración de los criterios de forma de los paralelos y superficie de los accidentes geográficos en función de la edad, observándose que a menor edad (en concreto entre 24 y 35 años), la valoración de ambos criterios es mayor que en edades superiores (en concreto entre 46 y 55 años en el primer caso y en más de 56 años en el segundo). También existe significatividad en la diferencia entre medias de valoración del criterio de forma de los paralelos en los grupos entre 6 y 10 años y más de 10 años (mayor en 0,8 en el primer caso).

No parece existir un patrón claro a la hora de analizar las diferencias de medias descritas, por lo que no se deducirán conclusiones del análisis de varianza, en lo referente a los criterios seguidos por

los encuestados en la evaluación de mapamundis. Si bien, esta ausencia de patrón también podría considerarse como prueba de la universalización de los criterios en la muestra.

5.4.1.3. Atlántico Norte

- Pregunta 3.1: Valorar de 1 a 5 la capacidad de los mapas propuestos para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte

En la pregunta 3.1 se pedía valorar una serie de mapas, en función de su utilidad para representar, lo más fielmente posible, la realidad geográfica del Atlántico Norte. Aquí, la proyección con una mayor puntuación media fue la ortográfica (media 3,44), seguida de la de Mercator (3,36), estereográfica y cónica conforme de Lambert en tercer lugar, con la misma media (3,09), transversa de Mercator (2,66) y por último la gnomónica (2,35).

Una vez más, los encuestados consideran la proyección ortográfica como la que mejor permite representar la realidad geográfica. El encontrar a Mercator en segundo lugar, con una media tan próxima, parece indicar que a la hora de elaborar mapas de zonas más reducidas, el condicionamiento de esta proyección en la rutina del marino es más acusada. Téngase en cuenta además, que la combinación de colores empleada en los mapas resulta similar a la de las cartas de navegación, por lo que es posible que la asociación mental con las mismas se forzara en gran medida.

La proyección cónica conforme de Lambert y la estereográfica obtienen la misma media. Si se observan ambos mapas, se comprueba que la línea de costa de la zona representada es sumamente parecida. Si se llegaran a superponer, la diferencia entre ellas sería mínima. La única diferencia evidente se encuentra en la forma de los meridianos, rectas en la cónica y curvos en la estereográfica. La proyección transversa de Mercator presenta un gran parecido con las dos anteriores, pero su valoración media es sensiblemente inferior. Buscando las diferencias más evidentes que puedan justificar este hecho, se encuentra una curvatura mayor y más evidente a simple vista de meridianos y paralelos. También se observa de un modo más marcado que en el caso estereográfico, la separación desigual entre paralelos en el sentido de la longitud. Respecto a la baja media obtenida por la proyección gnomónica, la justificación más obvia sería la alta deformación, tanto en forma (angular) como en superficie, que sufren las zonas próximas a los límites de la carta frente al resto de representaciones. También puede mencionarse una característica común con la proyección transversa de Mercator, los paralelos al sur del Ecuador tienen su centro de curvatura en dicho hemisferio (mientras que el resto de proyecciones con paralelos curvos, lo mantienen en este caso en el hemisferio norte).

En el análisis de comparación de medias, realizado con las variables de esta pregunta, se han encontrado diferencias significativas en la valoración de la proyección estereográfica, en función de la edad, y de las proyecciones de Mercator y ortográfica en función de los años de experiencia en navegación. Tal vez sea esta última comparación, en función de la experiencia a bordo, la más clara, observándose una disminución en la media de valoración de la proyección ortográfica, de los casos sin experiencia a los de más de 10 años, de 0,9, mientras que en caso de Mercator dicha media aumenta entre los casos con experiencia entre 3 y 5 años y de más de 10 años, en 1,2.

Si se establece el orden de valoración de medias para los grupos sin experiencia y de menos de una año de experiencia, el resultado es común, con medias muy parecidas: ortográfica (medias de 3,80 y 3,60 respectivamente), estereográfica (3,33 y 3,17), cónica conforme de Lambert (3,07 y 3,13), Mercator (2,73 y 2,57), transversa de Mercator (2,67 y 2,40) y gnomónica (2,27 y 2,17). En el caso de

una experiencia mayor de 10 años el orden varía: Mercator (3,75), ortográfica (3,10), cónica conforme de Lambert (2,99), estereográfica (2,85), transversa de Mercator (2,53) y gnomónica (2,26).

Es prematuro realizar una conclusión fiable en este caso, sin analizar el resto de preguntas de la encuesta, pero puede intuirse una vez más el condicionamiento creciente de la proyección de Mercator en la población de marinos con mayor experiencia en navegación, en detrimento de la proyección ortográfica.

- Pregunta 3.2: Valorar de 1 a 5 los criterios propuestos según su importancia a la hora de contestar a la pregunta 3.1

En la valoración de la importancia de los criterios enunciados en 3.2, para contestar la pregunta 3.1, los de forma de los meridianos y forma de los paralelos tienen las mayores medias, sin apenas separación entre ellas (3,96 y 3,92, respectivamente), seguidos del de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre (3,5) y, por último, los de forma y superficie de los accidentes geográficos y masas continentales, también con medias muy próximas entre ellas (3,09 y 3,07).

Se observa que el orden de las medias de los criterios, para la toma de decisiones en la pregunta 3.1 (Atlántico Norte), se invierte respecto a la valoración de esos mismos criterios en la pregunta 2.2 (mapamundis). Mientras que en el caso de los mapamundis, los criterios de forma de meridianos y paralelos tenían las medias más bajas, a excepción del de límites geométricos del mapa (aquí no considerado por ser todos rectangulares), en la valoración de los mapas del Atlántico Norte estos obtienen las medias más altas. La media del criterio de similitud con la imagen mental de la configuración terrestre, pasa de la valoración más alta al tercer lugar, y las de los de forma y superficie de accidentes geográficos, del segundo y tercer lugar al cuarto y quinto.

El aumento, relativo y absoluto, en las medias de la valoración de los criterios de forma de meridianos y paralelos, puede tratar de explicarse analizando el servicio que presta el entramado de dichas líneas a un mapa. La función principal de meridianos y paralelos es la de referenciar los puntos del mapa respecto al sistema de coordenadas geográficas, pero no sólo de forma absoluta, sino también relativa. A simple vista, el esqueleto de un mapa permite apreciar la separación en longitud y en latitud de dos puntos de la superficie terrestre, así como estimar la diferencia entre las superficies de distintas zonas. Así, una interpretación de la variación de las medias observada, respecto a la pregunta 2.2, sería la de que en un mapamundi, el conocimiento previo de la configuración y situación relativa de los países y continentes permite intuir mejor la configuración global, incluso sin necesidad de dotar al mapa de un entramado. Sin embargo, a la hora de representar zonas de menor extensión, sin la referencia de continentes y accidentes geográficos conocidos, hace más difícil ubicar espacialmente diferencias de longitud y latitud. Por ejemplo, un entramado con meridianos convergentes permite intuir fácilmente la proximidad al polo, ofreciendo una visión más intuitiva de la verdadera forma de la Tierra. Del mismo modo, en una carta donde los paralelos no sean líneas horizontales, es necesaria su inclusión, ya que dos puntos a la misma altura no necesariamente tendrán la misma latitud.

Este razonamiento coincidiría perfectamente con los resultados obtenidos de la pregunta 2.1, donde la proyección de Mercator, como segunda en valoración, constituiría la excepción, justificada por el mencionado condicionamiento de los marinos mercantes hacia su uso.

También es de destacar que, en el análisis de comparación de medias de las valoraciones obtenidas en la pregunta 2.2, no se han encontrado diferencias significativas entre los criterios, en función de ninguno de los factores considerados.

- Pregunta 4.1: Valorar de 1 a 5 las cartas de navegación del Atlántico Norte propuestas en función de su utilidad para visualizar la diferencia entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica

En la pregunta 4.1, donde se solicitaba valorar la utilidad de una carta del Atlántico Norte para visualizar la diferencia real entre una derrota loxodrómica y una ortodrómica, la media más alta corresponde a la realizada en proyección de Mercator (media 3,41), seguida de la ortográfica (3,18), transversa de Mercator (2,99), estereográfica (2,82), gnomónica (2,81) y cónica conforme de Lambert (3,41).

En esta pregunta aparecen diferencias significativas entre las medias de las valoraciones de las proyecciones ortográfica, cónica conforme de Lambert y estereográfica, considerando como factor la edad. Entre las medias de valoración de las proyecciones de Mercator, ortográfica, cónica conforme de Lambert y transversa de Mercator, tomando como factor la titulación. Y entre las medias de las proyecciones de Mercator, ortográfica y cónica conforme de Lambert, usando los años de experiencia en navegación como factor.

Recurriendo a las tablas y gráficas del análisis de varianza realizado en el epígrafe 5.3.2, se aprecia claramente que la media de la valoración de las proyecciones ortográfica y cónica conforme de Lambert disminuye de forma acusada al aumentar la edad y el nivel de titulación profesional, así como al aumentar el número de años de experiencia en navegación. El fenómeno opuesto se da en las medias de valoración de la proyección de Mercator, respecto a titulación y experiencia en navegación.

En concreto, tomando como factor la experiencia profesional, resulta interesante realizar, al igual que en los resultados de la pregunta 3.1, una comparación de medias entre los grupos extremos. Así, en los casos sin experiencia el orden de las medias es: ortográfica (3,87), cónica conforme de Lambert (3,73), estereográfica (3,13), transversa de Mercator (3), gnomónica (2,87) y Mercator (2,80). En los casos menores de 1 año de experiencia el orden es: ortográfica (3,81), estereográfica (3,26), cónica conforme de Lambert (3,19), transversa de Mercator (3,11), gnomónica (2,81) y Mercator (2,74). Por último, en el caso opuesto, para experiencia mayor de 10 años, las medias obtenidas son: Mercator (3,83), ortográfica (3), transversa de Mercator (2,97), gnomónica (2,78), estereográfica (2,75) y cónica conforme de Lambert (2,67).

Este hecho sirve para demostrar la tendencia que se lleva apuntando a lo largo de este apartado. Al aumentar los años de navegación de los individuos (y con ellos la titulación profesional), su condicionamiento hacia la proyección de Mercator aumenta, especialmente a la hora de emplearla para un fin puramente náutico como es el de representar una derrota. La tendencia inversa se produce respecto a la proyección ortográfica, y en el caso concreto de la visualización de derrotas, también para la cónica conforme de Lambert y la estereográfica.

- Pregunta 4.2: Valorar de 1 a 5 los criterios propuestos según su importancia a la hora de contestar a la pregunta 4.1

En la pregunta 4.2, donde se debe valorar la importancia de tan solo dos criterios a la hora de contestar a 4.1, el criterio con una media mayor es el de forma de las derrotas en la carta (media 4,19),

frente al de longitud de las mismas (3,39). A pesar de que se obtiene una media tan alta en el criterio de forma de las derrotas, en la proyección de Mercator la loxodrómica, la derrota más larga, se representa como una recta, mientras que en la ortográfica como una curva, con mayor longitud que la ortodrómica, de modo que en esta proyección las representadas de las derrotas guardan una proporción mucho más próxima a la real. La explicación se relaciona con los resultados del análisis de varianza realizado en la pregunta 4.1. Si todos los sujetos valoran en gran medida la forma de las derrotas en la carta, es lógico concluir que aquellos con mayor contacto con la proyección de Mercator prefieran asumir la representación de la loxodrómica como una línea recta, frente a aquellos no tan condicionados por esta proyección, que preferirán representar ambas derrotas como curvas, con formas más próximas a las reales sobre la superficie terrestre, y siendo la loxodrómica la de mayor longitud.

En la comparación de medias entre los criterios referidos, se obtiene que tomando como factor los años de experiencia en navegación, en la valoración de la importancia del criterio de longitud de las derrotas, existen diferencias significativas entre las medias del grupo de menos de un año y los de entre 3 y 5, y más de 10, siendo la media en el primero superior a las de los segundos en 1,1 y 0,8, respectivamente.

- Pregunta 5.1: Elegir la carta de navegación del Atlántico Norte que se considere más útil para planificar una derrota ortodrómica

Finalmente, dentro de la valoración de cartas del Atlántico Norte, en la pregunta 5.1 se pedía seleccionar la carta que se considerara más útil para planificar una derrota ortodrómica, y en 5.2 la más útil para planificar una loxodrómica.

En la pregunta 5.1 la proyección más veces elegida fue la gnomónica (con un 35,3%), seguida de cerca por la de Mercator (31,3%), y a mayor distancia la transversa de Mercator (11,6%), ortográfica (5,4%), cónica conforme de Lambert (4,9%) y estereográfica (2,7%).

Analizando los resultados en función de las variables independientes, se observa que la proyección de Mercator es la más valorada en los rangos de edad de entre 46 y 55 años y más de 55 años, entre los capitanes, y entre los sujetos con más de 10 años de experiencia en navegación.

- Pregunta 5.2: Elegir la carta de navegación del Atlántico Norte que se considere más útil para planificar una derrota loxodrómica

En 5.2, la proyección de Mercator fue seleccionada un 80,8% de las veces, muy separada de la gnomónica, ortográfica, estereográfica y transversa de Mercator (todas ellas con un 2,2%), y por último la cónica conforme de Lambert (1,3%).

De los resultados de estas dos preguntas se infiere una vez más que en los rangos mayores de edad, titulación y experiencia profesional, la proyección de Mercator es la preferida para la planificación de derrotas, tanto ortodrómicas como loxodrómicas, mientras que en el resto de casos, no tan condicionados por esta proyección, las más valoradas son aquellas donde la derrota se representa como una línea recta.

Comparando los resultados de las preguntas de esta sección, se puede asumir que las preferencias en cuanto a selección de proyección no son las mismas para la visualización de derrotas que para su planificación.

5.4.1.4. Océano Pacífico

En las preguntas de esta sección se parte de descartar, para la representar el océano Pacífico, a las proyecciones gnomónica y cónica conforme de Lambert. Esta última no ha sido de las más valoradas en las representaciones del Atlántico Norte, por lo que no supondrá un problema no inclusión. Sin embargo, en el caso de la gnomónica, habrá que tener en cuenta su ausencia, al analizar los resultados de las cartas propuestas para la planificación de derrotas ortodrómicas.

- Pregunta 6.1: Valorar de 1 a 5 la capacidad de los mapas propuestos para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del océano Pacífico

En la pregunta 6.1 se solicitaba valorar de 1 a 5 la utilidad de una serie de mapas, para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del océano Pacífico. Los resultados ordenados por la media de las valoraciones fue el siguiente: Mercator (media 3,24), Mollweide (3,15), acimutal equidistante (2,95), estereográfica (2,89), ortográfica (2,36) y transversa de Mercator (2,17).

Comparando los resultados con los de la pregunta 3,1, se observa que el orden relativo entre las medias de las proyecciones de Mercator, estereográfica y transversa de Mercator se mantiene, sin embargo, la ortográfica, la que obtenía la mayor media a la hora de representar el Atlántico Norte, sufre una disminución de 1,08 en su media, cayendo ahora hasta la 5 posición. Las medias del resto de proyecciones también disminuyen, aunque la de Mercator prácticamente se mantiene.

El comportamiento descrito se puede explicar teniendo en cuenta que, en esta ocasión, la zona a representar es considerablemente mayor a la del Atlántico Norte y, por tanto, en todas las proyecciones a emplear deberán asumirse deformaciones mayores en uno u otro aspecto. Este hecho se acusa de forma especial en la ortográfica, donde las costas que bordean el Pacífico pierden su forma característica, haciéndose prácticamente irreconocibles en el caso del sudeste asiático y Sudamérica.

Respecto a las medias obtenidas por las proyecciones añadidas al estudio en el caso del Pacífico, destaca la valoración de la de Mollweide, en segundo lugar, muy cerca de Mercator. La proyección de Mollweide visualmente puede resultar de gran atractivo para un marino. Por una parte, mantiene la configuración de paralelos horizontales y, por otra, a pesar de ser equivalente, las deformaciones angulares están bastante controladas en su zona central, aumentando hacia los límites del mapa. Además, el entramado de meridianos curvos permite apreciar muy bien la proximidad al polo. También resulta de especial interés observar que la configuración del esqueleto de las cartas realizadas en proyección de Mollweide y ortográfica transversa, para la zona elegida, mantiene un gran parecido, ambos con paralelos horizontales y meridianos curvos convergentes en los polos. Así, puede suponerse que el lugar ocupado anteriormente por la proyección ortográfica en preguntas anteriores ha sido sustituido por la de Mollweide en base a un criterio de similitud de entramado y menor deformación angular y superficial en las zonas limítrofes del mapa.

En el análisis de varianza de las variables de esta pregunta, tan solo se han detectado diferencias estadísticamente significativas en las medias de valoración del mapa realizado en proyección ortográfica en función de la titulación profesional, detectándose que en sus valores extremos, entre los casos de capitán y alumno de puente, la media aumenta en un valor de 0,8. Tendencia que se observó también en la valoración de mapas del Atlántico Norte realizados en esta proyección. A pesar de no alcanzar la significatividad, puede mencionarse que en los casos sin experiencia y con experiencia menor de 1 año, la proyección de Mollweide obtiene una media mayor que la de Mercator. En concreto para estos dos grupos, las tres primeras proyecciones por orden de las

medias es Mollweide (3,40 y 3,23 respectivamente), acimutal equidistante (3,20 y 3,19) y Mercator (3,13 y 3,09).

- Pregunta 6.2: Valorar de 1 a 5 los criterios propuestos según su importancia a la hora de contestar a la pregunta 6.1

En la valoración de los criterios de la pregunta 6.2, el orden obtenido por sus medias ha sido: forma de meridianos (3,85), forma de paralelos (3,7), similitud con la imagen mental de la configuración terrestre (3,6), forma de accidentes geográficos y masas continentales (3,29) y superficie de los mismos (3,2).

Si bien es cierto que las medias han disminuido. Destaca que este orden de criterios coincida con los de la pregunta 3.2, especialmente si se tiene en cuenta que se trata de dos preguntas no consecutivas, por lo que las conclusiones obtenidas anteriormente, para las representaciones del Atlántico Norte, pueden aplicarse a las proyecciones analizadas en la pregunta 6.1 y verse corroboradas. Si bien es cierto que las medias de todos los criterios han disminuido entre un 0,1 y un 0,22, esta disminución no se considera relevante.

En el análisis de varianza de medias de la valoración de los criterios de esta pregunta, tan solo se han detectado diferencias estadísticamente significativas en el referido a forma de paralelos. Tomando como factor la edad, se observa que la media disminuye en los grupos de entre 24 y 35 años, y de entre 36 y 45 años, respecto al de entre 46 y 55 años, en un 0,81 y un 0,73, respectivamente. Sin embargo, en el resto de rangos de edad no se aprecia un comportamiento que pueda llevar a una conclusión, por lo que no se tiene en cuenta, especialmente si se considera que no se localizaron dichas variaciones en la evaluación de medias de ninguna de las proyecciones en la pregunta 6.1.

- Pregunta 7.1: Valorar de 1 a 5 las cartas de navegación del océano Pacífico propuestas en función de su utilidad para visualizar la diferencia entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica

En la valoración de las cartas del océano Pacífico para visualizar la diferencia real entre una derrota loxodrómica y una ortodrómica, de la pregunta 7.1, el orden obtenido en función de las medias es el siguiente: Mercator (media 3,46), Mollweide (3,04), acimutal equidistante (2,95), estereográfica (2,97), ortográfica (2,47) y transversa de Mercator (2,04).

Se observa aquí que el orden de valoración no varía respecto al obtenido en la pregunta 6.1, al contrario que en el caso de las representaciones del Atlántico Norte, donde sí se produjo una variación en el orden de las medias de la pregunta 4.1 respecto a la 3.1.

Respecto al análisis de la variación entre medias de las variables de esta pregunta, se han detectado varias diferencias estadísticamente significativas. En función de la edad, la media de la valoración de la proyección de Mercator aumenta de forma directa, en concreto entre el grupo de edad de menos de 24 años y el de más de 55, la media se incrementa en 1,2. En el caso de la ortográfica el comportamiento es el contrario, la media disminuye al aumentar la edad un 0,9 entre los menores de 45 años y los mayores de 55. No obstante, este comportamiento no es tan acusado como para que la ortográfica supere la valoración de la de Mercator en los tramos de menor edad. Considerando como factor la titulación profesional, se observan diferencias significativas entre las titulaciones de capitán y alumno, de modo que en la de Mercator la media disminuye un 1,1, mientras que aumenta en la acimutal equidistante un 0,7, en la estereográfica un 0,9, en la ortográfica un 1 y en la transversa de

Mercator un 0,9. Estas variaciones en las medias sí son de la entidad suficiente como para que el orden de valoración de las proyecciones varíe entre las titulaciones mencionadas. Así, en el caso de capitanes, el orden será Mercator (media 3,69), Mollweide (3,06), estereográfica (2,69), acimutal equidistante (2,64), ortográfica (2,14) y transversa de Mercator (1,78). Mientras que para alumnos de puente resulta estereográfica (3,55), acimutal equidistante (3,38), ortográfica (3,14), transversa de Mercator (2,72), Mollweide (2,66) y Mercator (2,62).

En lo referente a la experiencia profesional, también se observa un aumento significativo de la media de valoración de la proyección de Mercator de forma directa a los años de experiencia. En concreto, entre sin experiencia y los rangos de entre 6 y 10 años y más de 10, su media aumenta 1,2. En el caso de la acimutal equidistante, estereográfica y ortográfica la media disminuye. En la acimutal entre 1 y 2 años y entre 6 y 10 y más 10, disminuye 0,9 y 0,8, respectivamente. En ortográfica la media disminuye 1 entre los rangos de menos de 1 año y de más de 10.

Una vez más, la experiencia profesional es el factor donde se localizan las variaciones de medias significativas que más influyen en el orden de valoración de los mapas. Para los casos sin experiencia el orden de valoración en función de las medias es: acimutal equidistante (3,43), estereográfica (3,36), ortográfica (2,93), Mollweide (2,79), Mercator (2,57) y transversa de Mercator (2,43); para el grupo de menos de 1 año: estereográfica (3,29), acimutal equidistante (3,13) ortográfica (3,08), Mollweide (2,79), Mercator (2,57) y transversa de Mercator (2,33); y para los de más de 10 años Mercator (3,78), Mollweide (3,14), estereográfica (2,77), acimutal equidistante (2,65), ortográfica (2,09), transversa de Mercator (1,80).

Se observa que el demostrado condicionamiento de la proyección de Mercator en función de la experiencia, hace que sea la mejor valorada por el grupo de más de 10 años (al igual que en el caso de capitanes), seguida de Mollweide, posiblemente por las similitudes con ella expuestas anteriormente. Sin embargo, en los casos menos influenciados por el contacto habitual con las cartas de Mercator, los de menor experiencia en navegación o sin experiencia, las proyecciones más valoradas son la acimutal equidistante y la estereográfica, ambas con entramados parecidos y en las que la representación de las derrotas es muy similar.

- Pregunta 7.2: Valorar de 1 a 5 los criterios propuestos según su importancia a la hora de contestar a la pregunta 7.1

En la valoración de los criterios para contestar a la pregunta 7.1, el que obtuvo una media mayor es el de forma de las derrotas en la carta (media 4,14), frente al de longitud de las mismas (3,54), ambos con unas medias muy parecidas a las obtenidas por los mismos en la pregunta 4.2.

Al igual que para el caso del Atlántico Norte, a pesar de obtener una media tan alta el criterio de forma de las derrotas, en las proyecciones más valoradas, Mercator y Mollweide, la loxodrómica se representa como una recta en el primer caso, y como una curva que tiende a confundirse con una recta en el segundo. En ambos casos, además, las derrotas guardan una proporción de distancias muy alejada de la realidad. Una vez más la explicación se encuentra fácilmente en el condicionamiento de la proyección de Mercator. Después de años visualizando las loxodrómicas como líneas rectas, es lógico que esta sea la forma más reconocible para un marino con experiencia dilatada en navegación. Sin embargo, en los casos con poca o nada experiencia, la elección de las proyecciones estereográfica y acimutal equidistante, implican la visualización de las derrotas con una forma de curva, donde la ortodrómica es sensiblemente más corta y directa que la loxodrómica correspondiente.

En este caso no se han obtenido diferencias estadísticamente significativas entre las medias de las variables.

- Pregunta 8.1: Elegir la carta de navegación del océano Pacífico que se considere más útil para planificar una derrota ortodrómica

En la pregunta 8.1, la proyección más veces seleccionada fue la de Mercator (31,7%), con un porcentaje similar al obtenido en la 5.1 respecto al Atlántico Norte, aunque en aquella ocasión se encontraba en segunda posición, a continuación se encuentra la estereográfica (24,1%), y a mayor distancia la acimutal equidistante (9,4%), ortográfica (8,5%), Mollweide (7,1%) y transversa de Mercator (4,5%).

Considerando los resultados en función de los factores de edad, titulación profesional y experiencia en navegación, no se encuentran grupos en los que destaque una proyección de forma clara respecto a la de Mercator.

En la pregunta 5.1 la proyección más veces elegida para planificar una derrota ortodrómica en el Atlántico Norte fue la gnomónica (con un 35,3%). En las representaciones del Pacífico esta proyección fue sustituida, y ahora la primera ha sido la de Mercator, seguida de la estereográfica.

En este caso en ninguna de las cartas se representaba la ortodrómica como una línea recta, por lo que tal vez la selección se guió únicamente por la familiaridad con la que se representa esta derrota en la cara de Mercator. Del resto de cartas, aquella en la cual la ortodrómica se acerca más a una recta es la estereográfica, seguida de la acimutal equidistante, proyecciones que fueron valoradas en segundo y tercer lugar, respectivamente. Si se tiene en cuenta la similitud de aspecto de las cartas realizadas en estas dos proyecciones, así como el hecho de que en ellas la ortodrómica representada tiene prácticamente la misma forma, podría inferirse que de haberse eliminado una de ellas, los casos en los cuales se hubiera seleccionado habrían ido a la otra. Si se asume esto, la suma de sus porcentajes la situaría por encima de la proyección de Mercator.

- Pregunta 8.2: Elegir la carta de navegación del Atlántico Norte que se considere más útil para planificar una derrota loxodrómica

En la pregunta 8.2, la proyección de Mercator fue elegida un 65,6% de las veces, a continuación la de Mollweide (11,2%), la ortográfica, acimutal equidistante y estereográfica (todas ellas con un 2,7%), y por último la transversa de Mercator (0,4%).

Es significativo observar que en la segunda proyección más seleccionada, la loxodrómica tiende a confundirse con una línea recta.

De los resultados de estas dos preguntas, así como de los obtenidos en 5.1 y 5.2, resulta clara la preferencia de representar las derrotas como líneas rectas.

5.4.1.5. Altas latitudes

- Pregunta 9.1: Elegir la carta de navegación que se considere más útil para representar la realidad geográfica de la zona entre Tierra de Fuego y el cabo de Buena Esperanza

En la pregunta 9.1, la proyección gnomónica fue elegida un 30,4% de las veces, a continuación la ortográfica (21,9%), la estereográfica (18,8%), y por último la transversa de Mercator (13,4%).

En este caso, donde las cuatro proyecciones seleccionadas para valorar dan lugar a cartas muy parecidas, la característica diferenciadora de la proyección gnomónica es que en ella los meridianos se representan como líneas rectas convergentes en el polo. Aunque este único dato no es significativo a la hora de establecer un principio general, ya que las tres restantes son muy parecidas y mantienen entramados de meridianos y paralelos curvos, por lo que podría argumentarse que la suma de sus valores supera ampliamente a la gnomónica.

- Pregunta 9.2: Elegir la carta de navegación que se considere más útil para representar la realidad geográfica de la zona de las islas Aleutianas y el estrecho de Bering

En la pregunta 9.2, la proyección ortográfica fue elegida un 25,9% de las veces, a continuación la gnomónica (23,7%), la transversa de Mercator (17,9%), y por último la estereográfica (17%).

Aquí, las dos proyecciones más valoradas presentan meridianos representados como líneas rectas, pero también la última de ellas, la estereográfica. Comparando estos resultados con los de la pregunta anterior, la 9.2, resulta lógico inferir, con mayor seguridad, que la configuración de entramado preferida es aquella en la que los meridianos constituyen un haz de rectas convergentes en el polo.

Si se analizan los resultados tomando como factor la experiencia en navegación, se observa que en ambas preguntas (9.1 y 9.2), para los rangos de menor experiencia los sujetos muestran de forma clara predilección por la proyección ortográfica frente a la gnomónica, mientras que a partir de los 6 años de experiencia, esta tendencia se invierte.

- Pregunta 9.3: Valorar de 1 a 5 los criterios propuestos según su importancia a la hora de contestar a las preguntas 9.1 y 9.2

En la valoración de los criterios de la pregunta 6.2, el orden obtenido por sus medias ha sido: forma de los meridianos (3,77), forma de los paralelos (3,66), similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la zona representada (3,59), forma de los accidentes geográficos y masas continentales (3,28), y superficie de los mismos (3,16).

Destaca que este orden de criterios coincida con los de la pregunta 3.2 y 6.2, con medias muy parecidas.

5.4.2. Análisis de correlaciones y factorial

Debido al elevado número de variables continuas a analizar, se tuvo que trabajar con una matriz de correlaciones de 55 por 55, con 1.540 momentos demostrables y 1.485 relaciones en su triángulo superior, de las cuales tan solo 367 mostraron significatividad estadística (recogidas en el

epígrafe 5.3.1.4). De estas 367 relaciones significativas, 97 presentan un coeficiente de correlación mayor o igual a 0,10 y menor de 0,20; 32 relaciones tienen un coeficiente de correlación mayor o igual a 0,20 y menor de 0,30; 11 un coeficiente de correlación mayor o igual a 0,30 y menor a 0,40; 9 un coeficiente de correlación mayor o igual a 0,40 y menor a 0,50; 6 un coeficiente mayor o igual a 0,50 y menor a 0,60; y 5 un coeficiente de correlación entre 0,60 y 0,65 (mayor valor en la matriz).

Destaca que la gran mayoría de las covarianzas son positivas, lo que indica relaciones directas entre las variables. Por este motivo, en adelante, la dirección de las relaciones tan solo se especificará en el caso de que ésta sea indirecta.

El agrupamiento de variables en componentes, realizado en el análisis factorial del epígrafe 5.3.3, ha sido de gran utilidad a la hora de interpretar la gran cantidad de datos obtenidos de la matriz de correlaciones. Especialmente en el caso de las preguntas relacionadas con la valoración de la importancia de los diferentes criterios, propuestos en el cuestionario, a la hora de responder a las preguntas de valoración de mapas. Precisamente es entre estas variables, las de valoración de criterios de selección, donde se constatan las relaciones más intensas, por lo que será por donde comience esta discusión.

Se ha detectado un alto grado de correlación entre los grupos de variables que se detallan a continuación.

Variables asociadas a la valoración de los criterios de superficie y forma de los accidentes geográficos y masas continentales, a la hora de contestar a las preguntas de todas las zonas representadas (mapamundis, Atlántico Norte, Pacífico y zonas de altas latitudes). En este caso, la relación es más intensa entre las variables que medían lo mismo entre las diferentes zonas.

Variables correspondientes a los criterios de similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre en todas las zonas (mapamundis, Atlántico Norte, Pacífico y zonas de altas latitudes) y al de geometría de los límites del mapa.

Criterio de forma de las derrotas en la carta, para la evaluación de cartas del Atlántico Norte y Pacífico, en las que se representaba simultáneamente una derrota ortodrómica y una loxodrómica con los mismos puntos de salida y llegada.

Criterio de longitud de las derrotas en la carta para la evaluación de cartas del Atlántico Norte y Pacífico.

Hasta este momento puede concluirse que, en gran medida, los criterios citados en cada grupo tienen una fuerte vinculación entre sí, con independencia de la zona geográfica representada, lo que supone un importante punto de partida para futuros estudios, a la hora de simplificar cuestionarios similares. Las únicas variables de este tipo que parecen no cumplir este comportamiento uniforme en todas las zonas, son las correspondientes a los criterios de forma de los paralelos y forma de los meridianos. Estos criterios muestran relaciones intensas entre sí a la hora de valorar los mapamundis, los mapas del Atlántico Norte, y de forma conjunta los mapas del Pacífico y los de altas latitudes. Que el análisis factorial haya dado como resultado que los criterios de paralelos y meridianos se agrupen de este modo corrobora la tendencia señalada. Si bien es cierto que el análisis de la tabla de correlaciones indica que existen relaciones significativas entre varios de estos criterios de una zona a otra, estas son débiles. Este hecho puede deberse a que no se emplean exactamente las mismas proyecciones para cada una de las zonas a representar, pero de ser así, no debería haber tampoco una correlación tan fuerte entre las variables referidas al Pacífico y a altas latitudes. Una posible explicación es que los marinos encuestados pueden estar influenciados por la familiaridad con la zona del Atlántico Norte, especialmente si se tiene en cuenta la distribución geográfica de la muestra seleccionada.

La interpretación de la relación entre las variables que implican la valoración de mapas, tanto a través de la matriz de correlaciones como del análisis factorial, resulta mucho más complicado y menos intuitivo que el realizado hasta el momento. Sin embargo, pueden obtenerse algunas relaciones interesantes entre la valoración de diferentes proyecciones, desde el punto de vista de características comunes o diferenciadoras en los mapas resultantes.

Las variables en las que se valora la proyección de Mercator para representar el Atlántico Norte y el Pacífico, presentan un coeficiente de determinación del 0,32 (podría decirse que una de ellas explica el 32% del comportamiento de la otra).

Entre las variables en las que se valora la proyección cónica conforme de Lambert y la estereográfica para representar el Atlántico Norte existe un coeficiente de determinación de 0,30. Ambas son proyecciones conformes y, como se puede observar a simple vista en los mapas evaluados, a pesar de presentar diferencias en el entramado de paralelos y meridianos, la forma de la línea de costa y las superficies de las zonas continentales son muy similares.

En la valoración de mapas para representar el océano Pacífico las relaciones son de menor intensidad que en el Atlántico Norte. A pesar de ello, puede establecerse una correlación directa (coeficiente de determinación del 0,28) entre la proyección acimutal equidistante y la estereográfica, ambas con una configuración, tanto de entramado como de la línea de costa, muy parecida.

Destaca así que a pesar de existir correlación entre proyecciones que dan lugar a mapas con configuraciones parecidas para representar la misma zona, la única que se relaciona de forma clara entre las representaciones del Atlántico y el Pacífico es la de Mercator. Esto vendría a confirmar. Una vez más, la universalidad de la influencia de esta proyección en la percepción del marino.

Las variables en las que valora una carta del Atlántico Norte en proyección transversa de Mercator y en gnomónica, para visualizar la diferencia real entre una derrota ortodrómica y una loxodrómica, presentan un coeficiente de determinación de 0,53. La característica más evidente de forma visual que ambas cartas presentan en común es la configuración de las derrotas. En la gnomónica la ortodrómica es una línea recta y en la transversa de Mercator tiende a confundirse con una. Además, en ambas la loxodrómica se representa como una curva con una forma muy similar. Estas dos variables también presentan una correlación, aunque de mucha menor intensidad, con las cartas empleadas para representar derrotas en el Pacífico en acimutal equidistante y en estereográfica. Se destaca este hecho porque en estos dos últimos casos la derrota ortodrómica también tiende a confundirse con una línea recta.

Las variables en que se evalúa la capacidad de las proyecciones ortográfica, cónica conforme de Lambert y estereográfica también se relacionan entre sí, de forma más intensa entre las dos últimas. En todas ellas destaca que ambas derrotas se representan como curvas, siendo la ortodrómica sensiblemente más corta que la loxodrómica.

Las variables en las que se valora la proyección de Mercator para representar la diferencia entre una ortodrómica y una loxodrómica en el Atlántico Norte y en el Pacífico, se relacionan de forma directa con un coeficiente de determinación de 0,39. A su vez, ambas presentan relaciones indirectas, aunque de menor intensidad, con aquellas en las que se valoran la proyección cónica conforme de Lambert, la estereográfica, la gnomónica y la transversa de Mercator, para el mismo fin en el Atlántico Norte, y las azimutal equidistante y estereográfica en el Pacífico.

Por último, mencionar que en el Pacífico, las variables que involucran las proyecciones de Mercator y Mollweide para la visualización de derrotas presentan un coeficiente de determinación de

0,22, mientras que las variables que analizan ambas proyecciones para representar dicha zona geográfica tan solo correlacionan con un coeficiente de 0,05.

En el caso de valorar cartas para visualizar la diferencia real entre una ortodrómica y una loxodrómica, el factor determinante ha sido la forma de las derrotas, no la de la zona representada. Se comprueba que la tendencia es que surjan relaciones en función a la similitud con que se representan las derrotas, a pesar de que existan diferencias visualmente significativas entre el aspecto de la línea de costa, y aunque se estén representando áreas geográficas diferentes.

5.4.3. Análisis de los comentarios recibidos

Del análisis de todos los comentarios recibidos se puede inferir que existen varias temáticas comunes. La más útil a esta investigación es aquella en la que los comentarios muestran claramente un condicionamiento hacia las cartas en proyección de Mercator, a la hora de encarar la encuesta. En concreto, cuatro de los comentarios, todos ellos realizados por capitanes con más de 10 años de experiencia, mencionan explícitamente esta proyección. Otros cinco comentarios pueden interpretarse también como referencia al condicionamiento de la rutina a bordo, o a un enfoque tradicional de la navegación. Cuatro de los autores de los mismos tienen también más de 10 años de experiencia en navegación, de los cuales tres son además capitanes.

Respecto al resto de comentarios, la gran mayoría podría encuadrarse entre mensajes de ánimo, consejos y alusiones a la complicación que supone cubrir la encuesta en tiempo o dificultad.

CAPÍTULO VI. CONCLUSIONES Y DIRECTRICES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

6. CONCLUSIONES Y DIRECTRICES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

6.1 CONCLUSIONES

6.1.1 CONSIDERACIONES GENERALES

En el presente capítulo se establecen las principales conclusiones derivadas de la labor investigadora llevada a cabo en esta Tesis Doctoral.

En la presente Tesis doctoral, el trabajo de investigación se realizó en tres bloques claramente diferenciados:

- Establecimiento de características específicas a cumplir por una carta de navegación electrónica, tanto para fines específicos como generales.
- Propuesta de las proyecciones que mejor debieran cumplir las características establecidas en el bloque anterior y análisis comparativo de las mismas entre ellas y con los patrones tradicionales de la proyección de Mercator y gnomónica.
- Valoración de las proyecciones propuestas a través de una encuesta dirigida a marinos mercantes, que sirva para contrastar los resultados teóricos de los dos bloques anteriores.

Para el establecimiento de unas conclusiones finales globales, coherentes y justificadas, se ve necesario, a modo de argumentación, la inclusión previa de un epígrafe donde se recojan las conclusiones preliminares obtenidas en cada uno de los bloques enumerados. Este proceder no solo ayudará a la claridad expositiva, sino que también servirá como base en el establecimiento de líneas de investigación futura.

6.1.2 CONCLUSIONES PREVIAS

6.1.2.1. Conclusiones previas relativas a la valoración de las proyecciones cartográficas propuestas mediante un estudio de campo

La elección de una única proyección para la representación de cartas de navegación electrónica, es una decisión cuando menos complicada, ya que las exigencias a cumplir resultan en muchos casos incompatibles con un solo sistema de representación.

El marino en un ECDIS tendrá que trazar la derrota que ofrezca la mayor seguridad para la navegación, realizar el seguimiento de la derrota trazada llevando periódicamente sobre la carta la posición geográfica del buque y estudiar el espacio geográfico mostrado por la carta; primando en estas tres operaciones, la facilidad de asimilación de los datos geográficos y de gestión de la navegación representada en pantalla.

A la hora de elegir una proyección, al marino le interesará:

- Que la proyección sea conforme, pudiendo así identificar visualmente las direcciones en pantalla y que la línea de costa mantenga en esencia su forma.
- Que se mantenga una variación uniforme y controlada de la deformación lineal.
- Que la deformación superficial sea mínima.
- Que el entramado sea equidistante con paralelos y meridianos curvos.

- Que se aprecie la convergencia de meridianos.
- Que se mantenga una proporcionalidad con las distancias reales de las derrotas loxodrómica y ortodrómica, teniendo así que ser la ortodrómica más corta que la loxodrómica.
- Que el aspecto sea independiente de la posición del buque.

Sin embargo, las condiciones anteriormente enumeradas pierden significación si la carta de navegación electrónica es a gran escala (superiores a aproximadamente 1:150.000 considerando un monitor de 22 pulgadas), donde la característica fundamental que debería considerarse sería la necesidad de que el centro de proyección no se sitúe sobre la posición del buque, salvo que se trabaje en movimiento verdadero, de modo que la reconstrucción de la proyección se hiciera coincidir con el reseteo en pantalla de la posición.

En cartas de navegación a pequeña escala no interesaría (inferior a aproximadamente 1:600.000 considerando un monitor de 22 pulgadas) que el aspecto de la proyección fuese invariable, primaria la posibilidad de que el marino pudiera variar la zona a observar a voluntad.

6.1.2.2. Conclusiones previas relativas a la valoración de las proyecciones cartográficas propuestas mediante un estudio de campo

A la hora de proponer proyecciones para la representación de cartas náuticas electrónicas no es factible la sustitución de la proyección de Mercator. La implantación de proyecciones alternativas debería ser siempre en un ambiente de opcionalidad, que el marino pueda seleccionar en que proyección cartográfica se encuentra mejor para trabajar.

Analizando todos los requisitos a cumplir por una carta de navegación electrónica, las propuestas por orden teórico de idoneidad serán: proyección estereográfica, cónica conforme de Lambert, transversa de Mercator, ortográfica, acimutal equidistante y Mollweide.

Del análisis comparativo de las formas de los entramados de paralelos y meridianos, deformaciones y derrotas entre las proyecciones propuestas, Mercator y gnomónica se concluye:

Del análisis comparativo de las formas de los entramados de paralelos y meridianos, el marino podría elegir una proyección con un aspecto de entramado común como la transversa de Mercator, ya que puede apreciar visualmente la diferencia de latitud y longitud entre dos puntos o elegir una proyección de aspecto variable, como la estereográfica en su aspecto oblicuo, donde el entramado está compuesto por meridianos y paralelos curvos, que no siendo equidistante tienen la particularidad de que la distancia aumenta gradualmente con respecto al meridiano central; o como la proyección acimutal equidistante en su aspecto transversal o polar, la cual presenta un entramado curvo con paralelos y meridianos equidistantes. A determinadas escalas puede verse la similitud que hay entre la proyección acimutal equidistante y la transversa de Mercator, donde es de suponer que el marino descartaría la acimutal, basándose en el requisito de conformidad de la transversa.

Del análisis comparativo de las deformaciones, buscando que la proyección sea conforme con una deformación superficial mínima, sería la proyección estereográfica la que mejor cumplirá los requisitos para una carta de navegación electrónica por no presentar deformación angular y tener una deformación superficial moderada. También le podría resultar interesante al marino una proyección como la de Mollweide, la cual es equiárea y la deformación angular en toda su extensión es lo suficientemente baja como para que las masas continentales conserven en esencia su forma.

En el análisis comparativo de derrotas loxodrómica y ortodrómica resulta imposible representar cumpliendo con todos los requisitos deseados. Si se desea que la derrota ortodrómica sea más corta que la loxodrómica se elegiría la gnomónica con su inconveniente de su deformación exagerada, por el contrario, si se quiere que exista una proporción entre ambas derrotas, se elegiría la proyección de Mercator o Mollweide centradas en el medio de la zona donde se quiera visualizar la derrota, y en este caso el inconveniente sería que la loxodrómica es más corta.

6.1.2.3. Conclusiones previas relativas a la valoración de las proyecciones cartográficas propuestas mediante un estudio de campo

Vistos los resultados de la encuesta realizada, pueden concluirse una serie de patrones que se expondrán a continuación en función del tipo de mapa a elaborar.

- Mapamundis y criterios genéricos

La proyección que mejor representa la imagen mental que la población objeto de estudio tiene sobre la configuración de la superficie terrestre es la ortográfica. Si a cualquier persona se le pide que dibuje una esfera, el resultado más probable sería una proyección ortográfica. Sin embargo, algo tan evidente puede servir para refutar argumentos respecto al condicionamiento que el contacto cotidiano con una determinada proyección acaba por condicionar la imagen mental del sujeto. Tal vez, la profesión marino mercante sea la que implica un vínculo más fuerte y continuo con una determinada proyección cartográfica, la de Mercator, y ésta no influye en el resultado. Aunque tampoco puede negarse radicalmente la existencia de dicho condicionamiento, ya que se detecta que a mayor edad y mayor número de años de experiencia en navegación la proyección de Mercator se acerca a la ortográfica a la hora de percibir la realidad terrestre.

A la hora de elegir una proyección para realizar un mapamundi que refleje lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre, la elegida fue la de Robinson, seguida de cerca por Hammer. Se corrobora así que la población de marinos mercantes no está condicionada por la proyección de Mercator a la hora de buscar representaciones óptimas para fines no náuticos. Es más, incluso podría decirse que son conscientes de la limitación de esta proyección para realizar mapamundis.

En el estudio realizado se han analizado tan sólo seis mapamundis, y a pesar de que éstos fueron seleccionados con gran cuidado de incluir características diferenciadoras, las conclusiones que se extraen respecto a su valoración absoluta deben tratarse con precaución. Con todo, se está en posición de establecer una serie de directrices comunes a la hora de construir un mapamundi para un fin genérico. Se daría prioridad al mantenimiento de la similitud con la imagen mental de la configuración geográfica terrestre. A continuación, por orden de preferencia, debería buscarse minimizar tanto las deformaciones superficiales como angulares a lo largo de todo el mapa. Sería preferible el uso de meridianos curvos, con la concavidad hacia el meridiano central del mapa, lo que favorecería la representación de su convergencia hacia los polos. Los paralelos deberían ser rectas o curvas con muy poca curvatura, y con una separación entre ellos no necesariamente igual, pero sin grandes diferencias. Respecto a la forma de la geometría de los límites exteriores del mapa, no parece tener gran relevancia, pero en vista de los resultados podría intuirse una predilección por una forma elíptica.

- Cartas de navegación para fines generales

Mientras que a la hora de elaborar mapas para fines no náuticos, la influencia en la muestra seleccionada de la proyección de Mercator es mínima, se concluye que ésta condiciona enormemente la elección de una proyección para la representación de una carta de una zona concreta de la superficie terrestre, así como para visualizar derrotas y planificarlas, especialmente en función de los años de experiencia en navegación. Esta conclusión puede parecer una obviedad, pero debe hacerse notar que no existe un estudio previo que lo haya constatado y cuantificado de forma científica.

Destaca también el hecho de que para casos sin experiencia en navegación o con menos de un año de experiencia, la proyección de Mercator parece no influir en absoluto, aun considerando el contacto que tienen con la misma durante toda la duración de sus estudios universitarios.

En vista de lo anterior, y teniendo en cuenta que la finalidad de esta Tesis Doctoral es la de buscar alternativas a la proyección de Mercator, pero nunca proponer su eliminación, en adelante se centrará el establecimiento de conclusiones respecto a proyecciones diferentes a ésta, prestando especial atención a la segregación en función de la experiencia del usuario.

A la hora de elaborar una carta para representar una zona concreta a nivel oceánico, tal y como podría ser el Océano Atlántico³¹⁴, las proyecciones mejor valoradas fueron la ortográfica y la de Mercator. Para representar zonas mayores, que abarquen prácticamente un hemisferio completo, como por ejemplo una carta en la que se incluya todo el Océano Pacífico, la ortográfica se ve sustituida en los resultados de la encuesta por la proyección de Mollweide, especialmente en los rangos de menor experiencia profesional.

La proyección de Mollweide podría considerarse a la hora de sustituir a la de Mercator, por las características comunes que presentan ambas, pero si se trata de buscar una alternativa a la ortográfica, sería preferible optar por las siguientes en valoración, la acimutal equidistante y la estereográfica, por afinidad de caracteres.

También destacar que la cónica conforme de Lambert obtuvo una valoración general media, siendo la menos afectada por variaciones en el factor experiencia y finalidad de la carta.

Al respecto, añadir que los resultados de valoración de las proyecciones estereográfica presenta una fuerte correlación con la cónica conforme de Lambert (más intensa) y la acimutal estereográfica, pero no estas dos últimas entre sí. Por tanto, sería posible complementar la primera con alguna de las segundas, pero no estas dos entre sí

En la determinación de los criterios a tener en cuenta para construir una carta para visualizar una determinada zona geográfica, se obtuvo un orden inverso de importancia frente a los considerados para la elaboración de mapamundis. Así, el orden en este caso sería: forma de los meridianos y forma de los paralelos, similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre y, por último, los de forma y superficie de los accidentes geográficos y masas continentales.

El esqueleto de un mapa permite apreciar la separación en longitud y en latitud de dos puntos de la superficie terrestre, así como estimar la diferencia entre las superficies de distintas zonas. Así, se concluye que en un mapamundi el conocimiento previo de la configuración y situación relativa de los países y continentes permite intuir mejor la configuración global, incluso sin necesidad de dotar al mapa de un entramado. Sin embargo, a la hora de representar zonas de menor extensión, sin la referencia de

³¹⁴ Como ejemplo, las cartas del Atlántico Norte empleadas en la encuesta, y que pueden verse en el Anexo I, se realizaron en una escala media de 1:25.000.000 para el centro de proyección, considerando un monitor de 22 pulgadas en formato 4:3.

continentes y accidentes geográficos conocidos, resulta más difícil ubicar espacialmente diferencias de longitud y latitud. Un entramado curvo, con meridianos convergentes, permite intuir fácilmente la proximidad al polo, ofreciendo una visión más intuitiva de la verdadera forma de la Tierra. Del mismo modo, en una carta donde los paralelos no sean líneas horizontales, es necesaria su inclusión, ya que dos puntos a la misma altura no necesariamente tendrán la misma latitud.

En el caso de valorar cartas para visualizar la diferencia real entre una ortodrómica y una loxodrómica, se ha detectado que el factor determinante ha sido la forma de las derrotas, no la de la zona representada, aunque de forma mucho menos acusada entre casos con poca experiencia en navegación o sin ella. Se comprueba que la tendencia es que surjan relaciones en función a la similitud con que se representan las derrotas, a pesar de que existan diferencias visualmente significativas entre el aspecto de la línea de costa, y aunque se estén representando áreas geográficas diferentes. También puede concluirse que se da prioridad a la forma de las representadas de las derrotas frente a su longitud. Aquellos con mayor contacto con la proyección de Mercator prefieren asumir la representación de la loxodrómica como una línea recta, frente a aquellos no tan condicionados por esta proyección, que prefieren representar ambas derrotas como curvas, con formas más próximas a las reales sobre la superficie terrestre, y siendo la loxodrómica la de mayor longitud.

En este caso cobra mayor relevancia la proyección transversa de Mercator y la cónica conforme de Lambert. También se ve, especialmente en los grupos con una mayor experiencia profesional en la mar, que para este fin concreto la proyección estereográfica resulta de más utilidad que la acimutal equidistante.

En vista a que resulta inviable proponer una proyección diferente para dos aplicaciones tan comunes como la visualización de una carta con o sin derrotas, los datos obtenidos en este caso servirán para ajustar el orden de idoneidad entre proyecciones, pero no para hacer una propuesta independiente.

- Cartas de navegación para la planificación de derrotas

En la evaluación de cartas para la planificación de una derrota, tanto loxodrómica, como ortodrómica, los resultados fueron concluyentes y apartados completamente de los obtenidos en el resto del estudio. Globalmente, se busca que la derrota a representar sea una línea recta. De forma particular, en los sujetos con mayor experiencia profesional, la forma de la derrota es indiferente, optando de forma clara por la proyección de Mercator.

En vista a los resultados, y a que el trabajo de trazado y planificación de la derrota difiere metodológicamente en gran medida de las labores de control y visualización, puede para este caso particular hacerse una excepción y romper el principio buscado de universalidad a la hora de hacer las propuestas de proyecciones.

Así, las proyecciones propuestas para la planificación de derrotas deberían diferir según se trate de navegar por ortodrómica o por loxodrómica. En el primer caso, siempre que la extensión de la zona a representar lo permita, la primera opción sería la proyección gnomónica, seguida de la estereográfica. Para el caso de navegación por loxodrómica, la opción más clara sería la proyección de Mercator, no existiendo en este caso una propuesta alternativa.

- *Cartas de navegación para zonas polares*

Para zonas polares los resultados no han sido concluyentes, ya que todas las proyecciones empleadas dan lugar a mapas muy parecidos, por lo que podría emplearse cualquiera de las acimutales. En todo caso, parece existir una leve predilección hacia la proyección ortográfica en su aspecto polar.

6.1.3 CONCLUSIONES FINALES

6.1.3.1. Propuesta de criterios para la elección de proyecciones cartográficas alternativas a la de Mercator para la elaboración de cartas de navegación electrónica

En vista a los criterios establecidos de forma teórica en el capítulo 3 de la presente Tesis Doctoral, y al necesario ajuste en los mismos derivado del estudio de campo descrito en el capítulo 5, se está en condiciones de concluir una serie de criterios universales, ordenados importancia, de deseable cumplimiento a la hora de buscar una proyección cartográfica para la representación de una carta de navegación electrónica. Estos se podrían enumerar como sigue:

- Necesaria inclusión del entramado en la carta en el nivel de representación de información mínima.
- Ortodrómicas representadas como curvas de menor curvatura (más cortas) que las loxodrómicas correspondientes.
- Meridianos curvos con tendencia a converger en el polo, manteniendo la concavidad hacia el ecuador.
- Paralelos curvos, con tendencia a la equidistancia (necesaria separación desigual, pero con una variación uniforme y minimizada al máximo).
- Similitud con la imagen mental de la configuración geográfica de la superficie terrestre
- Conformidad o deformación angular mínima y deformación superficial controlada.

Estos criterios están formulados hacia la representación de cartas de punto menor, pensadas para la visualización de mares u océanos. Para escalas mayores estos criterios pierden significación, pero serían perfectamente aplicables. Sin embargo, para el caso de desear representar la totalidad de la superficie terrestre, debería realizarse un pequeño ajuste en la propuesta anterior del siguiente modo:

- Similitud con la imagen mental de la configuración geográfica terrestre
- Deformación superficial y angular mínima. Proyecciones de compromiso.
- Meridianos curvos, con la concavidad hacia el meridiano central del mapa.
- Paralelos deberían ser rectas o curvas con muy poca curvatura, y con una separación entre ellos no necesariamente igual, pero sin grandes diferencias.
- Forma geométrica de los límites del mapamundi con tendencia elíptica, orientando el eje mayor en la horizontal.

Para representaciones cuya única finalidad sea la de planificar una derrota, todos los criterios enunciados pierden relevancia ante el criterio único de representar la trayectoria a seguir como una línea recta, o como una curva con la menor curvatura posible.

6.1.3.2. Propuesta de proyecciones cartográficas alternativas a la de Mercator para la elaboración de cartas de navegación electrónica

Se ha demostrado el importante condicionamiento directo de los marinos mercantes hacia la proyección de Mercator en función de los años de experiencia en navegación. También que éste es prácticamente inexistente, en alumnos y estudiantes de náutica sin experiencia o con menos de un año de experiencia. En esta situación, cualquier cambio en la proyección con la cual un ECDIS muestre una carta náutica en pantalla, siempre deberá ser en cualidad de opcionalidad, con el fin de que se produzca la reprogramación cognitiva de los navegantes de forma continua a lo largo del tiempo. En base a este planteamiento, se considera interesante realizar las propuestas en función del usuario de destino, en función de este factor de experiencia.

En general, puede concluirse que, para sujetos con poca o ninguna experiencia en navegación (en concreto se constata para menos de 1 año), las alternativas a Mercator para la realización de cartas de navegación por orden de idoneidad, y sin considerar su función, son:

- Ortográfica (limitada por la superficie a representar).
- Estereográfica.
- Acimutal equidistante.
- Mollweide.

En el resto de casos, donde el usuario tenga una experiencia profesional mayor, la propuesta es:

- Ortográfica (limitada por la superficie a representar).
- Mollweide.
- Cónica conforme de Lambert.
- Estereográfica.

Las propuestas realizadas podrían aplicarse a cualquier representación de carta electrónica independientemente de su finalidad. Sin embargo, dados los resultados de la investigación realizada, también se concluye que para las operaciones relacionadas con el trazado y planificación de una derrota loxodrómica, la única proyección de Mercator alternativa propuesta sería la de Mollweide. Mientras que para una derrota ortodrómica, se propone la proyección gnomónica (limitada por la superficie a representar), aunque sería perfectamente válida cualquiera de las acimutales enumeradas anteriormente (ortográfica, estereográfica y acimutal equidistante), siempre y cuando su centro se encontrara lo suficientemente próximo a la derrota como para que su representación tendiera a confundirse con una recta.

No sería viable dotar a un sistema de carta electrónica con un número elevado de proyecciones en régimen opcional, ya que podría generar importantes errores conceptuales en su interpretación. Debiéndose llegar, por tanto, a una situación de compromiso, donde se propongan alternativas en régimen de universalidad.

En esta situación, y ya que las proyecciones enumeradas presentan en ocasiones características muy diferentes, las propuestas finales serán las siguientes:

- Proyección ortográfica complementada con estereográfica.
- Proyección cónica conforme de Lambert, considerando la estereográfica polar y la de Mercator como casos particulares.

La primera de las propuestas, el operador podría visualizar una representación a muy baja escala en proyección ortográfica, la cual podría, mediante un control adecuado, girar en el espacio en la dirección este oeste alrededor del eje geográfico, y en la dirección norte sur en torno al eje intersección del plano del ecuador con el del cuadro. De este modo sería posible centrar el área de interés. Esto no requeriría una gran carga para el procesador de la CPU del ECDIS, ya que a tan pequeña escala, la base de datos a cargar se limitaría a la línea de costa, los límites gráficos de las cartas y alguna información alfanumérica, con una definición muy baja.

A partir de ahí, se podría acercar o alejar la imagen hasta obtener la visualización deseada.

Si se quisiera obtener una carta de una zona tan amplia que la proyección ortográfica perdiera utilidad³¹⁵, mediante otro control, el usuario podría acercar el vértice de proyección al cuadro del plano, manteniendo una proyección negativa, para optimizar la representación a la zona a representar, y teniendo su límite en el caso estereográfico.

Este planteamiento también podría aplicarse a las representaciones para el trazado de derrotas ortodrómicas, ya que al centrar la zona sobre la que se va a trabajar, necesariamente el centro de la proyección estará lo suficientemente cerca de la ortodrómica directa, como para que ésta se represente con muy poca curvatura, y menor longitud que la loxodrómica correspondiente. Si por el contrario se quisiese planificar una loxodrómica, tan solo habría que mover el centro de la proyección acercándolo al punto de latitud media, para que la línea de rumbo vea reducida su curvatura, si bien es cierto que, salvo casos particulares, no llegaría a ser una línea recta.

El principal inconveniente de esta propuesta sería su uso en el control de la navegación, en escalas muy altas. En ese caso la lógica indicaría situar el centro de la proyección sobre la posición del buque, pero esto haría que la carta se re proyectara de forma continua, y podría saturar el procesador del sistema. Sin embargo, para escalas tan altas, la variación en el centro de la proyección sería imperceptible, por lo que podría hacerse de forma programada en intervalos de tiempo determinados, o en función de la distancia al mismo.

La segunda solución propuesta pasaría por tomar como proyección base la cónica conforme de Lambert, considerando la de Mercator y estereográfica como casos particulares, según el paralelo central coincida con el Ecuador o con un polo geográfico. En este caso el operador actuaría sobre el paralelo central, modificándose su latitud de forma automática al centro de la zona visualizada en pantalla. En este caso, a medida que dicho paralelo se acercara al Ecuador, la configuración de la carta iría aproximándose a la de Mercator, hasta que se transformaría en ella alcanzada la latitud 00°. El mismo efecto se produciría al acercarse a un polo, pero esta vez convirtiéndose en una proyección estereográfica.

6.1.3.3. Conclusiones derivadas

No era intención de esta Tesis profundizar en aspectos de cartografía general, pero en vista de los resultados obtenidos, se está en condiciones de establecer una serie de conclusiones que podrían servir de base a futuras líneas de investigación.

Así, considerando las particularidades de la profesión de marino mercante, podría concluirse que en un colectivo con conocimientos de cartografía por encima de la media, y con un contacto diario con una proyección concreta, la de Mercator, se observa que:

³¹⁵ véanse como ejemplo las cartas del océano Pacífico analizadas en la encuesta del Anexo I.

- La imagen mental de la configuración de la superficie terrestre se ve condicionada parcialmente en función de la experiencia, pero no lo suficiente como para distorsionarla.
- No se ven influenciados por una proyección concreta en la elección de un sistema proyectivo para representar la totalidad de la superficie terrestre.
- La experiencia profesional es el factor decisivo que marca el condicionamiento por una proyección concreta, no la formación académica.

También, dentro del ámbito de la cartografía general, puede concluirse que la proyección óptima para la construcción de un mapamundi para fines generales deberá cumplir los siguientes requisitos, orden de criticidad:

- Minimizar tanto las deformaciones superficiales como angulares a lo largo de todo el mapa. Buscando proyecciones de compromiso o equivalentes con deformaciones angulares controladas.
- Meridianos curvos con la concavidad hacia el meridiano central del mapa.
- Los paralelos representados como líneas rectas o curvas con muy poca curvatura, y con una separación entre ellos no necesariamente igual, pero sin grandes diferencias y una variación homogénea.
- Forma geométrica de límites exteriores del mapa con tendencia elíptica, y mayor amplitud horizontal que vertical.

6.2 DIRECTRICES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Hasta hace tan solo dos décadas, la cartografía náutica impresa se encontraba en un punto de optimización que pocas ciencias particulares alcanzaban en aquel momento, lo que limitaba enormemente el establecimiento de líneas de investigación innovadoras. Todo cambió con la aparición de los ECDIS a bordo. El radical cambio metodológico y conceptual que supuso la aplicación de la cartografía electrónica a la navegación marítima, trajo consigo un horizonte abierto a la investigación, replanteándose conceptos que permanecían inmutables desde hace siglos y que se consideraban axiomáticos. En este ambiente han sido muy pocos los investigadores que se han atrevido a cuestionar la proyección de Mercator, y no hay constancia de que ninguno de ellos haya realizado un estudio de campo como el contenido en la presente Tesis Doctoral.

En este ambiente tan poco explotado, el establecimiento de nuevas líneas de investigación no resulta, a priori, prometedor. Así, podrían citarse las siguientes:

- La línea de investigación más factible en el momento de finalizar la presente, es ampliar el estudio de campo realizado, aprovechando la encuesta web todavía operativa, a otras poblaciones, con el fin de obtener resultados comparativos. Así, a corto plazo se presente:
 - Ampliar la muestra actual con marinos de la sección de máquinas, que permitan establecer comparaciones con un grupo de similar nivel académico, pero conocimientos de cartografía básicos.
 - Acceder a la población de pilotos de aeronaves.
 - Acceder a la población de marinos de la armada.

- Acceder a una población de público general con conocimientos heterogéneos de cartografía.
- En base a la experiencia acumulada, también sería factible realizar una nueva investigación, tomando como punto de partida las conclusiones establecidas, y diseñando un nuevo instrumento de medida que parta de hechos demostrados:
 - El factor que mejor explica las variaciones dentro de la muestra es la experiencia profesional.
 - Existe homogeneidad de criterios en la valoración de las proyecciones cartográficas empleadas para realizar cartas de navegación, con independencia de su finalidad, excepto en el caso de planificación de derrotas.
 - Debe tenerse en cuenta la familiarización de la muestra con la zona geográfica a representar, y sería deseable poder determinar y cuantificar su efecto.
- En vista de las conclusiones obtenidas en el ámbito de la cartografía general, otra posible línea de investigación pasaría por evaluar la percepción cognitiva de la imagen mental de la realidad geográfica en una población genérica, pudiéndose así replantear el uso de determinadas proyecciones en la elaboración de mapas en campos tan variados como la educación o la divulgación científica.
- Evaluar la aplicación práctica de las dos soluciones propuestas mediante el desarrollo de un programa de software, que permitiera llevar a la práctica las conclusiones establecidas.
- Análisis de la aplicabilidad de sistemas de cartografía electrónica a la navegación aérea. Actualmente, los pilotos de líneas aéreas todavía emplean cartografía impresa, que debe mantenerse actualizada al inicio de cada vuelo. Las limitaciones físicas de espacio en las cabinas de los aviones existentes, imposibilita la integración de la cartografía electrónica en ellas a las escalas requeridas, ya que se necesitaría una pantalla demasiado grande. En muchas líneas aéreas se ha comenzado a transformar todo el material impreso (excepto las cartas) a formatos electrónicos que los pilotos tienen disponible en todo momento a través de una tableta. Éstos a su vez demandan una solución práctica que les permita desprenderse de todo el papel a bordo. Sería de gran interés en este caso abrir una línea de investigación donde se evaluaran diferentes alternativas para lograr la sustitución de la cartografía impresa por electrónica, aun en formatos de pantalla tan reducidos.
- Detección de limitaciones en la funcionalidad de los actuales equipos de ECDIS y propuesta de funciones nuevas, basándose en desarrollos que ya se emplean en programas de GIS. Con la experiencia acumulada en el manejo del ECDIS y de diferentes programas de GIS evaluados, se está en condiciones de afirmar que sería posible obtener un mayor rendimiento funcional de los ECDIS, aplicando ideas y soluciones ya existentes en los SIG. Como ejemplo, y dada la temática de este estudio, sería factible crear equipos ECDIS en los cuales pudiera modificarse la proyección cartográfica en la cual se muestra la carta en pantalla.

CAPÍTULO VII. BIBLIOGRAFÍA

7. BIBLIOGRAFÍA

7.1. BIBLIOGRAFÍA GENERAL

Allan, Arthur: *Maths for map makers*, Whittles Publishing, Caitness, 2nd edition 2004.

Adsuar, Joaquín C.: *Navegación Aérea. Conocimientos teóricos para la licencia del piloto privado*, Editorial Paraninfo, Madrid, 3ª edición 2009.

Baselga Moreno, S.: *Fundamentos de Cartografía Matemática*, Editorial Universidad Politécnica de Valencia, 2006.

Bowditch, Nathaniel: *The American Practical Navigator*, National Imagery and mapping Agency, Bethesda, Maryland, 2002 bicentennial edition.

Canter, Frank: *Small-scale map projection design*, Taylor & Francis, London 2002.

Capasso, Ideale; Fede, Sergio: *Navigazione. Volume Primo*, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 7ª edizione 1981.

Crampton, Jeremy W.: *Mapping: a critical introduction to cartography and GIS*, Willey-Blackwell, Oxford 2010.

Crone, G. R.: *Historia de los Mapas*, Fondo de Cultura Económica, México, 1ª edición 1956.

Delmelle, Eric M.: *Map Projection Properties: considerations for small-scale GIS applications*, thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Arts, Department of Geography, State University of New York, Buffalo, septiembre 2001.

Dodge, Martin; Kitchin, Rob; Perkins, Chris: *Rethinking Maps. New frontiers in cartographic theory*, Routledge, London and New York, 2011.

Dollfus, Olivier: *El Espacio Geográfico*, Ediciones oikos-tau, Barcelona, 3ª edición 1990.

Dorling, Daniel; Fairbairn, David: *Mapping: ways of representing the world*, Pearson Education Limited, Essex, 1997.

Figueroa, Fernando: *Apuntes de cartografía aplicados a la navegación aérea*, Editorial Aeronáutica SUMAAS, Madrid 1977.

Fisher, Dennis: *Latitude Hooks and Azimuth Rings. How to Build and Use 18 Traditional Navigational Tools*, International Marine-McGraw-Hill, Camden, Maine 1995.

Fossi Gutierrez, Ignacio: *Tratado de Náutica. Libro II: navegación astronómica y radionavegación*, Editorial Dossat S.A., Madrid 1949.

Franco Rey, Jorge: *Nociones de topografía, geodesia y cartografía*, Universidad de Extremadura, Servicio de Publicaciones, Cáceres 1999.

Frederick Pearson, II, M.S., P.D.D.: *Map Projections: Theory and Applications*, CRC Press, Florida 1990.

Gabers, Karl: *La matemática y la astronomía en la edad media islámica*, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Publicaciones del Instituto Jorge Juan de matemáticas, Madrid 1954.

García Franco, Salvador: *Historia del Arte y Ciencia de Navegar. Desarrollo histórico de «los cuatro términos» de la navegación*. Tomo segundo, Instituto Histórico de Marina, Madrid, 1947.

García Franco, Salvador: *Instrumentos Náuticos en el Museo Naval*, Imprenta del Ministerio de Marina, Madrid 1959.

Garson, David; Biggs, Robert S.: *Analytic mapping and geographic databases*, Sage Publications Inc., London, 1992.

Gaur, Ajai S.; Gaur, Sanjaya S.: *Statistical Methods for Practice and Research*, Response Books, New Delhi, 2009.

Gomez Teixeira, Francisco: *História das matemáticas em Portugal*, Biblioteca de Altos Estudos, Academia das Ciencias de Lisboa, Lisboa, 1934.

Gonzalez Bethencourt: *Navegación*, Escuela Nacional de Náutica de Manuel Belgrano, 3ª edición 1985.

Hager, John W.; Behensky, James F.; Drew, Brad W.: *The Universal Grids: Universal Transverse Mercator (UTM) and Universal Polar Stereographic (UPS)*, Defense Mapping Agency, Fairfax, Virginia, 1989.

Harvey, Francis: *A primer on GIS*, The Guilford Press, New York, 2008.

Howitt, Dennis; Cramer, Duncan: *Introduction to SPSS Statistics in Psychology*, Pearson Education Limited, Harlow, 2011.

International Hydrographic Organization: *Manual on Hydrography*, International Hydrographic Bureau, Monaco, 2005.

Iliffe, Jonathan: *Datums and map projections for remote sensing, GIS and surveying*, Whittles Publishing, Caithness, 2003.

Joly, Fernand: *La cartografía*, Ariel S.A., Barcelona, 1982.

Kraak, Menno-Jan; Ormeling, Ferjan: *Cartography: Visualization of Geospatial Data*, Pearson Education Limited, Harlow, third edition 2011.

Laguarda Trias, Rolando A.: *La aportación científica de mallorquines y portugueses a la cartografía náutica en los siglos XIV al XVI*, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Instituto Histórico de Marina, Imprenta del Ministerio de Marina, Madrid 1964.

Leyshon, Peter R.; Lisle, Richard j.: *Stereographic projection techniques in structural geology*, Butterworth-Heinemann Ltd., Oxford, 1996.

López Varela, Pablo: *Análisis de Idoneidad de las Derrotas empleadas en Navegación Marítima sobre las Proyecciones de Mercator, Gnomónica y Estereográfica*. Tesis Doctoral, Departamento de Energía y Propulsión Marina, Universidad de A Coruña, 2005.

Maling, D.H.: *Coordinate systems and Map Projections*. Georges Philip and Son Limited. London, 1973.

Marques de Sá, Joaquim P.: *Applied Statistics Using SPSS, STATISTICA, MATLAB and R*, Springer, Berlin, 2007.

Martín Asín, Fernando: *Astronomía*, Editorial Paraninfo, Madrid 1979.

Martín Asín, Fernando: *Geodesia y cartografía matemática*, Editorial Paraninfo, Madrid 1990.

Martín López, José: *Cartografía*, Colegio Oficial de Ingenieros Técnicos en Topografía, Madrid 1999.

Martín López, José: *Historia de la cartografía y de la topografía*, Centro Nacional de Información Geográfica, Madrid 2002.

Martín Meras, Luisa; Casado Soto, José Luis; Ferrer Torio, Rafael; Silvio Cervera, Fernando; Turiel Peredo, Fermín; Piña Patón, Benjamín: *La imagen del mundo. 500 años de cartografía*, Instituto Geográfico Nacional-Centro Nacional de Información Geográfica-MOPT, Madrid 1992.

Meyers, Lawrence S.; Gamst, Glenn C.; Guarino, A.J.: *Performing data analysis using IBM SPSS*, John Wiley & Sons, Inc, New Jersey, 2013.

Millán Gamboa, José Manuel: *Cartografía náutica*, JM Ediciones Cádiz, 2006.

Ministry of Defence: *Admiralty Manual of Navigation. Volume I*, Her Majesty's Stationery Office, London, Revised edition 1987.

Monmonier, Mark: *Mapping it out*, The University of Chicago Press, Chicago, 1993.

Monmonier, Mark: *How to lie with maps*, The University of Chicago Press, Chicago, 1996.

Moreu Curbera; Martínez Jiménez: *Astronomía y Navegación. Tomo II*, Artes Gráficas Galicia – Librería San José, Vigo 1975.

Moreu Curbera; Martínez Jiménez: *Astronomía y Navegación. Tomo III*, Librería San José, Vigo 1972.

Moya Honduvilla, Javier; Bernabé Poveda, Miguel Ángel: *Descubrir la cartografía aeronáutica*, Centro de Documentación y Publicaciones de Aena, Madrid, 2011.

Nash Parker, Robert; Asencio, Emily K.: *GIS and Spatial Analysis for the Social Sciences*, Taylor & Francis, Oxon, 2009.

Noble Wilford, John: *The Mapmakers*, Alfred A. Knopf, New York, revised edition 2000.

Pires Miguens, Altineu: *Navegação: A Ciência e a Arte. Volume II, Navegação astronômica e derrotas*, Ministerio da Marinha do Brasil, Diretoria de Hidrografia e Navegação, Rio de Janeiro 1999.

Rachad, Antonius: *Interpreting Quantitative Data with SPSS*, SAGE Publications, London, 2003.

Raisz, Edwin: *Principles of cartography*, McGraw-Hill, New York, 1962.

Raisz, Edwin: *Cartografía General*, Ediciones Omega, Barcelona, 7ª edición 1985.

Real, Domingo José: *Manual de conocimientos marinos*, Editorial Guardacostas, Buenos Aires, 3ª edición 2002.

Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P.; A. Trejo, C.: *Análisis Matemático. Volumen II*, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 7ª edición 1968.

Ribera Y Uruburu, Luis de: *Tratado de Navegación*, Imprenta y estereotipia de “El Correo Gallego”, Ferrol, 2ª edición 1907.

Robinson, Arthur H.; Sale, Randall D.; Morrison, Joel L.; Muehrcke, Phillip C.: *Elementos de cartografía*, Ediciones Omega S.A., Barcelona, 1987.

Rosenfeld, B. A.; Sergeeva, N. D.: *Lecciones populares de matemáticas: Proyección Estereográfica*, Editorial MIR, Moscú 1977.

Rossignoli, J.L.; Dalda, A.: *La Proyección Universal Transversa Mercator (UTM) y su Correspondiente Cuadrícula (CUTM) en la Cartografía Militar*. Servicio Geográfico del Ejército. Sección de Geodesia, Madrid, 1975.

Rossignoli, J.L.; Dalda, A.; Boyero, F.: *Proyección Universal Transversa de Mercator. Volumen I. Sistemas Conformes. Proyección UTM, Cuadrículas y Sistemas de Referencia*, Talleres del Servicio Geográfico del Ejército, Madrid, 1976.

Sanjosé Blasco, J.J.; García León, J.; López González, M.: *Introducción a las ciencias que estudian la geometría de la superficie terrestre: geodesia, cartografía, fotogrametría, topografía*, Bellisco Ediciones Técnicas y Científicas, Madrid, 2000.

Sellés, Manuel: *Instrumentos de navegación. Del Mediterráneo al Pacífico*, Lunwerg Editores, Madrid 1994.

Sevilla, M.J: *Cartografía Matemática*, Madrid, 1986.

Shalowitz, Aaron L.: *Shore and sea boundaries, Volume II*, U.S. Department of Commerce, Coast and Geodetic Survey, U.S. Government Printing Office, Washington, 1964.

Snyder, John P.: *Map Projections - A Working Manual*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington 1987.

Snyder, John P.; Voxland, Philip M.: *An Album of Map Projections*, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, United States Government Printing Office, Washington 1989.

Snyder, John P.: *Flattening the Earth, Two thousand years of map projections*, The University of Chicago Press, Chicago, 1993.

Snyder, John P.; Bugayevskiy, Lev M.: *Map Projections: A Reference Manual*, Taylor and Francis Inc., Bristol, London 1995.

Snyder, John P.; Steward, Harry: *Bibliography of Map Projections*, U.S. Geological Survey Bulletin 1856, U.S. Geological Survey 1997.

Tobler, Waldo Rudolph: *Map Transformations of Geographic Space*, thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, University of Washington, 1961.

Visauta Vinacua, Bienvenido: *Análisis estadístico con SPSS 14*, McGraw-Hill, Madrid, 2007.

VV.AA.: *Apuntes de cartografía. Fascículo primero, Clasificación, Deformaciones, Proyecciones perspectivas y centrales*, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1970.

VV.AA.: *Apuntes de cartografía. Fascículo segundo, Proyecciones cónicas propiamente dichas y mericónicas. Proyecciones cilíndricas y mericilíndricas*, Servicio Geográfico del Ejército, Escuela de Topografía y Geodesia, Madrid, 2ª edición 1971.

VV.AA.: *Cartography – A Tool for Spatial Analysis*, InTech, Rijeka, 2012

VV.AA.: *Datums, Ellipsoids, Grids, and Grid reference systems*, Defense Mapping Agency, Fairfax, Virginia, 1990.

VV.AA.: *Geodesy for the layman*, Defense Mapping Agency, US Naval Observatory, Washington, 1984.

VV.AA.: *Introducció general a la història de la Cartografia*, Cicle de conferències sobre història de la cartografia, 1er curs: 30, 31 de gener i 1 de febrer de 1990, Institut Cartogràfic de Catalunya, Barcelona 1990.

VV.AA.: *Investigar mediante encuestas. Fundamentos teóricos y aspectos prácticos*, Editorial Síntesis, Madrid 1998.

VV.AA.: *Matching the Map Projection to the Need*, Cartography and Geographic Information Society, American Congress on Surveying and Mapping, Bethesda, 1997.

VV.AA.: *Principios de cartografía básica*, Editor-coordinador Paul S. Anderson, Illinois State University, 1984.

Weintrit, Adam: *The Electronic Chart Display and Information System (ECDIS) and Operational Handbook*, CRC Press, Leiden, 2009.

Wood, Denis: *Rethinking the Power of Maps*, The Guilford Press, New York, 2010.

Yang, Qihe; Snyder, John P.; Tobler, Waldo R.: *Map projection transformation: principles and applications*, Taylor & Francis, London, 2000.

7.2. ARTÍCULOS

American Cartographic Association: "The Case against Rectangular World Maps", *Cartographic Journal*, Vol. 26, Nº 2, pp. 156 a 157, 1989.

Bradley, A.D.: "The gnomonic projection of the sphere", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 47, Nº 10, pp. 694 a 699, diciembre 1940.

Brinker, D.M.: "Return of the orthographic projection as the best choice for world maps", *ACSM-ASPRS Annual Convention, Technical Papers, vol. 2: Cartography*, Bethesda, pp. 60-67, 1990.

Bowring, B. R.: "The direct and inverse solutions for the great elliptic line on the reference ellipsoid". *Bulletin Géodésique*, Vol. 58, Issue 1, pp. 101-108, marzo 1984.

Díaz Hernandez, A.; Achútegui Rodríguez, J.; Azofra Colina, M.: "La proyección mercatoriana oblicua", *Estudios e investigaciones marinas*, Vol. II, Nº I, pp.39-44, Año 2002.

Doytsher, Y.; Shmutter, B.: "Transformation of conformal projections for graphical purposes", *Canadian Surveyor*, Vol. 35, pp. 395-404, 1981.

Earle, Michael A.: "Accurate Harmonic Series for Inverse and Direct Solutions for the Great Ellipse", *The Journal of Navigation*, Vol. 64, pp.557-570, 2011.

Hall, Elial F.; Brevoort, Carson: "Gerard Mercator: His life and works", *Journal of the American Geographical Society of New York*, Vol. 10, pp. 163-196, 1878.

Hsu, Mei-Ling: "The Role of Projections in Modern Map Design." *Cartographica*, Vol. 18, Nº. 2, pp. 151-186, 1981.

Lapaine, Miljenko: "Mollweide Map Projection", *KoG*, Vol.15. Nº15, pp. 7 a 16, 2011.

Lee, L.P.: "The Nomenclature and Classification of Map projections", *Empire Survey Review*, Vol. VII, Nº 51, pp. 190 a 200, enero 1944.

López Varela, Pablo; García Fernández, Jose Manuel; Pita Porta, Antonio: “Resolución de las variables de la derrota ortodrómica en las proyecciones perspectivas”, *Revista del Instituto de Navegación de España*, Nº16, pp. 61 a 73, 2002.

Milnor, John: “A Problem in Cartography”, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 76, Nº 10, pp. 1101 a 1112, diciembre 1969.

Pallikaris, A. and Latsas, G., “New algorithm for great elliptic sailing (GES),” *Journal of Navigation*, Vol. 62, pp. 493-507 (2009).

Perugini, Nick: “Behind the accuracy of Electronic Charts – What Every Mariner Should Know about Electronic and Paper Charts”, *Sea Technology*, Volume 42, Nº 3, Marzo 2001.

Robinson, Arthur H.: “An Analytical Approach to Map Projections”, *Annals of the Association of American Geographers*, Vol. 39, Nº 4, pp. 283-290, diciembre 1949.

Skopeliti, Andriani; Tsoulos, Lysandros; “Choosing a Suitable Projection for Navigation in the Arctic”, *Marine Geodesy*, Vol.36, Nº2, pp. 234 a 259, mayo 2013.

Snyder, John P.: “The space oblique Mercator projection”, *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, Vol. 44, pp. 585-96, 1978.

Tobler, Waldo Rudolph: “A classification of map projections”, *Annals of the Association of American Geographers*, Vol. 52, pp. 167-175, 1962.

Tobler, Waldo Rudolph: “Qibla, and related, map projections”, *Cartography and Geographic Information Science*, Vol. 29, Nº 1, pp.17-23, 2002.

Tobler, Waldo Rudolph: “The Development of Analytical Cartography”, *Cartography and Geographic Information Science*, Vol. 27, Nº 3, pp. 189-194, 2000.

Tyner, Judith A.: “Interactions of culture and cartography”, *The History Teacher*, Vol. 20, Nº 4, pp. 455 a 464, agosto 1987. Pp. 459 a 460 y 462. Delmelle, Eric M.: *Map Projection Properties: considerations for small-scale GIS applications*, thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Arts, Department of Geography, State University of New York, Buffalo, septiembre 2001.

Van Der Merwe, F.: “GIS, maps and visualisation”, *Proceedings of the 21st International Cartographic Conference “Cartographic Renaissance”*, pp. 666-675, International Cartographic Association, Durban, 2003.

Walwyn, P. R.: “The Great Ellipse Solution for Distances and Headings to Steer between Waypoints”. *Journal of Navigation*, Vol 53, Issue 3, pp. 421-424, septiembre 1999.

Wei-Kuo Tseng, Jiunn-Liang Guo, and Chung-Ping Liu: “A comparison of great circle, great ellipse, and geodesic sailing”, *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 21, No. 3, pp. 287-299, 2013.

Wei-Kuo Tseng; Hsuan-Shih Lee: “Navigation on a great ellipse”, *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 18, No. 3, pp. 369-375, 2010.

Williams, R: "The Great Ellipse on the Surface of the Spheroid". *Journal of Navigation*, Vol. 49, Issue 2, pp. 229–234, mayo 1996.

Wright, John K.: “Map makers are human: Comments on the subjective in Maps”, *Geographical Review*, Vol. 32, Nº 4, pp. 527-544, octubre 1942.

7.3. NORMATIVA

Anexo 4 del Convenio de Aviación Civil Internacional: *Cartas aeronáuticas* (10ª edición), Montreal, ICAO, 2001.

Resolución MSC. 232(82), Anexo 24: *Adopción de las Normas de Funcionamiento Revisadas de los Sistemas de Información y Visualización de Cartas Electrónicas*, IMO.

S-66: *Las Cartas Electrónicas de Navegación y las Prescripciones de Transporte: Hechos*, IHO.

7.4. INTERNET

ENAIRES: Carta de radionavegación ENR 6.1.1, web: <http://www.enaire.es/csee/Satellite/navegacion-aerea>.

Fundación Jiménez Llorente, Universidad Politécnica de Valencia: *La Cartografía*, web: <http://www.fgllorente.org/maritima.html>

Mapamundi: *Carta del Mundo de Mercator 1569*, http://mapas.owje.com/10553_carta-del-mundo-de-mercator-1569.html

Osborne, Peter: *The Mercator projections*, <http://www.mercator99.webspace.virginmedia.com/mercator.pdf>, Edinburgh, 2nd edition 2013.

Patronat Call de Girona: *El atlas de Cresques*, http://www.girona.cat/call/img/foto_atlas_cresques.jpg

Universidad de Sevilla, Fondo Antiguo: *Carta Esférica de una parte del océano Atlántico comprendida entre 14°.00' y 44°.10' de latitud N. y desde 11°.00' de Longitud al E. de Cádiz hasta 48°.10' al O.* Atlas Marítimo de España de Vicente Tofiño, 1788, http://fondosdigitales.us.es/media/books/3563/grabado_None_page658859_A062040_002-00015.jpeg

VV.AA.: *Matching the Map Projection to the Need*, <https://courseware.education.psu.edu/projection/> American Congress on Surveying and Mapping, Bethesda, 1997.

Webnavy, Cervera Centre: *Historia de la Cartografía*, <http://www.Cerveracentre.com>.

7.5. ENCICLOPEDIAS Y OTROS

Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo Americana, Espasa Calpe, Madrid 1958.

Enciclopedia Multimedia Planeta DeAgostini, Editorial Planeta DeAgostini S.A., 2000.

**ANEXO I. ASPECTO DE LA PÁGINA WEB EMPLEADA PARA
EL ESTUDIO DE CAMPO**

ANEXO I. ASPECTO DE LA PÁGINA WEB EMPLEADA PARA EL ESTUDIO DE CAMPO

PORTADA



Las proyecciones cartográficas a examen



Objetivo

Esta encuesta está diseñada para obtener información sobre la forma en que percibimos la realidad geográfica a través de mapas realizados en diferentes proyecciones cartográficas. En un principio la encuesta está orientada a buscar soluciones a los problemas de visualización de cartas de navegación, tanto marítima como aérea, en dispositivos electrónicos. No obstante, no solo nos interesa la opinión de los colectivos directamente involucrados, por lo que abrimos la participación a todo el que quiera aportar su visión sobre el tema.



Proyecciones cartográficas

Existen innumerables proyecciones cartográficas y nos resultaría imposible evaluarlas todas en una encuesta que pretendemos sea breve y concisa. Aquellas personas con conocimientos de cartografía tal vez echen de menos alguna proyección concreta. Al respecto, comentar que hemos seleccionado un pequeño número de proyecciones en función de sus características, de modo que no se trata de elegir una proyección por encima de otra, sino de establecer qué propiedades resultan más útiles en función del fin perseguido en cada caso.



Esta acción está financiada por la Universidade da Coruña dentro del programa de ayudas a la investigación 2013: «Proyectos de investigación para equipos en formación».

Cartonav.com | info@cartonav.com

Unidad de investigación "Cartografía Náutica y Navegación"
Escola Técnica Superior de Náutica e Máquinas
Paseo de Ronda 51 15011 A Coruña (España)

Unidad de Cartografía Náutica y Navegación
UNIVERSIDADE DA CORUÑA

PÁGINA DE “NO TENGO CONTRASEÑA”

CARTONAV
Las proyecciones cartográficas a examen

Para la realización de esta encuesta...

nos interesa segregar los resultados en función de varios grupos particulares de población, de ahí la necesidad de establecer una contraseña. Si eres marino (mercante o de la armada) o estás realizando estudios para serlo, o bien si trabajas en el ámbito aeronáutico (piloto civil o comercial, controlador aéreo, TCP, etc.) te agradeceríamos que nos enviaras un email a: request@cartonav.com, indicándonos brevemente tu perfil profesional, de modo que podamos reenviarte una contraseña personalizada (tu dirección de email no se empleará para nada más que el envío de dicho email).

Si no perteneces a ninguno de los colectivos anteriores también puedes cubrir la encuesta, ya que todas las opiniones nos interesan. En ese caso la contraseña que deberás introducir es la destinada a público general: **rt67k92**

Cartonav.com | info@cartonav.com
Unidad de Investigación "Cartografía Náutica y Navegación"
 Escuela Técnica Superior de Náutica y Máquinas
 Paseo de Ronda 51 15011 A Coruña (España)

Unidad de Cartografía Náutica y Navegación
 UNIVERSIDADE DA CORUÑA

PÁGINA DE ADMINISTRADOR – PANEL DE CONTROL

CARTONAV
A review of map projections

Ref: Anaximandro

CartoNav | Panel de control

Estadísticas

<div>ARMADA</div> <div>encuestas solicitadas: 8</div> <div>Finalizadas: 5</div>	<div>MARINA CIVIL</div> <div>encuestas solicitadas: 18</div> <div>Finalizadas: 7</div>
<div>AÉREO</div> <div>encuestas solicitadas: 7</div> <div>Finalizadas: 4</div>	<div>PÚBLICO</div> <div>encuestas solicitadas: 16</div> <div>Finalizadas: 7</div>

Últimos 10 comentarios recibidos

13/10/2014 16:43:12 | PÚBLICO | N2956CVV: general 13.10

13/10/2014 12:34:51 | PÚBLICO | P2138LMW: PUBLICO GENERAL EN ESPAÑOL 13.10.14

13/10/2014 12:19:29 | PÚBLICO | C4102TID: publico general 13/10

13/10/2014 10:55:38 | AEREO | P9945BVM: AEREO EN ESPAÑOL 13.10.14

13/10/2014 10:31:43 | ARMADA | F0897PJF: ARMADA EN ESPAÑOL 13.10.14

13/10/2014 10:12:15 | CIVIL | L3920UER: MARINA CIVIL EN ESPAÑOL 13.10.14

12/10/2014 19:47:49 | PÚBLICO | Y1572YFE: PUBLICO GENERAL EN INGLES 12.10.14

12/10/2014 18:59:06 | AEREO | O5902DAK: AEREO EN INGLES 12.10.14

12/10/2014 17:12:36 | ARMADA | U7357IAP: ARMADA EN INGLES 12.10.14

12/10/2014 16:49:34 | CIVIL | Y5920EEE: MARINA CIVIL EN INGLES 12.10.14

Utilidades

- Formato EXCEL con todas las respuestas

- Acceso al correo <http://www.cartonav.com/mail>

Cartonav.com | info@cartonav.com
Unidad de Investigación "Cartografía Náutica y Navegación"
 Escuela Técnica Superior de Náutica y Máquinas
 Paseo de Ronda 51 15011 A Coruña (España)

Unidad de Cartografía Náutica y Navegación
 UNIVERSIDADE DA CORUÑA

BLOQUE 1:

CARTONAV
Las proyecciones cartográficas a examen

Ref: W7051BMK

Por favor, antes de comenzar con la evaluación de las diferentes representaciones cartográficas, contesta a las siguientes preguntas:

- Edad:

- ☐ Menos de 24 años
- ☐ Entre 24 y 35 años
- ☐ Entre 36 y 45 años
- ☐ Entre 46 y 55 años
- ☐ Más de 55 años

- Sexo:

- ☐ Hombre
- ☐ Mujer

- Titulación profesional:

Titulaciones de Náutica

- ☐ Capitán
- ☐ Piloto de 1ª
- ☐ Piloto de 2ª
- ☐ Alumno de puente (sin titulación profesional pero finalizada la diplomatura, licenciatura o grado en náutica)
- ☐ Sin titulación pero realizando estudios de náutica
- ☐ Otra titulación: patrón de altura, de litoral, mayor de cabotaje, de cabotaje o patrón portuario

Titulaciones de Máquinas

- ☐ Jefe de máquinas
- ☐ Oficial de máquinas de 1ª
- ☐ Oficial de máquinas de 2ª
- ☐ Alumno de máquinas (sin titulación profesional pero finalizada la diplomatura, licenciatura o grado en máquinas navales)
- ☐ Sin titulación pero realizando estudios de máquinas navales

- Años de experiencia en navegación:

- ☐ Sin experiencia
- ☐ Menos de 1 año
- ☐ Entre 1 y 2 años
- ☐ Entre 3 y 5 años
- ☐ Entre 6 y 10 años
- ☐ Más de 10 años

- Años de experiencia en el uso de cartas náuticas electrónicas a bordo:

- ☐ Sin experiencia
- ☐ Menos de 1 año
- ☐ Entre 1 y 2 años
- ☐ Entre 3 y 5 años
- ☐ Entre 6 y 10 años
- ☐ Más de 10 años

Siguiente ->

Cartonav.com | info@cartonav.com

Unidad de investigación "Cartografía Náutica y Navegación"
Escuela Técnica Superior de Náutica e Máquinas
Paseo de Ronda 51 15011 A Coruña (España)

Unidad de Cartografía Náutica y Navegación
UNIVERSIDADE DA CORUÑA

BLOQUE 2:

CARTONAV
Las proyecciones cartográficas a examen

Ref: J19470JO

1.1 ¿Cuál de las siguientes representaciones cartográficas se asemeja más a la imagen mental que tienes de la configuración de la superficie terrestre?

Es decir, si te paras a pensar en la configuración geográfica de nuestro planeta ¿Cuál de los siguientes mapas se parece más a la imagen que te viene a la cabeza?

Por motivos de diseño de la página web el tamaño de los mapas que se representan en esta pregunta se ve limitado por su altura, por lo que te pedimos que no tengas en cuenta la diferencia de tamaño entre mapas.

(Sólo puedes elegir una)



seleccionar: ☐



seleccionar: ☐



seleccionar: ☐



seleccionar: ☐



seleccionar: ☐



seleccionar: ☐

Siguiente ->

Cartonav.com | info@cartonav.com

Unidad de Investigación "Cartografía Náutica y Navegación"
Escuela Técnica Superior de Náutica e Máquinas
Paseo de Ronda 51 15011 A Coruña (España)

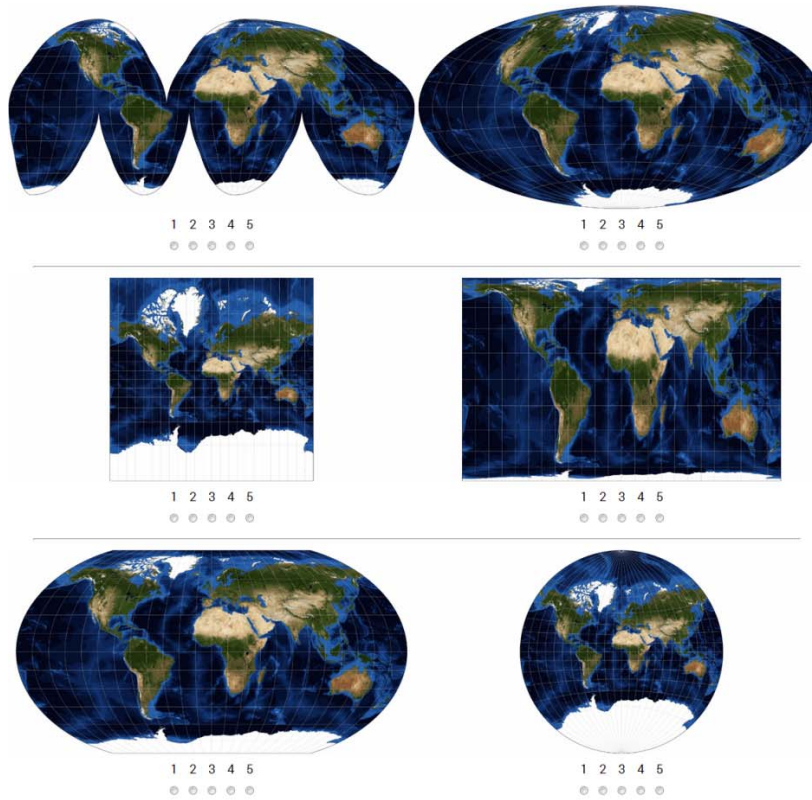
Unidad de Cartografía Náutica y Navegación
UNIVERSIDADE DA CORUÑA

2.1 Valora de 1 a 5 la capacidad de los siguientes mapamundis para representar lo más fielmente posible la realidad de la superficie terrestre.

Ten en cuenta que al realizar un mapa necesariamente deben asumirse una serie de deformaciones, que serán mayores o menores en diferentes aspectos (angulares, lineales o superficiales), en función de la proyección cartográfica a utilizar.

Al igual que en la pregunta anterior, te pedimos que no tengas en cuenta la diferencia de tamaño entre mapas. En todo caso, puedes fijarte en las diferencias de superficie entre continentes y masas de tierra, pero solo dentro de un mismo mapa (no entre ellos, ya que no existirá una relación de escala intencional).

1. El mapamundi no representa en absoluto la realidad de la superficie terrestre.
 5. El mapamundi representa perfectamente la realidad de la superficie terrestre.



2.2 Valora de 1 a 5 los siguientes criterios según la importancia que hayan tenido a la hora de tomar tus decisiones en la pregunta anterior.

1. El criterio no ha tenido ningún peso en tu decisión.
 5. El criterio ha tenido una importancia máxima en tu decisión.

	1	2	3	4	5
- Forma que adoptan los meridianos	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
- Forma que adoptan los paralelos	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
- Forma de los accidentes geográficos y masas continentales	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
- Superficie de los accidentes geográficos y masas continentales (dentro del mismo mapa, no comparativamente entre ellos)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
- Similitud con la imagen mental que tienes de la configuración geográfica de la superficie terrestre	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
- Geometría de los límites del mapa (forma de sus bordes)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

[<- Anterior](#)
[Siguiente ->](#)

CARTONAV

Las proyecciones cartográficas a examen

Ref. J19470JD

3.1 Valora de 1 a 5 la utilidad de los siguientes mapas para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Atlántico Norte.

Como puedes comprobar, a la hora de representar zonas de menor extensión las diferencias entre los mapas realizados con diferentes proyecciones se hacen menos evidentes, por lo que te pedimos que te fijas bien.

1. El mapa no te parece en absoluto útil.

5. El mapa te parece de la máxima utilidad.

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

3.2 Valora de 1 a 5 los siguientes criterios según la importancia que hayan tenido a la hora de tomar tus decisiones en la pregunta anterior.

1. El criterio no ha tenido ningún peso en tu decisión.

5. El criterio ha tenido una importancia máxima en tu decisión.

1 2 3 4 5

- Forma que adoptan los meridianos

- Forma que adoptan los paralelos

- Forma de los accidentes geográficos y masas continentales

- Superficie de los accidentes geográficos y masas continentales

- Similitud con la imagen mental que tienes de la configuración geográfica de la zona representada

<- Anterior

Siguiente >

Cartonav.com | info@cartonav.com

Unidad de Investigación "Cartografía Histórica y Navegación"

Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Arquitectura

Paseo de Ronda 51 15011 A Coruña (España)

Unidad de Cartografía Náutica y Navegación

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

446

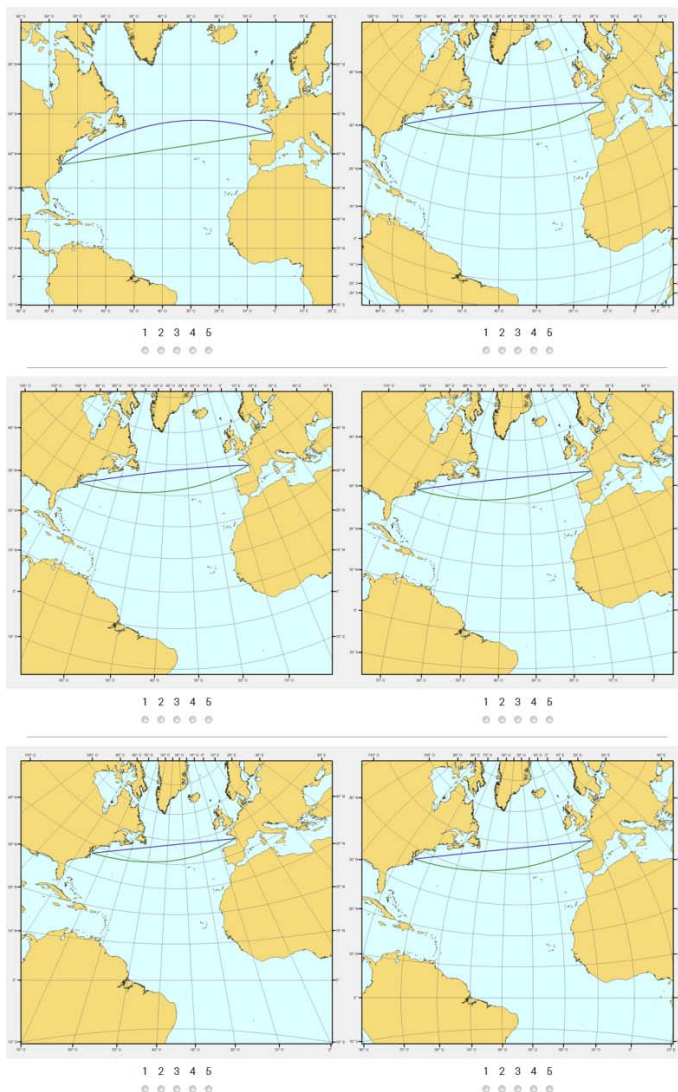
Para cruzar el Atlántico Norte desde Norfolk hasta Burdeos se pueden seguir dos trayectorias:

Una derrota ortodrómica: en color azul (distancia = 3.258 millas)

Una derrota loxodrómica: en color verde (distancia = 3.370 millas)

4.1 Valora de 1 a 5 las siguientes cartas de navegación del Atlántico Norte en función de su utilidad a la hora de visualizar la diferencia real entre ambas derrotas.

1. El mapa no te parece en absoluto útil.
5. El mapa te parece de la máxima utilidad.



4.2 Valora de 1 a 5 los siguientes criterios según la importancia que hayan tenido a la hora de tomar tus decisiones en la pregunta anterior.

1. El criterio no ha tenido ningún peso en tu decisión.
5. El criterio ha tenido una importancia máxima en tu decisión.

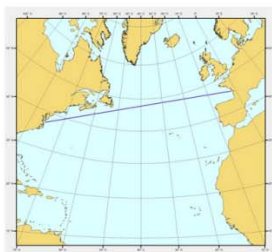
	1	2	3	4	5
- Forma de las derrotas en la carta	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
- Longitud de las derrotas en la carta	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

<- Anterior

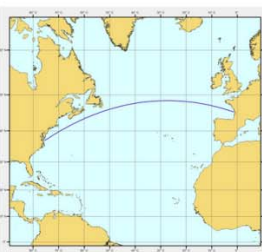
Siguiente ->

5.1 ¿Cuál de las siguientes cartas de navegación consideras que es la más útil a la hora de planificar una derrota ortodrómica desde Norfolk hasta Burdeos?

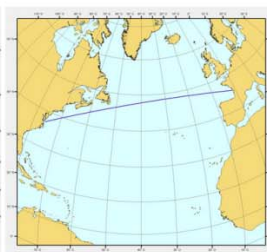
(Sólo puedes elegir una)



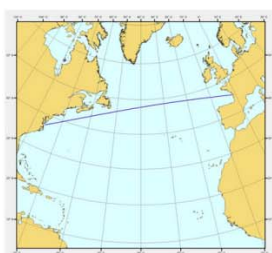
seleccionar: ☐



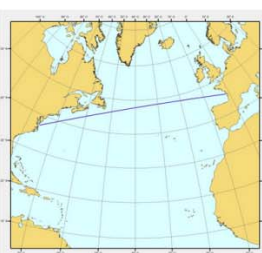
seleccionar: ☐



seleccionar: ☐



seleccionar: ☐



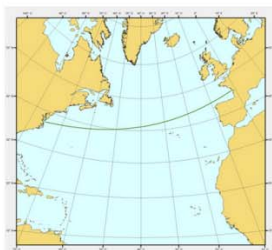
seleccionar: ☐



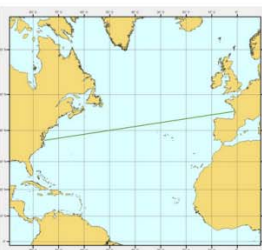
seleccionar: ☐

5.2 ¿Cuál de las siguientes cartas de navegación consideras que es la más útil a la hora de planificar una derrota loxodrómica desde Norfolk hasta Burdeos?

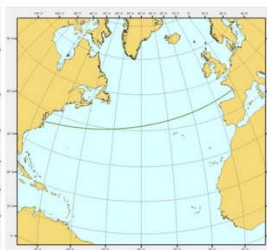
(Sólo puedes elegir una)



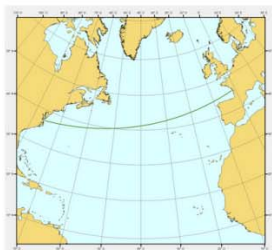
seleccionar: ☐



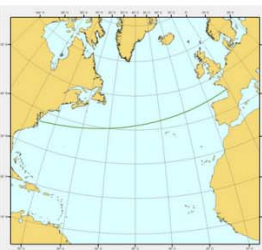
seleccionar: ☐



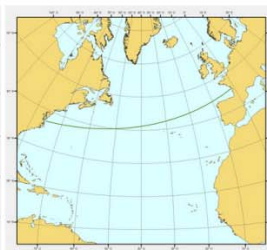
seleccionar: ☐



seleccionar: ☐



seleccionar: ☐



seleccionar: ☐

[< Anterior](#)

[Siguiente >](#)

6.1 Valora de 1 a 5 la utilidad de los siguientes mapas para representar lo más fielmente posible la realidad geográfica del Océano Pacífico.

1. El mapa no te parece en absoluto útil.
 5. El mapa te parece de la máxima utilidad.

1 2 3 4 5 ● ● ● ● ●	1 2 3 4 5 ● ● ● ● ●
1 2 3 4 5 ● ● ● ● ●	1 2 3 4 5 ● ● ● ● ●
1 2 3 4 5 ● ● ● ● ●	1 2 3 4 5 ● ● ● ● ●

6.2 Valora de 1 a 5 los siguientes criterios según la importancia que hayan tenido a la hora de tomar tus decisiones en la pregunta anterior.

1. El criterio no ha tenido ningún peso en tu decisión.
 5. El criterio ha tenido una importancia máxima en tu decisión.

	1	2	3	4	5
- Forma que adoptan los meridianos	●	●	●	●	●
- Forma que adoptan los paralelos	●	●	●	●	●
- Forma de los accidentes geográficos y masas continentales	●	●	●	●	●
- Superficie de los accidentes geográficos y masas continentales	●	●	●	●	●
- Similitud con la imagen mental que tienes de la configuración geográfica de la zona representada	●	●	●	●	●

< Anterior

Siguiente >

CARTONAV

Las proyecciones cartográficas a examen

Ref. J19470J0

Para cruzar el Océano Pacífico desde Valparaíso hasta Okinawa se pueden seguir dos trayectorias:

Una derrota ortodrómica: en color azul (distancia = 9.665 millas)

Una derrota loxodrómica: en color verde (distancia = 10.195 millas)

7.1 Valora de 1 a 5 las siguientes cartas de navegación del Océano Pacífico en función de su utilidad a la hora de visualizar la diferencia real entre ambas derrotas.

1. La carta no te parece en absoluto útil.

5. La carta te parece de la máxima utilidad.

1 2 3 4 5

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

1 2 3 4 5

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

1 2 3 4 5

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

1 2 3 4 5

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

1 2 3 4 5

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

1 2 3 4 5

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

7.2 Valora de 1 a 5 los siguientes criterios según la importancia que hayan tenido a la hora de tomar tus decisiones en la pregunta anterior.

1. El criterio no ha tenido ningún peso en tu decisión.

5. El criterio ha tenido una importancia máxima en tu decisión.

1 2 3 4 5

- Forma de las derrotas en la carta

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

- Longitud de las derrotas en la carta

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

< Anterior

Siguiente >

Cartonav.com | info@cartonav.com

Unidad de Investigación "Cartografía Náutica y Navegación"

Escuela Técnica Superior de Náutica e Ingenierías

Paseo de Ronda 51 15011 A Coruña (España)

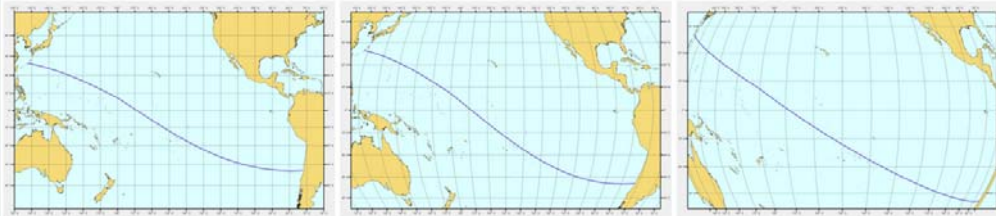
Unidad de Cartografía Náutica y Navegación

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

450

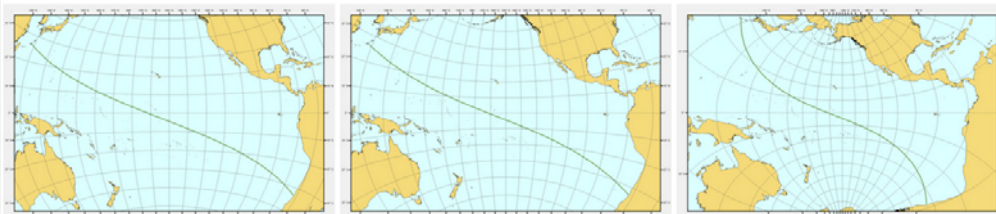
8.1 ¿Cuál de las siguientes cartas de navegación consideras que es la más útil a la hora de planificar una derrota ortodrómica desde Valparaíso hasta Okinawa?

(Sólo puedes elegir una)



8.2 ¿Cuál de las siguientes cartas de navegación consideras que es la más útil a la hora de planificar una derrota loxodrómica desde Valparaíso hasta Okinawa?

(Sólo puedes elegir una)



< Anterior

Siguiente >

CARTONAV

Las proyecciones cartográficas a examen

Ref: J19470JO

Para finalizar con esta encuesta, veamos algunos mapas de zonas más próximas a los polos.

9.1 ¿Cuál de los siguientes mapas consideras que es el más útil a la hora de representar la realidad geográfica de la zona entre Tierra de Fuego y el Cabo de Buena Esperanza?

(Sólo puedes elegir uno)

seleccionar: ☐

seleccionar: ☐

seleccionar: ☐

seleccionar: ☐

9.2 ¿Cuál de los siguientes mapas consideras que es el más útil a la hora de representar la realidad geográfica de la zona de las Islas Aleutianas y el Estrecho de Bering?

(Sólo puedes elegir uno)

seleccionar: ☐

seleccionar: ☐

seleccionar: ☐

seleccionar: ☐

9.3 Valora de 1 a 5 los siguientes criterios según la importancia que hayan tenido a la hora de tomar tus decisiones en las preguntas de esta sección.

1. El criterio no ha tenido ningún peso en tu decisión.

5. El criterio ha tenido una importancia máxima en tu decisión.

	1	2	3	4	5
- Forma que adoptan los meridianos	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
- Forma que adoptan los paralelos	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
- Forma de los accidentes geográficos y masas continentales	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
- Superficie de los accidentes geográficos y masas continentales	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
- Similitud con la imagen mental que tienes de la configuración geográfica de la zona representada	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

< Anterior

Siguiente >

Cartonav.com | info@cartonav.com

Unidad de Investigación "Cartografía Náutica y Navegación"

Escuela Técnica Superior de Náutica e Ingenieros


Paseo de Ronda 31, 15011 A Coruña (España)

Unidad de Cartografía Náutica y Navegación

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

452

PÁGINAS FINALES COMUNES A TODAS LAS ENCUESTAS


Las proyecciones cartográficas a examen

Ref: N2956CVV

Gracias por participar en esta encuesta.

Si deseas hacer algún comentario o sugerencia sobre la misma, por favor, hazlo a continuación.

Finalizar

Cartonav.com | info@cartonav.com

Unidad de investigación "Cartografía Náutica y Navegación"
Escola Técnica Superior de Náutica e Máquinas
Paseo de Ronda 51 15011 A Coruña (España)

Unidad de Cartografía Náutica y Navegación
UNIVERSIDADE DA CORUÑA


Las proyecciones cartográficas a examen

Ref: N2956CVV

Finalizado. ¡Gracias por formar parte de esta encuesta!

Cartonav.com | info@cartonav.com

Unidad de investigación "Cartografía Náutica y Navegación"
Escola Técnica Superior de Náutica e Máquinas
Paseo de Ronda 51 15011 A Coruña (España)

Unidad de Cartografía Náutica y Navegación
UNIVERSIDADE DA CORUÑA

